«Det er vel en viktig regel i forhold til ulikheter? Men jeg har aldri tenkt på hvorfor»

En kvalitativ studie av R1-elevers kompetanse innen algebraiske ulikheter

Silje Espeland

Lektorprogrammet
30 studiepoeng

Institutt for lærerutdanning og skoleforskning
Utdanningsvitenskapelig fakultet

UNIVERSITETET I OSLO
VÅR 2022

«Det er vel en viktig regel i forhold til ulikhet? Men jeg har aldri tenkt på hvorfor»

En kvalitativ studie av R1-elevers kompetanse innen algebraiske ulikheter

Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Silje Espeland

2022

«Det er vel en viktig regel i forhold til ulikheter? Men jeg har aldri tenkt på hvorfor» En kvalitativ studie av R1-elevers kompetanse innen algebraiske ulikheter

Silje Espeland

https://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Norske videregåendeelever sliter med algebra, viser blant annet den internasjonale undersøkelsen TIMSS Advanced. Forskning viser at det algebraiske temaet ulikheter også er et problem for mange, blant annet fordi elevene har en instrumentell forståelse, og behandler ulikheter som likninger. Fra egen praksiserfaring opplevde jeg at et skifte mellom representasjoner, særlig mellom algebraiske ulikheter og polynomets grafiske fremstilling, kunne gjøre det enklere for elevene å forstå matematikken bak. I tillegg vil et fokus på dybdelæring, fra fagfornyelsen, bidra til at elevene får en forståelse for algebra som varer.

Denne studien forsker på en matematikk R1-klasse, og deres kompetanse innen algebraiske ulikheter. Jeg har stilt følgende spørsmål:

Hvilke kompetanser og representasjoner bruker R1-elever når de løser ulikheter av første og andre grad, og hvilke eventuelle misoppfatninger og svakheter viser de?

For å svare på dette har jeg tatt utgangspunkt i én klasse i matematikk R1, og utformet et egendesignet oppgavehefte som tester elevene innen ulikheter av forskjellige slag. Ut ifra elevenes løsninger, valgte jeg i tillegg ut tre intervjuobjekter som ble intervjuet kort tid etter om deres løsningsstrategier og eventuelle misoppfatninger og svakheter. Resultatene fra oppgaveheftene og intervjuene ble analysert med bakgrunn i problemstillingen, og jeg kom frem til tre hovedfunn. 1) Elevene viser en instrumentell forståelse for ulikheter, 2) Elevene viser svakhet i deres bruk og forståelse av ulikhetstegnet og 3) Elevene bruker i svært liten grad ulike representasjoner.

Studien begrenser seg til én elevgruppe på en bestemt skole, og det er vanskelig å si om funnene kan generaliseres. Likevel er funnene bekreftende overfor tidligere forskning og antakelser basert på teori, og dermed er det rimelig å anta at de har relevans for den norske skolematematikken. Mer dybdelæring og fokus på elevenes matematiske kompetanse som beskrevet av Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) vil kunne bidra til at elevene utvikler en dyp forståelse for fagstoffet som varer og blir husket.

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på fem fine år på lektorprogrammet ved Universitetet i Oslo. Studenttida har vært spennende, gøy og til tider slitsom. Selv om jeg gleder meg til arbeidslivet som ligger foran, er det ingen tvil om at studenttilværelsen vil bli savnet.

Først og fremst ønsker jeg å takke min veileder, Arne Hole, for gode råd og tilbakemeldinger. Takk for at du bruker maks fem minutter på å svare på mail, og at du lærte meg hvilken vei apostrofen over e-en skal stå. Takk for korrekturlesing, og ikke minst for gode, didaktiske innspill.

Tusen takk til min kjekke mann, Benjamin, som har tilbrakt det siste året i pappapermisjon, for at jeg kunne fullføre studiet på normert tid. Og takk for at du ellers har forsørget meg gjennom disse fem årene, slik at jeg har hatt mulighet til å være stamgjest hos alle kaféer på Blindern og ellers i Oslo. Nå er det min tur til å forsørge.

Marte, du har vært en Knoll til min Tott. Takk for alt samarbeid gjennom studiet, og for timene på Eddie og de andre grupperommene på VB. Du har gjort hver eksamenstid til en fest. Og tusen takk til alle mine andre medstudenter for lunsjer, fester og god stemning. Dere er en nydelig gjeng!

Ellers er det mange fler som fortjener en stor takk, for oppmuntrende ord underveis og barnevakt i travle tider. Tusen takk!

Oslo, juni 2022

Silje Espeland

Innholdsfortegnelse

1. Innledning

Hva vil det si å være god i matematikk, og mestre faget? Blant elever handler det kanskje mest om gode karakterer, mens lærere ofte er opptatt av forståelsen som ligger bak. Fra egen skolegang ligger karakterfokuset sterkt i minne, og det er ingen tvil om at gode karakterer er til god hjelp i videre studier for de som ønsker det. Men ofte kom de gode karakterene fra å pugge prosedyrer, uten å egentlig forstå hvorfor eller hvordan det hang sammen med resten av matematikkverdenen. Å være god i matematikk – altså, å være matematisk kompetent, handler om mye mer enn å pugge algoritmer og prosedyrer. Uten å ha en entydig definisjon, handler matematisk kompetanse om en sammensetning av flere kompetanser (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Matematisk kompetanse har fanget min oppmerksomhet de siste årene, og spiller en stor rolle i denne avsluttende masteroppgaven i matematikkdidaktikk. Med utgangspunkt i temaet algebra ønsker jeg å se på hva det vil si å være «god i matematikk», og «hvor gode» noen utvalgte elever er akkurat nå.

1.1 Aktualisering

Fra internasjonale undersøkelser som for eksempel TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Studies) ser vi at algebra er et problemområde, særlig for norske elever (Hole & Grønmo, 2017). Algebrakunnskaper er viktig i flere realfag utenom matematikken, eksempelvis fysikk og biologi, samt at det spiller en stor rolle i utviklingen av matematisk kompetanse. For å snu de trendene vi ser innen norske elevers algebraferdigheter trenger vi blant annet en læringskultur som setter søkelyset på *forståelse* fremfor memorering. Ved fagfornyelsen, LK20, presenteres vi for begrepet *dybdelæring* (Utdanningsdirektoratet, 2019), som krever at skolene *«legger bedre til rette for at elevene utvikler helhetlig og varig forståelse innenfor et fag eller på tvers av fagområder»* (Ludvigsen, 2015, s. 41). Innen matematikk vil dette innebære å utruste elevenes kompetanse på flere områder, slik at det de lærer også er noe de forstår og husker (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

1.2 Algebraiske ulikheter

Algebra er et bekymringsområde over hele verden (van Stiphout, Drijvers, & Gravemeijer, 2013), og særlig i Norge (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000; Grønmo & Hole, 2016). På samme tid er algebra en hjørnestein i skolematematikken, ettersom det gir unike muligheter til å utforske, analysere og representere matematiske konsepter og ideer (Naalsund, 2012). I sin doktoravhandling konkluderer Naalsund blant annet med overvekten av prosedural kunnskap knyttet til løsningsstrategier som et problem, og videre en svak konseptuell forståelse for algebra (Naalsund, 2012). Dette kan jeg relatere meg til, ettersom jeg på videregående slet med å forstå *hvorfor* algebra var viktig å kunne, og hva jeg kunne bruke det til utenfor matematikklasserommet.

Algebra er et stort tema innen matematikk, særlig i videregående skole, og denne studien vil derfor spisse seg inn på kompetanse innen algebraiske *ulikheter*. I møte med ulikheter vil elevene få bruk for gode algebrakunnskaper samt en forståelse av ulikhetstegnet. En kobling mellom ulike representasjoner, eksempelvis grafiske fremstillinger ved siden av algebraiske fremstillinger vil også være viktig. Evnen til visualisering og det å forstå og benytte seg av forskjellige representasjoner påvirker elevenes evner til å bruke det algebraiske språket på rett måte. Innen realfagsmatematikken er ulikheter er et relativt lite tema, og faller ofte inn under temaet likninger, men det er likevel interessant å utforske ettersom man i ulikheter ofte er ute etter løsningsområder, og ikke bare ett tall.

Rosalind Tanner hevder at matematikk *begynner* med ulikheter. Før tallene, og til å med før språket hadde man en oppfatning av «mer enn» og «mindre enn» (Tanner, 1961). Det brukes i hverdagslivet, for eksempel i dosering av medisiner, og videre i matematiske temaer som kalkulus og utforsking av funksjoner. Engasjementet for ulikheter fikk jeg fra egen praksisperiode våren 2021, og erfaringene derfra la grunnlaget for valg av tema i denne studien.

1.3 Tidligere forskning om algebraiske ulikheter

Tidligere forskning innen det algebraiske temaet ulikheter baserer seg ofte på hva elevene tilsynelatende sliter med. Fra Tsamir & Bazzinis forskning ser vi at elevene ofte møter en ulikhet på samme måte som de møter en likning, og dermed løser de den på nøyaktig samme måte (Tsamir & Bazzini, 2004). Den strukturelle likheten mellom ulikheter og likninger kan være en årsak til dette, påpeker Tsamir & Almog (2000). Vaiyavutjamai & Clemets sin forskning fra 2006 bekrefter dette, og hevder at elevene angriper en ulikhet ved å bare gjøre det samme på begge sider av ulikhetstegnet (Vaiyavutjamai & Clements, 2006).

Flere av de som har forsket på temaet foreslår en undervisning som kombinerer algebraiske ulikheter med grafiske fremstillinger (Ndlovu, 2019; Switzer, 2014; Tsamir & Almog, 2000). Elevene bør få muligheten til å se eksempelvis et andregradspolynom både som en klassisk ulikhet, og som en grafisk funksjon. De bør få muligheten til å identifisere nullpunkter, toppunkter og bunnpunkter på grafen, og deretter se dette i sammenheng med den algebraiske ulikheten. Evnen til å fleksibelt kunne skifte mellom ulike representasjoner i matematikk er viktig for forståelsen. Særlig i algebra, hvor det algebraiske språket stort sett er bygget opp av abstrakte enheter og representasjoner, vil dette være viktig å jobbe med (Niss, et al., 2002).

1.4 Egne erfaringer til grunn

Over en 9-ukers praksisperiode befant jeg meg i en matematikk 1T-klasse hvor jeg noe ubevisst observerte elevenes læringsstrategier og tilsynelatende kompetanse i faget. Jeg merket meg at det ofte var den prosedurale tilnærmingen til matematikken som fant sted, og elevene lette etter den «kjappeste veien» til to streker under svaret. Da vi skulle arbeide med matematiske ulikheter var praksisveilederen min særlig opptatt av å bruke de grafiske fremstillingene *sammen* med de algebraiske ulikhetene, for å øke forståelsen til elevene. Dette var en ny tilnærming for meg. Jeg likte godt å bruke grafisk fremstilte funksjoner i undervisningen av ulikheter, og tenkte at det måtte være bra for elevenes dybdelæring og relasjonelle forståelse. Elevenes engasjement var derimot ikke som jeg hadde forespeilet, og flere av dem uttalte at de ikke så vitsen i å se på grafen *i tillegg* til å løse ulikheten algebraisk. Flere skjønte ikke hvorfor det var nyttig å bruke den grafiske fremstillingen, og jeg lurte på om de egentlig forstod sammenhengen mellom antall nullpunkter, abc-formelen, heltallsfaktorisering, buen til grafen i annengradspolynomer og løsningsområdet til ulikheter. Forkjærligheten for innlærte algoritmer, særlig abc-formelen, virket å trumfe det meste hos disse elevene, og selv om noen viste nysgjerrighet og søkte begrunnelser for hvorfor algoritmen fungerte som den gjorde, var flertallet mer interessert i å jobbe seg gjennom flest mulig oppgaver med bruk av den samme algoritmen. Spørsmålene de stilte meg var av typen *«er dette rett?»*, og *«må jeg snu ulikhetstegnet her?»*. Med kunnskapen om forskjellen mellom relasjonell og instrumentell forståelse, samt tvetydigheten av matematisk kompetanse, ønsket jeg dermed å se nærmere på ulikheter og elevers tilnærming til temaet. Jeg har formulert en problemstilling og noen forskningsspørsmål som jeg, gjennom min studie, søker svar på.

1.5 Problemstilling

Problemstillingen jeg søker svar på er:

> *Hvilke kompetanser og representasjoner bruker R1-elever når de løser ulikheter av første og andre grad, og hvilke eventuelle misoppfatninger og svakheter viser de?*

I forbindelse med problemstillingen vil jeg arbeide med følgende forskningsspørsmål:

1. Hvordan løser elevene ulikheten, og hvordan tolker de svaret?
2. Hvordan bruker elevene sammenhengen mellom den algebraiske løsningen og den grafiske løsningen?
3. Er det primært en relasjonell forståelse, eller en instrumentell forståelse av temaet ulikheter som dominerer?

For å svare på disse spørsmålene har jeg benyttet meg av data fra en matematikk R1-klasse, bestående av deres løsninger av et oppgavehefte samt tre individuelle intervjuer basert på besvarelsen av dette oppgaveheftet. Med relevant teori og tidligere forskning som bakgrunn for undersøkelsen, utformet jeg noen oppgaver som jeg ønsket å se elevenes løsninger av. I tillegg ville individuelle intervjuer kunne bidra til å få mer utfyllende informasjon om deres matematiske forståelse og tolkninger. Noen grafiske fremstillinger var også inkludert i både oppgaveheftet og intervjuene, for å få innsikt i forskningsspørsmål nummer 2.

Når det gjelder begrepsparet relasjonell og instrumentell forståelse, vil jeg bygge på definisjonen til Skemp (1976), hvor det i matematikken skilles mellom å forstå prosedyrer og fremgangsmåter instrumentelt og å forstå det relasjonelt ved å vite hva som ligger bak den enkelte prosedyren. Sammen med rammeverket til Kilpatrick et al. (2001) for matematisk kompetanse, hvor vi presenteres for fem enkeltområder som må utvikles sammen, vil dette utgjøre en definisjon og beskrivelse av hva det her vil si å være matematisk kompetent.

1.6 Oppbygging av oppgaven

Kapittel 2 presenterer den teoretiske rammen og relevant litteratur for studiet. Her er det, som nevnt, rammeverket til Kilpatrick et al. (2001) som i all hovedsak beskriver hva jeg legger i matematisk kompetanse, samt skillet mellom instrumentell og relasjonell forståelse som lagt fram av Skemp (1976). Algebraisk kompetanse og elevers bruk av ulike representasjoner presenteres deretter, for så å settes i sammenheng med situasjonen i verden og Norge i dag. Fagfornyelsen fra 2020, med særlig fokus på dybdelæring vil også utgjøre et teoretisk grunnlag, før noe tidligere forskning på det algebraiske temaet ulikheter vil bli presentert.

Videre i kapittel 3 vil jeg legge frem den metodiske tilnærmingen som har blitt brukt. Oppgavehefter og intervju som metode, med sine fordeler og ulemper vil bli lagt fram, og studiens reliabilitet og validitet vil også bli diskutert. Videre vil metodekapittelet også beskrive analyseprosessen, og hvordan jeg har kommet frem til de funnene som presenteres.

I kapittel 4 vil resultatene og analysen av disse legges frem. Her vil data fra oppgaveheftene legges frem i en egendesignet tabell, og relevant informasjon fra intervjuene vil trekkes frem. Resultatene som forekommer, er et resultat av problemstillingen og forskningsspørsmålene.

Kapittel 5 presenterer tre hovedfunn fra analysen av data: 1) Elevene viser en instrumentell forståelse av ulikheter, 2) Elevene viser en tilsynelatende ufullstendig forståelse av ulikhetstegnet, og 3) Elevene bruker i liten grad ulike representasjoner.

Kapittel 6 svarer på de tre forskningsspørsmålene, og kommer med en konklusjon av studien. I tillegg belyses studiens begrensninger, samt forslag til videre forskning.

Vedleggene inneholder godkjenning fra NSD, samtykkeskjema fra elevene som deltok samt oppgaveheftet som ble brukt.

2. Teori

Dette kapitlet vil presentere et teoretisk bakteppe som er relevant for studien. Det vil her være hensiktsmessig å definere noen anvendte begreper og rammeverk, samt sette studien i kontekst. Jeg vil gå nærmere inn på hvordan matematikkundervisningen ser ut i den norske skolen, og hvilke endringer som har skjedd her de siste årene med særlig tanke på Fagfornyelsen, LK20. Videre vil jeg gjøre rede for matematisk kompetanse, med utgangspunkt i rammeverket til Kilpatrick, Swafford & Findell (2001), samt skille mellom instrumentell og relasjonell forståelse med utgangspunkt i Skemp (1976). Jeg vil videre legge frem noen viktige punkter i forhold til algebraiske ferdigheter hos elever, samt hvordan bruk av ulike representasjoner er viktig i matematikkundervisningen. Avslutningsvis vil jeg spisse meg inn på det algebraiske temaet ulikheter, og hva tidligere forskning konkluderer med i forhold til elevenes ferdigheter her.

2.1 Matematikkundervisning i norsk skole

De siste 20 årene har matematikkundervisningen i norsk skole vært gjennom flere faser. Fra å være *prosessorientert* (L97) til *kompetansebasert* (LK06), og deretter til en slags hybrid i LK20. I den prosessorienterte læreplanen L97 ble ansvaret lagt på den enkelte elev, og fokuset lå på hva elevene skulle *gjøre*. Hovedmomentene bestod av setninger som «*arbeide* med å tolke og lage grafer...» og «*øve* med bokstaver...» (KUD, 1996). Da det viste seg at norske elever ikke presterte så bra som forventet i undersøkelser som PISA og TIMSS, var det på tide med et skifte. LK06 var mer kompetansebasert, og hadde fellestrekk med kompetanserammeverket fra det danske KOM-prosjektet som jeg vi snakke litt mer om senere i kapitlet (Niss, et al., 2002). Målet for opplæringen var ikke lenger at elevene skulle *arbeide* med noe, men at de skulle *kunne* noe. Læreplanene var svært detaljerte, og styrte mye av undervisningen. Det å måle og deretter dokumentere elevers læring ble sentralt under LK06. Dette har muligens bidratt til en undervisningskultur som setter søkelys på *prøven* fremfor *læringen*, og dermed ført til en overflatelæring som fort blir glemt. LK20 setter søkelyset på *dybdelæring*, og denne fagfornyelsen har nylig tatt sin plass i norsk skole.

For matematikken sin del fører fagfornyelsen, LK20, med seg en rekke endringer som vil påvirke undervisningssituasjonen. Kompetansemålene er mer overordnet, slik at læreren skal ha muligheten til å bruke mer tid på å gå i dybden i enkelte emner, og det legges mer vekt på problemløsning og matematisk kompetanse. Hva dybdelæring og matematisk kompetanse betyr i dagens skole vil utredes senere i dette kapitlet.

2.2 Dybdelæring

Fra Utdanningsdirektoratets nettside leser vi følgende om dybdelæring:

> *Vi definerer dybdelæring som det å gradvis utvikle kunnskap og varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag og mellom fagområder. Det innebærer at vi reflekterer over egen læring og bruker det vi har lært på ulike måter i kjente og ukjente situasjoner, alene eller sammen med andre.* (Utdanningsdirektoratet, 2019)

En varig forståelse av begreper, metoder og sammenhenger i fag er viktig i matematikk. Dersom forståelsen er varig og eleven ser sammenhenger, vil større deler av matematikken gi mening. I møte med ny kunnskap vil da elever med en varig, konseptuell forståelse, evne å gjøre koblinger til eksisterende kunnskap. I forhold til dybdelæring oppfordrer utdanningsdirektoratet skoler og lærere til å stille seg følgende spørsmål: «På hvilke måter jobber vi for at elevene og lærlingene kan reflektere over egen læring?» (Utdanningsdirektoratet, 2018). Hvilke læringsaktiviteter, oppgaver og undervisningsmetoder tas i bruk i matematikken som legger til rette for dybdelæring? I tillegg til å reflektere over egen læring, legger fagfornyelsen vekt på at elevene skal bli *«gode problemløsere og forstå hvordan matematikk henger tett sammen med andre fag»* (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 1). På den måten får elevene forståelse for hvorfor matematikken er relevant og viktig, noe som igjen spiller inn på motivasjonen (Niss, 1996).

Kompetanseoppnåelse forutsetter dybdelæring (Ludvigsen, 2015). For at elevene skal oppnå en dyp forståelse av matematikken trenger vi å jobbe med deres matematiske kompetanse. Skolematematikken blir noen ganger portrettert som en slags konkurranse mellom kunnskap og evner (Kilpatrick, 2014), og dette forsøker ulike matematiske kompetanserammeverk å endre. Jeg skal nå gå mer inn på hva matematisk kompetanse er, med utgangspunkt i Ludvigsen-utvalgets hovedutredning NOU 2015:8 som legges til grunn for fagfornyelsen, samt kompetanserammeverket til Kilpatrick et al.(2001).

2.3 Matematisk kompetanse

Ludvigsen-utvalget har stått sentralt i arbeidet med fagfornyelsen, og i sin hovedutredning NOU 2015:8 *Fremtidens skole* har de blant annet vurdert hvilke kompetanser elevene vil trenge i fremtidens samfunns- og arbeidsliv (Ludvigsen, 2015, s. 17). Her blir begrepet *kompetanse* definert på følgende måte:

> *Kompetanse betyr å kunne mestre utfordringer og løse oppgaver i ulike sammenhenger og omfatter både kognitiv, praktisk, sosial og emosjonell læring og utvikling, inkludert holdninger, verdier og etiske vurderinger. Kompetanse kan utvikles og læres og kommer til uttrykk gjennom hva personer gjør i ulike aktiviteter og situasjoner.*
>
> *Kunnskaper, ferdigheter, holdninger og etiske vurderinger er forutsetninger for og deler av det å utvikle kompetanse. For å vise kompetanse må elevene ofte bruke ulike kunnskaper, ferdigheter og holdninger i sammenheng.* (Ludvigsen, 2015, s. 19)

Kompetanse er en sammensetning av både det kognitive, praktiske og emosjonelle, og blir dermed et komplekst begrep. I tillegg er kompetansebegrepet fagspesifikt (Ludvigsen, 2015), og det å måle kompetanse i for eksempel norsk vil ikke være det samme som å måle kompetanse i matematikk. Ifølge rammeverket fra det danske KOM-prosjektet (Kompetanse og matematikklæring) består matematisk kompetanse i å ha kjennskap til, å forstå, utøve, anvende og kunne ta stilling til matematikk og matematikkvirksomhet i ulike sammenhenger hvor matematikk inngår (Niss, et al., 2002, s. 43). Ut ifra dette utpeker Niss et al.(2002) åtte sentrale matematiske kompetanser; *representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse, hjelpemiddelkompetanse, resonnementskompetanse, modelleringskompetanse, programbehandlingskompetanse og tankegangskompetanse* (Niss, et al., 2002, s. 45). Her handler de fire første hovedsakelig om det å bruke *språk* og *redskaper* i matematikken, mens de fire siste omhandler det å *spørre og svare i, med og om* matematikk. *Representasjonskompetansen* kommer jeg tilbake til senere i dette kapitlet. Det kompetanserammeverket som derimot ellers vil spille en viktig rolle i denne oppgaven, er trådmodellen til Kilpatrick, Swaffort & Findell (2001). Deres rammeverk innebærer fem enkeltområder som er tvinnet sammen, og som trenger å vokse *sammen* for å utvikle den matematiske kompetansen. Det er også dette rammeverket som Ludvigsen-utvalget har tatt utgangspunkt i når det gjelder beskrivelse av dybdelæring i matematikk (Ludvigsen, 2015, s. 57), og dermed også fagfornyelsen.

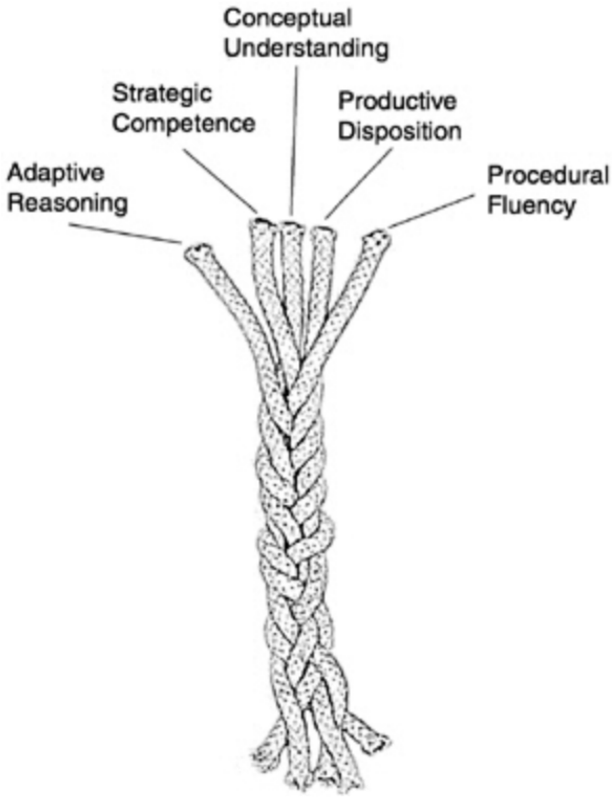
2.3.1 Rammeverket til Kilpatrick et al. (2001)

Kompetanse er, som nevnt, et komplekst begrep. Innen matematikken er det flere områder som krever ulike evner, og det blir vanskelig å komme med en entydig definisjon på hva det vil si å være matematisk kompetent. Kilpatrick et al.(2001) anerkjenner dette, og skriver følgende:

"Recognizing that no term captures completely all spects of expertise, competence, knowledge, and facility in matematics, we have chosen mathematical profiency (matematiske ferdigheter) *to capture what we believe is necessary for anyone to learn mathematics successfully"* (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, s. 116)

Rammeverket til Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som en sammenfletning av fem enkeltområder som er: *Forståelse* (conceptual understanding), *beregning* (procedural fluency), *anvendelse* (strategic competence), *resonnering* (adaptive reasoning) og *engasjement* (productive reasoning). De norske oversettelsene er hentet fra Ludvigsen-utvalgets hovedutredning NOU2015:8 (Ludvigsen, 2015, s. 57). Ettersom dette rammeverket spiller en viktig rolle i dagens skole gjennom fagfornyelsen, ble det et naturlig valg for denne oppgaven. I tillegg er jeg spesielt interessert i å se på forskjellene mellom begrepsmessig forståelse og beregningskompetanse, samt merke meg elevenes engasjement for temaet ulikheter, dermed ble det klart at rammeverket til Kilpatrick et al.(2001) var et godt utgangspunkt.

Rammeverket kan fremstilles som en sammenfletning av fem tråder, hvor hver tråd representerer en komponent (se Figur 1).



Figur 1: Et rammeverk for matematisk kompetanse (Kilpatrick et al., 2001)

De fem trådene må alle utvikles og flettes sammen for en solid og slitesterk matematisk kompetanse, og i skolen er det viktig at alle områdene får tilstrekkelig fokus. Det er hvordan lærere presenterer og kobler sammen de ulike områdene som er en nøkkelfaktor i elevenes forståelse av matematikk og kompetanse i faget (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Jeg vil nå gå mer inn på hver av de fem trådene, og hva de representerer.

Forståelse (conceptual understanding)

Forståelse handler om en integrert og funksjonell forståelse av matematiske ideer. Eleven forstår *hvorfor* en matematisk idè er viktig, og i hvilke sammenhenger den er nyttig (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Fremfor å pugge isolerte matematiske fakta, eller stegene i gitte metoder, vil en begrepsmessig tilnærming legge mer vekt på en dypere forståelse av matematikken. Ved en god *forståelse* av matematikken vil eleven også evne å forstå og benytte ulike representasjoner, og veksle mellom disse der det lønner seg (Ludvigsen, 2015). Begrepsmessig forståelse er essensielt når ny kunnskap skal kobles på eksisterende kunnskap, og elevene skal se sammenhengen i matematikken.

Et eksempel på en slik forståelse innen algebra, og ulikheter spesielt, er å kunne forstå hva en variabel er, og hva røttene i et annengradspolynom forteller oss. I tillegg vil en begrepsmessig forståelse av ulikheter innebære en forståelse av ulikhetstegnet, og hva det har å si for mengden av løsninger. Ved å se på grafen til en funksjon og identifisere eventuelle nullpunkter, vil elever med begrepsmessig forståelse av ulikhetstegnet vite når denne funksjonen for eksempel er større enn eller lik null.

Beregning (procedural fluency)

Beregningskompetansen handler om kjennskapen til og kunnskapen om prosedyrer (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Dette er særlig viktig i skolematematikken, da man stadig lærer nye algoritmer og prosedyrer som gjør det enklere, og mulig, å løse matematiske problem. En god beregningsevne vil gjøre eleven i stand til å bruke de lærte prosedyrene på en effektiv, fleksibel og korrekt måte. I tillegg vil eleven vite *når* en gitt prosedyre er nødvendig eller smart å bruke fremfor en annen (Ludvigsen, 2015).

I algebra er evnen til beregning essensiell. Under arbeid med ulikheter, for eksempel, må eleven stadig bestemme seg for hvilken prosedyre som er mest hensiktsmessig og effektiv. I møte med en gitt algebraisk ulikhet, er det da best å faktorisere, for eksempel ved bruk av abc-formelen, eller lønner det seg heller å teste for ulike x-verdier? Vil det være viktig å oppheve brøken, eller bør den helst stå som den er? Fra Kieran har vi at *transformativ* algebra er den regel-baserte matematikken som ofte går på automatikk (Kieran, 2004). En god evne til beregning vil hjelpe eleven å ta effektive og kloke valg av prosedyre.

Kilpatrick et al.(2001) påpeker at matematikkundervisningen i USA de siste 25 årene har hatt et overdrevet fokus på denne beregningskompetansen på bekostning av de andre kompetanseområdene. Også Kieran (2004) hevder at den transformative algebraen har dominert i lærebøkene, på bekostning av begrunnelser og bevis. Dette kan føre til at elevene får en instrumentell forståelse av matematikken, og ikke evner å se de viktige sammenhengene. Dette kan også tenkes å være tilfellet i Norge når vi ser på blant annet norske elevers algebraprestasjoner, som jeg kommer tilbake til senere i kapitlet. Oppsummert viser norske elever manglende konseptuell forståelse innen matematikk, og særlig algebra, og en grunn kan være et overdrevet fokus på å lære algoritmer og prosedyrer (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000).

Anvendelse (strategic competence)

Kompetanseområdet i matematikken som her kalles *anvendelse* handler om evnen til å *formulere* matematiske problem, presentere dem og deretter løse dem (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Sitert fra hovedutredningen til Ludvigsen et al. (2015) innebærer det å kunne *«gjenkjenne og formulere matematiske problemer, representere dem på ulike vis, utvikle en løsningsstrategi og vurdere hvor rimelig løsningen er»* (Ludvigsen, 2015, s. 57). Hele prosessen fra når en elev møter et problem, til å løse problemet, og deretter vurdere løsningens legitimitet, inngår her. I hverdagslivet vil man ofte få bruk for å kunne anvende egne matematikkunnskaper for å løse gitte problemer. Det kan være i behandling av sin private økonomi, eller i vurdering av ulike statistiske fremstillinger, for eksempel i media. I matematikklasserommet vil også evnen til å anvende matematikken være essensiell da det hjelper elevene å se sammenhenger, og til å bruke det de har lært fleksibelt.

I algebra vil dette kompetanseområdet være viktig. Matematiske problem i form av tekstoppgaver kan ofte omformuleres til en algebraisk likning eller ulikhet. Elevene må da bruke sine kunnskaper aktivt, og anvende de rette prosedyrene for å løse problemet.

Resonnering (adaptive reasoning)

Resonnering handler om å kunne tenke logisk og se sammenhengen mellom ulike generelle konsepter og tilhørende spesifikke situasjoner (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). I å tenke logisk innebærer det å kunne følge med i et logisk resonnement, og samtidig vurdere gyldigheten av dette (Ludvigsen, 2015). Elevene skal evne å forsvare egne valg. Hvor *anvendelse* er viktig for å løse problemet, er god *resonneringsevne* viktig for å bestemme legitimiteten til den valgte strategien.

I møte med algebra, og ulikheter spesielt, vil elevens evne til resonnering være nødvendig for å knytte temaet sammen med andre områder i matematikken og hverdagslivet. Resonnering innebærer å se og begrunne sammenhenger, og er samtidig viktig når ny kunnskap skal kobles på eksisterende kunnskap (Ludvigsen, 2015). Algebra forstås ofte som en generalisering av aritmetikken, og elevene vil trenge gode resonneringsferdigheter for å lære seg algebra på en måte som kobler seg på de matematiske kunnskapene de allerede har.

Engasjement (productive reasoning)

Engasjement på videregående nivå ligger i stor grad i det å stille seg åpen, nysgjerrig og undersøkende til algebraiske problemstillinger, strukturer og uttrykk. Det gjelder å være åpen for å utforske det algebraiske landskapet og å være villig til å akseptere at en gjerne må investere god tid og gjøre en innsats for å bli kjent med de begrepene det arbeides med. Et metakognitivt perspektiv på algebraisk tenkning, med andre ord en bevissthet hos elevene om deres egne tankeprosesser, står sentralt her. Da handler arbeid med matematikk ikke bare om noe fremmed, men om samspillet mellom ens egen kognitive utvikling og matematikkfaget.

2.3.2 Instrumentell vs. relasjonell forståelse

Skemp (1976) presiserer at flere ord kan ha ulik betydning ut ifra hvem du snakker med, og hvilken forståelse vedkommende har av dette ordet. Fotball, for eksempel, betyr for oss i Norge en rund ball og spilles med to mål på banen. I USA innebærer «football» en avlang ball som man for det meste bruker hendene for å fange. På samme måte kan ordet *forstå* bety forskjellige ting for forskjellige elever, og vi skiller da mellom en *instrumentell* forståelse og en *relasjonell* forståelse. En elev kan påstå å ha *forstått* hvordan han regner med ulikheter, i den forstand at han *kan* alle de algebraiske manipulasjonene som trengs for å få x alene på den ene siden, og dermed finne en løsning hvor han kan sette to streker under svaret. Han har en instrumentell forståelse for ulikheter, og vet hvordan han håndterer dem. Men er en instrumentell forståelse nok? Skemp skriver følgende i sin artikkel «Relational Understanding and Instrumental Understanding»: *«Instrumental understanding I would until recently not have regarded as understanding at all»* (Skemp, 1976, s. 2). Likevel er det den instrumentelle forståelsen som dominerer i matematikkundervisningen og i mange prøvesituasjoner, og for elevers mestringsfølelse kan det også være tilstrekkelig i mange tilfeller.

En instrumentell tilnærming til matematikken har flere fordeler, ved at det er enklere å forstå, lettere å lære vekk, mindre tidkrevende og passer godt inn i vurderingsformene. Samtidig er de fleste lærere enige i at det beste for elevene vil være en relasjonell forståelse for fagstoffet, og fordelene her er flere og viktigere. Ved å ha en relasjonell forståelse av matematikk, som innebærer å forstå de bakenforliggende årsakene til *hvorfor* visse formler fungerer, og *hvorfor* kjente algebraiske manipulasjoner fungerer, vil man for eksempel lettere kunne overføre denne kunnskapen til nye typer oppgaver. Det vil også være lettere å huske en formel dersom en har en relasjonell forståelse for formelen, og kunnskapen vil sitte lengre.

2.4 Algebra

Algebra blir ofte sett på som generalisert aritmetikk, og Vygoskij uttrykker det på følgende måte:

> *Written language is to oral language what algebra is to arithmetic* (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000, s. 7)

Algebra gjør det mulig å kommunisere matematikk, og bruke matematikken på en fleksibel måte. Pedersen peker på det å mestre algebra som en forutsetning for å mestre matematikk på høyere nivå (Pedersen, 2013), noe som understreker nytteverdien. Også i møte med de andre realfagene, som kjemi, fysikk og biologi, vil algebraferdigheter være et viktig verktøy. Å regne ut fart og energi, eller halveringstid, uten algebraferdigheter vil være vanskelig og tidkrevende, om ikke umulig. Til tross for algebraens høye nytteverdi, presterer norske elever generelt dårlig i algebra (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000; Naalsund, 2012; Pedersen, 2013). Dette delkapitlet tar for seg algebra som et problemområde for mange elever, samt hva som er viktig for å utvikle en solid, algebraisk kompetanse.

2.4.1 Elevers prestasjoner i algebra

For å måle elevers prestasjoner i algebra har vi de internasjonale undersøkelsene PISA og TIMSS. Undersøkelsen TIMSS Advanced (Trends in Mathematics and Science Study) er en trendstudie som baserer seg på læreplanene i de deltakende landene (Utdanningsdirektoratet, 2015). Innen matematikk testes videregåendeelever i de tre emneområdene kalkulus, geometri og algebra. TIMSS Advanced har blitt gjennomført tre ganger, hvor den siste var i 2015. Da resultatene ble kunngjort, uttalte Liv Sissel Grønmo, prosjektleder for TIMSS Advanced 2015, følgende til Dagsavisen:

> *Vi var dårlige sist gang dette ble målt på ungdomstrinnet og i videregående skole. Resultatene for TIMSS 2015 viser at det har gått fra vondt til verre. Norske elever er alarmerende dårlig i algebra 2015* (Fladberg, 2016)

Fra TIMSS-studier de siste 20 årene ser vi at norske elevers svake prestasjoner i algebra er et problem i norsk skolematematikk. Sammenlignet med Frankrike, Sverige, Slovenia, Russland og USA er det Norge og Sverige som presterer svakest i algebra (Grønmo & Hole, 2016). Grønmo & Hole roper et varsko når det gjelder algebraens plass i norsk skole og lærernes kunnskaper (Grønmo & Hole, 2016, s. 39), mens flere lærere setter spørsmålstegn ved nytten av dette emnet i skolen (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000). Årsaken til svake algebraprestasjoner er sammensatt, men det er enighet om at utfordringene for elevene blant annet ligger i den manglende grunnleggende *forståelsen* av regneoperasjonene som utføres på symbolene, uttrykkene og ligningene. Undervisningen preges av prosedyreforståelse, uten å bygge på tilhørende konsepter og ideer (Switzer, 2014). Samtidig sliter elevene med å se sammenhengen mellom algebra og resten av matematikken, for eksempel tallforståelse og tallregning (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000).

I barneskolen er det aritmetikken som tar mest plass i matematikkundervisningen, og overgangen til algebra kan være krevende. Elevene må gjøre flere justeringer i denne overgangen, både i måten å tenke på og måten å arbeide på (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). En del av problemet med elevenes algebraferdigheter kan være en for stor vektlegging av prosedyrer (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000). Fra kompetanserammeverket til Kilpatrick et al.(2001) vet vi at den konseptuelle forståelsen og evnen til resonnering og anvendelse må utvikles *sammen med* det prosedurale, som er evnen til beregning. Hva som da blir viktig å legge vekt på, og være klar over, må forstås i sammenheng med hva som kjennetegner algebraisk kompetanse.

2.4.2 Algebraisk kompetanse

Algebra er ikke bare en måte å fremstille matematikk på, men det er også en måte å tenke på (Carraher & Schliemann, 2016). Å tenke algebraisk forutsetter ikke nødvendigvis kunnskap om algebra, og de fleste sier seg enige i at en algebraisk måte å tenke på oppstod lenge før det formelle, algebraiske språket ble til (Carraher & Schliemann, 2016). I videregående matematikk er det derimot viktig å beherske det formelle algebraiske språket på en fleksibel måte, og den algebraiske tenkingen må da kobles på strukturene og formalitetene som læres. Elevenes algebraiske kompetanse vil være avhengig av flere aspekter, og noen av dem skal jeg trekke fram her.

Genererende, transformerende og global-/metanivå

Basert på forestillingen om at skolealgebra er en *aktivitet*, peker Kieran på at denne aktiviteten kan være en av tre typer: *genererende* (generational activity), *transformativ* (transformational) og *global-/metanivå* (global/meta-level) (GTG-modellen) (Kieran, 2004). De genererende aktivitetene innebærer det å forme uttrykk, likninger og ulikheter. Det handler om å representere og tolke situasjoner, enheter, strukturer og liknende (Kieran, 2004, s. 23). Den transformerende aktiviteten er den regelbaserte, som blant annet handler om å manipulere uttrykk, faktorisere og substituere. De aktivitetene som er på global-/metanivå er de aktivitetene hvor algebra er et nyttig verktøy, men som ikke bare er algebraiske av karakter. Dette involverer blant annet problemløsning, modellering og bevis (Kieran, 2004, s. 24). Av disse tre påpeker Kieran (2004) videre at lærebøker tradisjonelt har fokusert mest på den transformerende aktiviteten med reglene som må følges, og de instrumentelle ferdighetene. Elevene lærer seg godt hvordan en algoritme skal brukes, og hvilke regler som gjelder – kanskje på bekostning av begrepsdanningen?

Forholdet mellom prosedyreflyt og konseptuell forståelse

I sin studie av utviklingen av algebraiske ferdigheter trekker van Stiphout, Drijvers & Gravemeijer fram to aspekter som viktige; forholdet mellom prosedyreflyt og konseptuell forståelse, og symbol- og struktursans (van Stiphout, Drijvers, & Gravemeijer, 2013).

Prosedyreflyt er i rammeverket til Kilpatrick et al.(2001) evnen til beregning, og trenger å utvikles sammen med elevenes konseptuelle forståelse. Fra Skemp (1976) har vi til sammenligning forskjellen på instrumentell og relasjonell forståelse, hvor en instrumentell forståelse er kunnskap om hvordan en algoritme gjennomføres, mens en relasjonell forståelse innebærer både vissheten om hvordan og hvorfor. Prosedyreflyten, eller evnen til beregning, og konseptuell forståelse må gå hånd i hånd (van Stiphout, Drijvers, & Gravemeijer, 2013), og begge deler er viktig i utviklingen av matematisk og algebraisk kompetanse.

Hvordan de henger sammen har det dog vært uenigheter om. Uenighetene handler om hvorvidt en instrumentell, prosedural tilnærming etter hvert fører til en relasjonell forståelse, eller om en relasjonell tilnærming med fokus på forståelse også vil føre med seg instrumentelle ferdigheter. Rittle-Johnson, Schneider & Star (2015) argumenterer for at det er en bidireksjonal relasjon mellom de to (Rittle-Jonson, Schneider, & Star, 2015). I sin forskning på dette konkluderer de med følgende:

> *Overall, both longitudinal and experimental studies indicate that procedural knowledge leads to improvements in conceptual knowledge, in addition to vice versa. The relations between the two types of knowledge are bidirectional. It is a myth that it is a "one-way*

street" from conceptual knowledge to procedural knowledge (Rittle-Jonson, Schneider, & Star, 2015, s. 591)

Et tradisjonelt syn på matematikkundervisningen i Norge har vært et å jobbe mest med den redskapsorienterte matematikken, altså manipuleringen, prosedyrene og det instrumentelle (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000). Kilpatrick et al. (2001) hevder også at det, i løpet av de siste 25 årene, i USA har vært et overdrevet fokus på prosedyreflyt på bekostning av de andre «trådene» i rammeverket til Kilpatrick et al.(2001) (se kapittel 2.3.1). Brekke, Grønmo & Rosèn (2000) påpeker at den overdrevne fokuseringen på regler, formler og algoritmer i algebra går på bekostning av elevenes begrepsdannelse. Det fører videre til at elevenes holdninger til emnet påvirkes, og algebra ses på som *«et formelt, isolert system, der symbolmanipulasjon og regler dominerer»* (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000, s. 3). Undervisningen vil dra nytte av å ta i bruk visualisering og flere representasjoner (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016) for å øke elevenes forståelse, og muligens endre holdningene om algebra som et isolert system. Dette kommer jeg mer tilbake til i kapittel 2.5, om elevers bruk av ulike representasjoner.

Prosedyreflyt og instrumentell forståelse er viktig og effektivt. I emnet algebra vil det være viktig for elever å kunne gjennomføre ulike prosedyrer på en fleksibel og effektiv måte, og det vil føre til gode prestasjoner i flere av dagens summative vurderingsformer, som eksamen og prøver. Samtidig vil en konseptuell forståelse gi mer dybde og varig forståelse. Det er mer utfordrende for matematikklæreren å undervise, og det krever mer innsats hos elevene, men resultatet er en mer solid matematisk kompetanse (van Stiphout, Drijvers, & Gravemeijer, 2013).

Symbol- og struktursans

I møte med algebra peker van Stiphout, Drijvers & Gravemeijer (2013) også på symbol- og struktursans som et viktig utgangspunkt. De tar utgangspunkt i Arcavi's forklaring på symbolsans som noe komplekst som ikke bør defineres, men heller forklares (Arcavi, 1994). Det handler om en kjennskap til symboler og uttrykk som innebærer å se sammenhenger og forhold. For eksempel trekker Arcavi frem likningen

$$\frac{2x+3}{4x+6} = 2$$

Et kjennetegn på symbolsans vil her være å legge merke til at telleren er halvparten av nevneren, og at brøken derfor aldri vil bli lik 2. Arcavi kaller det å «lese mening inn i symbolene», og hevder at det krever en form for matematisk modenhet å motstå den fristelsen det er å angripe likningen med algebraisk manipulasjon (Arcavi, 1994, s. 27). I møte med algebraiske uttrykk i likninger og ulikheter vil elever ofte ty til en algebraisk manipulasjon av uttrykket, som vi skal se eksempler på senere i dette kapitlet, under tidligere forskning (Tsamir & Almog, 2000; Tsamir & Bazzini, 2004; Tsamir, Tirosh, & Tiano, 2004; Naalsund, 2012). Å angripe et algebraisk uttrykk blindt ved manipulasjon viser en svak symbolsans, som er en viktig del av algebraisk kompetanse.

Struktursans er definert av Linchevski & Livneh til å være evnen til å bruke likeverdige strukturer av et uttrykk på en fleksibel og kreativ måte (Linchevski & Livneh, 1999, s. 191). I algebra vil dette innebære å gjenkjenne og manipulere uttrykket på den mest effektive måten, som utnytter uttrykket på best mulig måte (van Stiphout, Drijvers, & Gravemeijer, 2013). Kieran peker på elevers vanskeligheter ved å gjenkjenne og bruke *strukturer* som et av hovedproblemene i møte med algebra (Kieran, 2014). Overgangen fra aritmetikk til algebra innebærer blant annet å kjenne strukturen i matematikken, og ikke bare finne svaret. Det å fokusere på forhold og strukturer, og ikke bare på å kalkulere et svar, trekkes også frem som en forutsetning for å utvikle et algebraisk tankesett i artikkelen *«Algebraic thinking in the early grades: What is it»* (Kieran, 2004). Videre vil et fokus på operasjoner så vel som deres inverse være viktig (Janvier, 1987), noe som også kan relateres til struktursansen.

2.5 Elevers bruk av ulike representasjoner

Bruk av ulike representasjoner (MRs, for Multiple Representations) handler om å kombinere ulike matematiske fremstillinger, som figur, graf, symboler, formler og lignende. Dette vil i flere tilfeller være nødvendig for å visualisere matematiske objekter. Duval (2006) fremhever hvordan matematikk skiller seg fra andre vitenskapelige områder når det gjelder representasjoner og symboler. I motsetning til ulike fenomener innen biologi og fysikk, som kan observeres ved hjelp av instrumenter, er matematiske objekter kun tilgjengelige ved hjelp av symboler og semiotiske representasjoner (Duval, 2006). The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) peker på evnen til å skifte mellom ulike matematiske representasjoner som en kritisk og viktig evne innen det å *lære* og *gjøre* matematikk. Også Boaler et al.(2016) bekrefter viktigheten av visualisering innen matematikk, og kritiserer hvordan visuelle fremstillinger av matematiske objekter ofte blir sett på som et svakhetstegn av både elever og lærere. Tradisjonelt sett har visuelle fremstillinger blitt mye brukt for å hjelpe de elevene som sliter. Det viser seg derimot, fra forskning på hjerneaktivitet og undervisningsmetoder, at bruk av flere representasjoner skaper mer forståelse, og er en nyttig og effektiv tilnærming til matematikken (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016). Når MRs integreres i undervisningen på en god måte, vil det føre til en dypere forståelse hos elevene, og evnen til å se flere sammenhenger innen matematikken (Bicer, 2021; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Fra rammeverket til Niss et al.(2002) innebærer representasjonskompetansen det å kunne *forstå* og *benytte seg av* forskjellige representasjoner av matematiske objekter (Niss, et al., 2002, s. 56). Det matematiske språket, da særlig det algebraiske språket, er i stor grad bygget opp av abstrakte enheter og representasjoner. For at elevene skal kunne bruke dette språket på en korrekt og hensiktsmessig måte, er evnen til å håndtere ulike representasjoner essensiell. Janvier (1987) påpeker at det spiller en viktig rolle hvilken retning man går i overgangen fra en representasjonsform til en annen. Eksempelvis vil det ikke være det samme å gå fra formel til tabell, som fra tabell til formel (Janvier, 1987), og derfor vil det være viktig for elevene å arbeide begge veier, både fra formel til tabell, og tilbake igjen. Det vil kreve ulike løsningsstrategier å fleksibelt kunne veksle mellom ulike representasjonsformer, og dermed er det viktig at elevene får arbeide på tvers av disse.

Fra tidligere forskning innen algebra, leser vi at elever ofte er *«lost in translation»* i overgangen fra en representasjon til en annen (Adu-Gyamfi, Stiff, & Bossè, 2012). Elevene har gjerne god kontroll på både grafiske og algebraiske fremstillinger, men det er *overgangen* fra den ene til den andre som de sliter med. Justnes (2018) argumenterer for en systematisk undervisning om relasjonen mellom ulike representasjoner som essensiell i utviklingen av god begrepsforståelse i matematikk (Justnes, 2018). Som påpekt av Boaler et al.(2016) gjelder ikke dette bare i begynneropplæringen, men for elever i alle aldre. Flere ulike tilnærminger og visualiseringer av algebraiske objekter vil gi en mer solid matematisk kompetanse.

2.6 Ulikheter

I denne studien har jeg valgt å fokusere på det algebraiske temaet ulikheter. En matematisk, algebraisk kompetanse innen ulikheter vil innebære en dyp, konseptuell forståelse av ulikhetstegnet, og evnen til å representere en ulikhet på flere måter. Som tidligere nevnt, hevder Rosalin Tanner at matematikk *begynner* med ulikheter (Tanner, 1961). Mennesker vil alltid ha en oppfatning av større enn, mindre enn og lik, og det er en sans vi benytter oss av i hverdagen.

Nytteverdien til ulikheter står sterkt, men forskning viser likevel at dette temaet er noe elever sliter med. En god del av forskningen jeg har tatt utgangspunkt i er utført av professor ved universitetet i Tel Aviv, Pessia Tsamir, ofte i samarbeid med andre matematikere fra andre land. Jeg vil trekke fram to funn som går igjen i flere av prosjektene: 1) Elevene behandler ulikheter som likninger, og 2) algebraisk manipulasjon er foretrukket metode.

2.6.1 Elevene behandler ulikheter som likninger

Tsamir & Bazzini har undersøkt hvordan elever møter ulikheter som bare har én verdi som løsning, og ikke et løsningsområde som man oftest møter (Tsamir & Bazzini, 2004). Et av deres hovedfunn er at elevene har en forestilling om at det å løse en ulikhet er det samme som å løse en likning. Også Vaiyavutjamai & Clements peker på at elevene behandler ulikheter som likninger, og blindt gjør det samme på begge sider (Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Dette hevder det tyder på at elevene har en instrumentell forståelse av ulikheter. Tsamir & Almog tar for seg måten elever ofte tenker om ulikheter, og ser på hvilke løsningsstrategier de oftest velger, samt hvilke vanskeligheter de møter. De peker på at den strukturelle likheten mellom likninger og ulikheter gir en intuitiv følelse av at de skal løses på samme måte, og at dette er lurt å diskutere med elevene sine for å sikre en dypere forståelse og unngå misoppfatninger (Tsamir & Almog, 2000).

2.6.2 Algebraisk manipulasjon er foretrukket metode

Tsamir & Almog så i sin forskning på elevenes løsningsstrategier at det var tre strategier som ble brukt: *algebraisk manipulasjon, tegne graf* og *tallinje*. Noen av disse ble også brukt i kombinasjon. Av disse tre var det helt klart *algebraisk manipulasjon* som ble mest brukt, og elevene foretrakk å manipulere uttrykkene ved å gange/dele med det samme på begge sider, og flytte over konstantledd i sin løsning. Interessant nok var det også denne metoden som gav flest feil, blant annet fordi elevene «glemte» å ta for seg ekskluderte verdier, eller brukte feil fortegn. Forfatterne foreslår her at en grafisk tilnærming vil gi elevene en visuell forståelse av løsningene, og dermed hjelpe dem å tolke resultatene (Tsamir & Almog, 2000). Matt Switzer har sett på sine egne elever, og lagt merke til at de sliter med å forstå sammenhengen mellom en ulikhet og tilhørende grafisk fremstilling (Switzer, 2014). Når elevene utelukkende benytter seg av algebraisk manipulasjon for å løse en ulikhet, kan dette tyde på manglede struktur- og symbolsans. I tillegg viser det viktigheten av å hjelpe elevene sine å benytte seg av ulike representasjoner i sine strategier. Generelt i ulikheter legges det mest vekt på *«hvordan* løser vi denne», fremfor *«hvorfor* løser vi det på denne måten?» (Tsamir & Almog, 2000). Spørsmål som *hvordan* tyder på en instrumentell tilnærming til fagstoffet, og bidrar i mindre grad til elevers forståelse, mens spørsmål som *hvorfor* viser et ønske om en mer relasjonell forståelse som vi i norsk skole burde strekke oss etter.

Hvordan kan lærere da legge til rette for at elevene oppnår en relasjonell forståelse for ulikheter? Ndlovu har gjennomført et designforsøk for å undersøke elevers forståelse av kvadratiske ulikheter i et GC (Graphing Calculator) – mediert miljø. Resultatene her viste at det å benytte seg av både en algebraisk og tilhørende grafisk tilnærming til ulikhetene var en effektiv læringsstrategi som førte til forståelse (Ndlovu, 2019). Elevene fikk muligheten til å gjøre koblinger mellom den algebraiske og grafiske fremstillingen, og på den måten fikk de en mer konseptuell forståelse av temaet. Også Switzer peker på viktigheten av å lære elevene sammenhengen mellom den algebraiske ulikheten og den grafiske fremstillingen, men utdyper at dette er noe elevene sliter med, og må trene på (Switzer, 2014).

3. Metode

Metode er veien frem til et bestemt mål (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 29), og i dette kapitlet vil jeg beskrive denne veien. Jeg har i denne studien benyttet meg av datamateriale fra en matematikk R1-klasse, hvor elevene først løste et oppgavehefte om matematiske ulikheter, og deretter ble tre av dem intervjuet, med utgangspunkt i deres løsninger. Jeg vil i de kommende avsnittene gå dypere inn på detaljene rundt datainnsamlingsprosessen, samt diskutere de valgene jeg har tatt. Studiens validitet, reliabilitet og etiske betraktninger i forhold til prosjektet vil bli vurdert avslutningsvis**.**

3.1 Kvalitativt forskningsdesign

Kvalitativ forskning tar utgangspunkt i menneskers tanker og ytringer, og gir muligheten til å følge opp interessante spor som måtte dukke opp underveis (Stigum Gleiss & Sæther, 2021). Det vil aldri være mulig å gå helt i dybden på menneskelige erfaringer og tanker, og forstå dem fult ut, men et kvalitativt forskningsdesign vil likevel gi rom for mer dybde enn kvantitative studier (Patton, 2014)**.** I tillegg til å gå i dybden på elevers kompetansebruk, er det også et ønske ved denne studien å se etter bredden av løsningsstrategier i klassen det forskes på. Patton (2014) snakker om en trade-off mellom bredde og dybde som er viktig å ta hensyn til i et kvalitativt forskningsdesign. Hvorvidt en studie går i dybden eller bredden er avhengig av blant annet hvilke ressurser forskeren har tilgjengelig, hvor god tid hun har samt interessen og engasjementet til de involverte (Patton, 2014).

I valg av metodisk tilnærming ble oppgavebaserte intervjuer først vurdert, enten av én og én elev, eller parvis. Jeg ønsket å tilegne meg en dypere forståelse for elevenes løsningsstrategier og kompetanse innen ulikheter, samt forstå, så godt det lar seg gjøre, hvordan de tenker matematisk. Oppgavebaserte intervjuer er en hensiktsmessig tilnærming dersom en ønsker å observere og beskrive intervjuobjektets kunnskap og læring (Goldin, 2000, s. 520), og virket som et logisk metodevalg. Tiden og utvalget tatt i betraktning førte derimot til at jeg valgte en annen tilnærming. For å øke generaliserbarheten i resultatene anså jeg det som fordelaktig å samle data fra en hel matematikkklasse, samt intervjue noen av disse elevene for å bidra til mer dybde. Valget falt på en trade-off mellom bredden i hele klassens løsninger og dybden i noen elevers utsagn (Patton, 2014). For å svare på problemstillingen valgte jeg å designe et oppgavehefte innen temaet ulikheter, som ble løst av en hel matematikk R1-klasse. Ut ifra løsningene deres, valgte jeg ut tre elever som jeg i etterkant intervjuet med utgangspunkt i deres løsninger.

3.1.1 Utvalg

Utvalget består av 23 elever i en matematikk R1-klasse på en skole utenfor Oslo, hvor tre av disse ble valgt ut som intervjuobjekter i etterkant. Klassen i sin helhet kan ses på som et bekvemmelighetsutvalg (Jacobsen, 2005), ettersom jeg kontaktet en skole jeg tidligere har vært hos i løpet av en praksisperiode. De tre intervjuobjektene derimot, vil jeg beskrive som et skjønnsmessig utvalg, da deres elevbesvarelser viste seg interessante for meg, og jeg ønsket å finne ut mer (Jacobsen, 2005). For å svare på problemstillingen og forskningsspørsmålene så jeg det hensiktsmessig med et skjønnsmessig utvalg av intervjuobjekter, ettersom et tilfeldig utvalg av elever kunne gitt meg overvekt av informasjon som jeg ikke var ute etter, eller gitt meg for lite informasjon.

3.1.2 Bruk av oppgavehefter som metode

Oppgaveheftene er egendesignede oppgaver som handlet om ulikheter, og fungerte som en test av elevenes løsningsstrategier og evner. Jeg ville få et mer helhetlig og bredt inntrykk av den utvalgte klassen, muligens peke på noen trender som viste seg å gå igjen, og gi et tydeligere bilde av situasjonen enn tre elevintervjuer alene kan gi. For å få et mer pålitelig inntrykk av noe så sammensatt som elevenes matematiske kompetanse og misoppfatninger, trengs det flere indikatorer (Kleven, 2014). En slik diagnostisk kartleggingsprøve i form av et oppgavehefte vil bidra til slike indikatorer (Brekke, 2002). I tillegg vil oppgaveheftene gi noen indikasjoner på hva som er interessante spørsmål å stille intervjuobjektene.

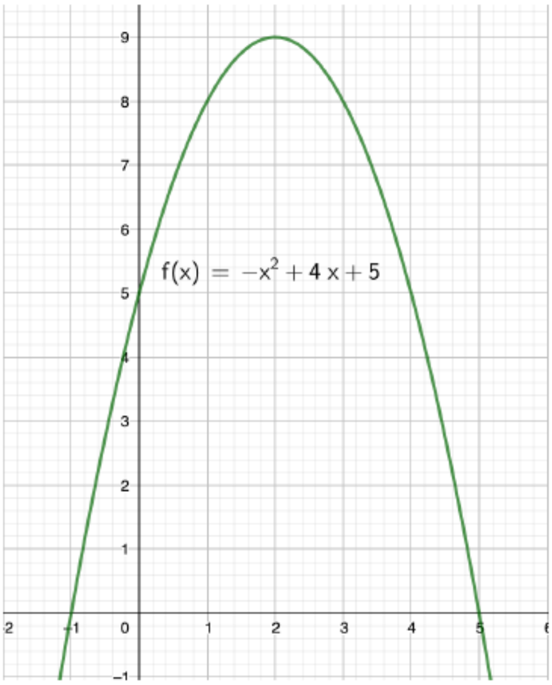
Gleiss & Sæther (2021) legger stor vekt på at i spørreundersøkelser gjelder prinsippet om at «som man spør, får man svar» (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 143). Kleven (2014) peker også på viktigheten av å velge gode, valide oppgaver som er formulert på en måte som ikke skaper unødvendig forvirring. Det er viktig at elevene forstår spørsmålet eller oppgaven, og at heftet er utformet på en gjennomtenkt måte. Jeg hentet inspirasjon fra tidligere forskning (Sackur, 2004; Tsamir & Almog, 2000; Tsamir, Tirosh & Tiano, 2004) og noe fra egne undervisningsnotater fra praksisperiode i matematikk 1T, i utformingen av oppgaveheftet. De bar en diagnostisk karakteristikk, ettersom oppgavene hadde som mål å fange elevene sine misoppfatninger og kartlegge deres kompetanse (Brekke, 2002).

Oppgaveheftene består av tre hovedoppgaver med totalt 12 deloppgaver, og elevene skulle svare på alle oppgavene. De aller fleste oppgavene var utformet som en klassisk ulikhet, og skulle være lett for elevene å kjenne igjen. Hver oppgave hadde som mål å fange opp ulike utfordringer, som for eksempel kobling til grafisk fremstilling eller entydige løsninger. I tillegg var målet at oppgavene skulle gi elevene muligheten til å vise en fleksibel matematisk kompetanse, og bruke ulike løsningsstrategier gjennom heftet. Oppgaveheftet i sin helhet ligger vedlagt, men jeg vil nå presentere hovedtrekkene ved oppgavene.

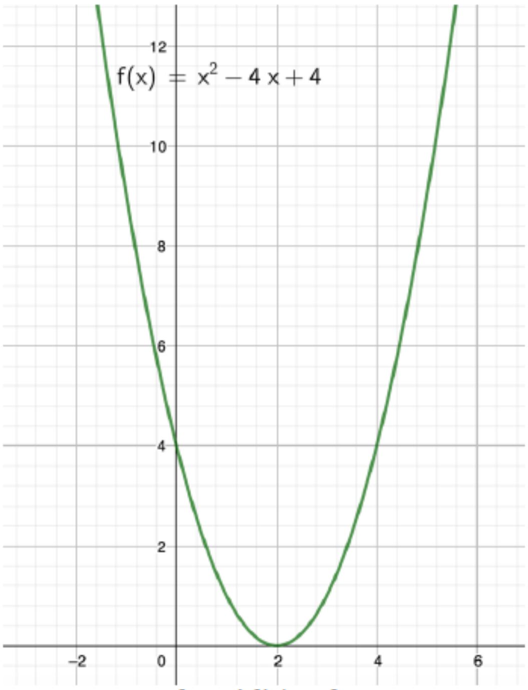
3.1.1.1 Oppgave 1

På oppgave 1 viste jeg frem tre ulike grafiske fremstillinger av noen funksjoner (Figur 2), og stilte dem to flervalgsspørsmål (Stigum Gleiss & Sæther, 2021) i forbindelse med disse.

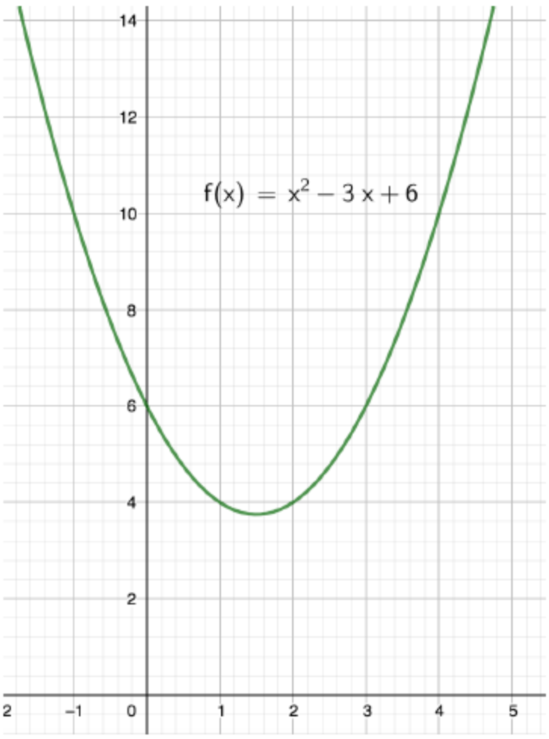
Oppgave 1. Her ser du tre grafer. Svar på avkrysningsspørsmålene.



Figur 1: grafen til f(x) = -x² + 4x + 5



Figur 2: grafen til f(x) = x² – 4x + 4



Figur 3: grafen til f(x) = x² – 3x + 6

a) Kryss av for rett svar:
Hva er sant for *figur 3*?
- ☐ Grafen har ingen nullpunkt.
- ☐ Grafen har uendelig mange nullpunkt.
- ☐ Grafen har to nullpunkt.

b) Kryss av for rett svar:
Hvilken av grafene har nullpunkt i x = 2?
- ☐ Grafen i *figur 1*
- ☐ Grafen i *figur 2*
- ☐ Grafen i *figur 3*

Figur 2: Oppgave 1 med grafer til tre andregradsfunksjoner. Disse inngår også i oppgavene med ulikheter

Her var målet å se hvorvidt elevene forstod sammenhengen mellom funksjonsuttrykk, graf og nullpunkter. De tre funksjonene som her er tegnet opp, vil også dukke opp i oppgave 2. Jeg var interessert i hvorvidt elevene *brukte* informasjonen fra denne oppgaven når funksjonene ble fremstilt som ulikheter i oppgave 2.

Oppgave 1 var ment som en slags kontrolloppgave, som elevene kunne bla tilbake til og bruke aktivt i resten av oppgaveheftet. Nivået var tenkt å være enkelt, og jeg hadde en forventning om at alle elevene ville mestre dette. Det som ville bli interessant for meg å se på, var hvorvidt informasjonen ble brukt senere.

3.1.1.2 Oppgave 2

Oppgaveteksten for oppgave 2 lyder som følger:

> *Løs følgende ulikheter. Du kan gjerne bruke resultatene fra oppgave 1 der det er relevant.*

Oppgaven består av sju deloppgaver, a-g (se vedlegg). Som vi skal se nærmere på i kapittel 4, er det resultatene av oppgave 2, og diskusjonen av disse, som vil utgjøre hoveddelen av mitt datamateriale i form av intervjuer. Oppgaven går over tre sider, og jeg ser det lite hensiktsmessig å legge disse ved i teksten. Jeg vil derimot liste opp ulikhetene som elevene ble gitt her, og deretter gå nærmere inn på begrunnelsene for de valgte ulikhetene.

2a: $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

2b: $-x^2 + 4x + 5 < 0$

2c: $(x-2)^2 > 0$

2d: $5x^4 \leq 0$

2e: $x^2 - 4x + 3 \leq -1$

2f: $\sin x + \cos x \geq 2$

2g: $\frac{2x+3}{4x+6} \geq 2$

Oppgave *2a*,*b,c*, og *e* er ulike varianter av funksjonene fra oppgave 1, og vil dermed begrunnes og diskuteres i ett felles avsnitt under. De resterende tre oppgavene, *2d,f* og *g* er hentet fra tidligere forskning, og er alle en viktig del av datainnsamlingen av ulike grunner. De vil diskuteres og begrunnes i egne avsnitt under.

Oppgave 2a,b,c og e

De fire ulikhetene presentert i oppgave 2a,b,c og e er som nevnt ulike varianter av de tre funksjonene som er grafisk fremstilt i oppgave 1. Her var ønsket å se om elevene brukte den grafiske fremstillingen fra oppgave 1, da alle disse ulikhetene enkelt kan løses ved å lese av den tilhørende grafiske fremstillingen. Dersom elevene valgte å heller faktorisere, eller løse den på en annen måte, var jeg interessert i fremgangsmåte. Bruker de abc-formelen, eller en heltallsfaktorisering? Er de fleksible i sine strategier, eller har de lært seg én algoritme som dominerer? I møte med ulikheten $(x-2)^2 > 0$, klarer de å lese av løsningen direkte, eller velger noen å løse opp parentesen for å få et gjenkjennelig polynom? I tillegg er jeg interessert i fremstillingen av løsningen. Presenterer de løsningsintervallet eller løsningen på en matematisk formell måte, eller mer muntlig?

Oppgave 2d

$5x^4 \leq 0$

I oppgave 2d ble elevene presentert for en ulikhet som alltid vil være positiv, bortsett fra når $x = 0$. Oppgaven er hentet fra forskningen til Tsamir & Bazzini (2004), hvor de undersøkte hvordan elever responderte og løste ulikheter som bare hadde ett tall som løsning, såkalte «single-value inequalities» (Tsamir & Bazzini, 2004). De fant gjennom løsning av oppgaver og intervjuer i ettertid at flere elever ikke anså enkeltløsninger som en gyldig løsning av en ulikhet. Elevene Tsamir og Bazzini møtte hadde en forståelse for ulikheter som innebar at løsningen alltid var en mengde verdier, og ikke bare én enkelt verdi slik som likninger. Jeg lurte på om dette også var tilfelle for disse elevene, og ønsket samtidig å se hvordan de valgte å løse denne ulikheten. Vil de se, uten algebraisk manipulasjon eller regning, at 0 er eneste løsning? Eller vil de prøve å få x alene, og løse det algebraisk? Kanskje noen vil velge å tegne grafen til funksjonen?

Oppgave 2f

$\sin x + \cos x \geq 2.$

Inspirasjon til oppgave 2f er hentet fra TIMSS Advanced 2008 (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010). Her var oppgaven skrevet som en likning: $\sin x + \cos x = 2$ under kategorien «geometri», mens jeg valgte å skrive den om til en ulikhet. Ved undersøkelsen TIMSS

Advanced 2008 var det i Norge 33% av elevene som fikk rett svar på denne oppgaven, og internasjonalt 46% (Grønmo, Onstad, & Pedersen, 2010). Denne oppgaven krever, i tillegg til kunnskap om ulikheter, kunnskap om og kjennskap til trigonometriske funksjoner. Her vil det være en fordel for elevene å tenke grafisk, og teste for ulike x-verdier, for å finne ut at det aldri vil bli større enn eller lik 0. Jeg hadde på forhånd ingen forventning om at noen skulle få til denne oppgaven, men synes likevel den var interessant å ha med. Hvilke løsningsstrategier ville elevene her prøve seg på? Denne oppgaven skrevet som likning undersøkes også i masteroppgaven «Du tenker mindre på matte'n, egentlig», og her konkluderes det blant annet med at vaner spiller en sentral rolle i elevers løsningsstrategier (Sandstad, 2012). Elevene er ikke vant til å behandle trigonometriske uttrykk på en grafisk måte, og dermed benytter de seg ikke av den muligheten

Oppgave 2g

$\frac{2x+3}{4x+6} \geq 2.$

Denne ulikheten er hentet fra forskningen til Van Stiphout, Drijvers & Gravemeijer, hvor de undersøker hva som kjennetegner algebraiske ferdigheter (van Stiphout, Drijvers, & Gravemeijer, 2013). På denne deloppgaven vil elevene dra stor nytte av å velge en grafisk løsningsstrategi, for å finne ut av at grafen til $f(x) = \frac{2x+3}{4x+6}$ er den rette linjen $y = \frac{1}{2}$, som aldri vil bli større enn eller lik 2. Ulikheten kan også løses algebraisk ved å legge merke til forholdet mellom teller og nevner, som er $\frac{1}{2}$. Det vil være viktig å kunne lese mening inn i symbolene, og se sammenhengen og forholdet mellom teller og nevner. Arcavi kaller det for symbol- og struktursans (se kapittel 2.4.2), og ser på det som et viktig utgangspunkt for å mestre algebra (Arcavi, 1994). Her er det interessant å se om elevene tar seg tid til å se på uttrykket, og legger merke til forholdet, eller om de går rett på algebraisk manipulasjon for å eliminere brøken og få x alene på en side. Det vil også være interessant å legge merke til hvordan elevene eventuelt håndterer verdien $x = -\frac{3}{2}$, som gir $\frac{0}{0}$, og dermed er en ekskludert verdi.

3.1.1.3 Oppgave 3

Oppgave 3a og b

I oppgave 3 ble elevene presentert med funksjonene:

$f(x) = x - 3$

$g(x) = -\frac{1}{2}x + 3.$

Oppgaven var deretter formulert på følgende måte:

Løs følgende ulikheter på to forskjellige måter:

a) $f(x) > 0$

b) $f(x) < g(x)$

Her valgte jeg å definere funksjoner av x, for å variere måten ulikhetene ble gitt på. I tillegg hadde jeg et ønske om at formuleringen ville appellere til en grafisk fremgangsmåte. Elevene ble bedt om å løse på to forskjellige måter, og da hadde jeg et ønske om at en grafisk metode ville være en av dem.

I ettertid har jeg bemerket at spørsmålets formulering kan virke uklar. Målet med oppgaven var at elevene skulle løse hver av de to ulikhetene på to ulike måter. Oppgaven kan også tolkes dithen at de to ulikhetene, a og b, skulle løses på ulike måter.

Oppgave 3c

I oppgave 3c ble elevene bedt om å skrive med ord (ikke matematiske symboler) løsningen på oppgave a og b. Her ønsket jeg at de skulle sette ord på hva det ville si at variabelen x må ha gitte verdier for å oppfylle ulikheten. Skriver de ting som: «x *er*», eller «x *må være*»? Bruker de begrepene «større enn» og «mindre enn» på en tilfredsstillende måte? Besvarelsene her vil gi meg innsikt i hva elevene tenker, og hva slags forståelse de har for temaet. I ettertid har jeg merket meg tvetydigheten i denne oppgavens formulering, og innsett at elevene kan tolke den på ulike måter. Kanskje noen forstår det som at de skal beskrive prosedyren de har valgt, og dermed forklarer nokså instrumentelt? Eller kanskje de skriver hvorfor de har valgt å løse det på en bestemt måte? Elevenes utgreiinger vil likevel gi meg noen indikasjon å hvordan ulikhetstegnet forstås og håndteres.

3.1.3 Intervju som metode

Ved bruk av et kvalitativt forskningsintervju, er målet å forstå verden fra intervjupersonens ståsted (Kvale & Brinkmann, 2019, s. 20). I denne studien ønsker jeg å forstå de tre utvalgte elevenes tankemønstre og oppfatninger i det matematiske temaet ulikheter, og dermed ble det viktig å gjennomføre intervjuer i etterkant av oppgaveheftene. Jeg ønsker å se temaet fra deres side, og innhente verdifull informasjon om deres metakognitive strategier, og da ble et kvalitativt forskningsintervju den foretrukne metoden (Dalen, 2011). Spørsmålene jeg stilte var av typen: «hva tenkte du da du så denne oppgaven?», «hvorfor valgte du å løse det på denne måten?» og «hva betyr svaret du fikk her?». I tillegg hadde jeg et spørsmål i slutten av hvert intervju som handlet om elevens holdninger til matematikk, og spurte om hva eleven la vekt på i matematikklæring – var det pugging av metode, forståelse av metode, bruk av metode eller noe annet? Intervjuformen ble av en konfronterende karakter (Kvale & Brinkmann, 2019), ettersom det søkte elevenes forklaringer og begrunnelser for valgte handlinger. I tillegg var intervjuene semistrukturerte for å på den måten være åpne for andre tanker og innspill elevene hadde om temaet (Dalen, 2011; Kleven, 2014; Stigum Gleiss & Sæther, 2021). Samtidig gav det meg som forsker muligheten til å spille videre på et spesielt tema, eller en tanke jeg syns var interessant. Elevene fikk i løpet av intervjuene muligheten til å utdype sine løsningsstrategier, samt forsvare de valgene de hadde tatt, noe som gav meg som intervjuer dypere innsikt i deres tankemønstre. Oppgaveheftene gav nyttig informasjon om elevenes evner, men gjennom intervjuene fikk elevene muligheten til å forklare hvorfor de valgte den gitte strategien, og hva som eventuelt gikk galt underveis. På de oppgavene som eleven ikke hadde et tilstrekkelig svar på, fikk jeg verdifull informasjon om hva som konkret ble vanskelig, og ved å stille diverse hjelpende spørsmål fikk jeg også et innblikk i hvordan eleven lå an i tankeprosessen.

Et kvalitativt forskningsintervju som er semistrukturert, og dermed åpner opp for flere retninger, fører med seg ulike utfordringer jeg som forsker må ta stilling til og tenke gjennom. Det er viktig at mine oppfatninger og synspunkter holdes utenfor, slik at informanten ikke får noen føringer for hva han eller hun skal svare. I tillegg er det viktig at jeg lytter og gir informanten god tid (Dalen, 2011). Kvale & Brinkmann (2019) beskriver 10 konkrete kvalifikasjoner jeg som intervjuer bør ha for å produsere innholdsrik kunnskap og en etisk positiv situasjon for intervjuobjektet. Deriblant er kvalifikasjoner som *kunnskapsrik, strukturerende, klar, vennlig, følsom, åpen, styrende, kritisk, erindrende og tolkende* (Kvale & Brinkmann, 2019, ss. 195-196). Ut ifra disse la jeg særlig vekt på å være klar, vennlig, erindrende og tolkende. Jeg ønsket å stille klare, enkle og korte spørsmål slik at eleven forstod hva jeg lurte på. I tillegg var jeg særlig opptatt av å fremstå vennlig og avslappet, slik at eleven ikke følte seg angrepet for sine matematiske feil, og fikk snakke ut tankene sine. Jeg forsøkte å være erindrende, og huske tidligere utsagn fra eleven, for å få et helhetlig bilde av vedkommende sin kompetanse. På samme tid forsøkte jeg å være tolkende ved å gjenta det eleven uttalte, for å bekrefte eller avkrefte om jeg hadde forstått det riktig (Kvale & Brinkmann, 2019). En hovedregel i et forskningsintervju er at spørsmålene ikke må oppleves som en test (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 83). Dette var en fare i min datainnsamling, ettersom spørsmålene i intervjuene struktureres rundt elevens besvarelser på noen oppgaver. Da ble det særlig viktig å ordlegge seg på en undrende måte, og stille spørsmål som handlet om elevens tankemønstre og fremgangsmåter, og ikke elevens faktakunnskaper i matematikk.

Dybdeintervjuet er avhengig av en god dialog mellom forsker og informant, og her er det flere ting som kan spille inn og påvirke intervjusituasjonene og besvarelsene (Tjora, 2017). Det asymmetriske maktforholdet mellom meg og elevene er blant annet noe Gleiss & Sæther (2021) peker på som utfordrende. Jeg som intervjuer kontrollerer samtalen, og bestemmer hvilke tema jeg ønsker å ta opp. Jeg har på forhånd valgt de oppgavene jeg ønsker å spørre om, og bestemmer også hvilke tema jeg stiller oppfølgingsspørsmål til. I tillegg har jeg noen forut antakelser om temaet på bakgrunn av tidligere forskning, teoretisk kunnskap og egne erfaringer som kan være med å forme intervjusituasjonen. På samme tid er det eleven som sitter på verdifull informasjon som jeg er ute etter. Vedkommende velger selv hvor mye han eller hun ønsker å dele, og dette kan påvirkes av hvordan dagen har vært, hvor opplagt og engasjert vedkommende er, og hvorvidt situasjonen oppleves som trygg. Møtet mellom meg som forsker og eleven kan betegnes som intersubjektiv, da de refleksjonene og tankene som trekkes frem er avhengig av hvordan møtet og dialogen oppleves (Tjora, 2017).

3.2 Datainnsamlingsprosessen

Tjora betrakter det som hensiktsmessig å legge til rette for datainnsamling relativt tidlig i prosjektet (Tjora, 2017). Dette for å kunne justere bruken av teori og perspektiver etter hvert som dataene analyseres og kodes, ettersom man aldri kan være helt sikker på hva man finner. Min datainnsamling fant sted i oktober, hele tre måneder før vårsemesteret startet. I forkant av datainnsamlingen fikk jeg tips fra min veileder at flere av Universitets samarbeidsskoler stod under stort tidspress som følge av koronapandemien, og at det dermed kunne vise seg å bli utfordrende å finne en skole som ville ta imot meg og mitt forskningsprosjekt. Dette resulterte i at jeg kontaktet matematikklæreren på en videregående skole utenfor Oslo som jeg tidligere har hatt kontakt med i forhold til praksis. I samråd med faglærer kom jeg frem til at jeg kunne få to 90-minutters økter til rådighet, mandagen og onsdagen i uke 43. I begge disse timene var ikke lærer til stede, og jeg fungerte da også som vikar for klassen. Elevene løste oppgavehefter på mandagen, og intervjuene fant sted på onsdagen. Ettersom intervjuene tok utgangspunkt i elevene sin løsning og tanker rundt oppgaveheftet, var det viktig at intervjuene fant sted kort tid etter arbeidet med oppgaveheftene. På den måten var elevens refleksjoner og utfordringer friskt i minne, og svarene deres mer troverdige. Klassen hadde fått beskjed av læreren sin om at jeg skulle komme, og de var klar over at jeg skrev masteroppgave og var der for å innsamle data.

3.2.1 Dag 1: Løsning av oppgavehefter

Mandagen var første dag av datainnsamlingsprosessen, og jeg møtte opp i den valgte R1-klassen. I starten av timen gav jeg dem instrukser om hvordan datainnsamlingen ville foregå, og forsikret dem om anonymitet. Jeg gav også tydelig beskjed om at et eventuelt samtykke når som helst kunne trekkes tilbake dersom det viste seg å være ønskelig. Samtykkeskjema ble deretter utdelt i klassen, og elevene kunne huke av i to bokser: den ene samtykket til at jeg kunne bruke besvarelsen av oppgaveheftet, og den andre samtykket til at jeg kunne forespør intervju i etterkant. Alle elevene gav samtykke til å bruke oppgaveheftene, og omtrent 2/3 av klassen sa seg villige til å intervjues i etterkant. Oppgaveheftene ble deretter løst av elevene individuelt på mandagen, og alle brukte omkring 45 minutter på dette, noe som tilsvarer fire minutter per deloppgave. Heftene ble samlet inn av meg, og resten av timen fungerte jeg som vikarlærer.

3.2.2 Dag 2: Gjennomgang av elevbesvarelser

Jeg brukte tirsdagen på å se gjennom oppgaveheftene, og noterte meg ned løsningsstrategier og resultater. I løpet av tirsdagen valgte jeg også ut tre elever som jeg ønsket å intervjue, basert på deres løsninger og samtykke. Kari, Per og Else (fiktive navn) var de tre elevene som ble utvalgt til å intervjues, og det er det ulike grunner til.

Kari svarte som gjennomsnittet i klassen på de aller fleste oppgavene, og kan dermed tenkes å representere flertallet. Jeg ønsket å intervjue en elev som virket nokså gjennomsnittlig, og jeg hadde da valget mellom to-tre stykker i forhold til besvarelser og samtykke. Hvorfor det ble Kari til slutt, er noe tilfeldig. Kari bruker mye algebraisk manipulasjon, som også er en gjenganger i klassen, og det er flere ting i hennes løsninger som peker i retning av en instrumentell forståelse. Det kan tenkes at det som Kari sliter med og synes er vanskelig, også gjelder flere i klassen, og dermed ble hun et naturlig valg av intervjuobjekt.

Per var en elev som hadde fått til mer enn de fleste andre elever. Han varierte noe i bruk av prosedyrer og algoritmer, og det virket som om han hadde en mer relasjonell forståelse for temaet enn gjennomsnittet. Til tross for dette, virket det ikke som om han så noe særlig sammenheng mellom de grafiske fremstillingene og de algebraiske ulikhetene. Det var i alle fall tydelig at denne sammenhengen ikke ble brukt til å løse oppgaven, og dermed ble han en interessant person å intervjue. Hvorfor brukte han ikke disse funksjonsuttrykkene til å løse oppgaven? Forstod han i det hele tatt sammenhengen?

Else hadde fått til noe, og slet med noe. Det var ikke noe spesielt med hennes løsningsstrategier som jeg bet meg merke i, men det som trigget oppmerksomheten var heller hennes tilnærming til ulikhetstegnet. Det virket som om hun ikke alltid visste hva hun skulle gjøre med det, og det var noe tilfeldig hvilken vei det stod til tider. En viktig del av mitt prosjekt er å finne ut hvordan elevene forstår ulikhetstegnet, og Else virket som en god kandidat til å formidle hva som eventuelt er vanskelig å forstå.

I tillegg til de tre foretrukne intervjuobjektene valgte jeg også ut to stykker i reserve, dersom noen var syke, borte eller ønsket å trekke sitt samtykke.

3.2.3 Dag 3: Intervjuer

På onsdagen møtte jeg klassen for andre og siste gang. Det viste seg å ikke være nødvendig med reserveelever, da de tre foretrukne elevene var til stede og villige. Jeg startet dagen med å intervjue elevene én og én. For å være mer til stede i intervjusituasjonen, og slippe den unøyaktigheten og stresset som kommer av å notere, valgte jeg å ta lydopptak av samtalene. Det var i hovedsak oppgave 2 a,b,c,d og g som fungerte som en intervjuguide for alle de tre samtalene. Intervjuene ble likevel noe forskjellige, da hver elev fikk snakke fritt om sin løsningsstrategi og sine opplevelser. Hvert intervju varte i 12-13 minutter, og de første 45 minuttene av 90-minuttersøkten ble dermed brukt på intervjuer. Resten av økten ble brukt på å gjennomgå oppgaveheftet, med innspill og spørsmål fra elevene. De fikk beholde sitt eget hefte med løsninger etter endt datainnsamling. Etter økten var over, brukte jeg noen minutter på å notere meg ned ting som skjedde under intervjuene, for eksempel hvordan en elev hadde vært veldig selvsikker i sine svar til tross for at det ikke stemte.

Jeg valgte å gjennomføre intervjuene i et grupperom ved siden av klasserommet til elevene, hvor de ofte jobber med gruppearbeid ellers i skolehverdagen. Dette i håp om at eleven skulle oppleve situasjonen som kjent, og være på hjemmebane.

Intervjuene ble tatt opp på lydopptak med diktafon-appen som er utviklet for Universitetet i Oslo (Universitetet i Oslo, 2021). Der ble opptakene lagret på et nettskjema som jeg hadde opprettet på forhånd, og ikke på noen privat enhet. I løpet av januar 2022 ble intervjuene transkribert, og opptakene ble slettet.

3.4 Den analytiske tilnærmingen

3.4.1 Analyse av elevbesvarelser

Analyseprosessen startet allerede dagen etter innsamlingen av oppgaveheftene. For å systematisere elevbesvarelsene og se etter hvilke mønstre som dukket opp, valgte jeg å se på hver oppgave for seg, og notere meg ned hvilke løsningsstrategier elevene brukte, og hva de fikk til og ikke. Ettersom jeg dagen etter skulle levere oppgaveheftene tilbake til elevene, var det og viktig for meg å ha et notat på hvordan det hadde gått. Jeg brukte navn som «Elev 1, Elev 2,...» og så videre, når jeg noterte meg ned løsningene, slik at jeg senere kunne sammenligne og se hvordan én elev hadde løst det.

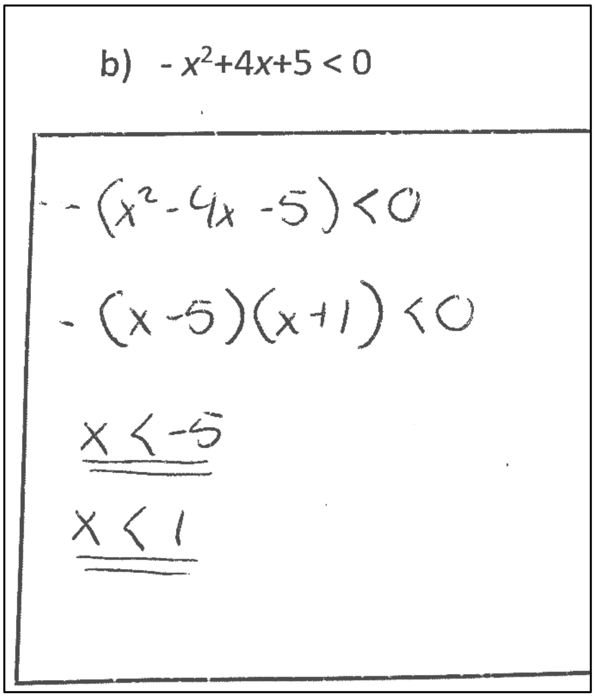
Løsningene av oppgaveheftene ble senere i analyseprosessen delt opp i ulike kategorier. For å få et helhetlig bilde av klassens nivå delte jeg først hver enkelt oppgave inn i de tre kategoriene: *«Andel elever som fikk den til»*, *«Andel elever som nesten fikk den til»* og *«Andel elever som ikke fikk den til»*. Videre fant jeg for hver oppgave *«Andel elever som bruker ulikhetstegnet feil»*, og deretter *«Andel elever som viser tegn til å gjøre koblinger til den geometriske fremstillingen»*. Disse kategoriene ble valgt på bakgrunn av problemstillingen, og koding ble dermed av en deduktiv karakter (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 174). Jeg valgte meg noen kriterier til hver av kategoriene, og gikk deretter gjennom elevbesvarelsene flere ganger, og endret kriteriene underveis i prosessen da det viste seg nødvendig, som vist i Mayrings tabell (Kelle & Buchholtz, 2015, s. 347). Kriteriene for de ulike kategoriene vil jeg gjøre rede for nå. Resultatet av denne kodingen fremstilles i tabell i kapittel 4.

Med *«andel elever som fikk det til»* inngår de elevene som både gav rett svar på oppgaven, og brukte en velegnet metode på rett måte. Her stilte jeg også krav til korrekt bruk av ulikhetstegnet, samt en korrekt fremstilling av svaret.

Kategorien *«andel elever som nesten fikk den til»* innebærer de elevbesvarelsene som enten har fått rett svar til tross for en noe slurvete metode og de elevene som brukte metoden rett, men som, på grunn av slurvefeil, ikke fikk rett svar. Her var det også noen som brukte ulikhetstegnet på feil måte.

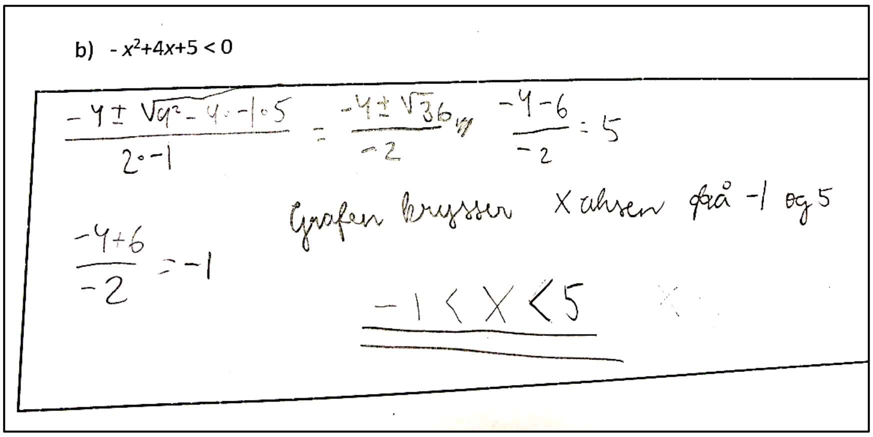
«Andel elever som ikke fikk det til» innebærer både de elevene som har svart blankt, og de elevene som har brukt en feil prosedyre. De tre første kategoriene *«Andel elever som fikk den til», «Andel elever som nesten fikk den til»* og *«Andel elever som ikke fikk den til»* er gjensidig utelukkende. Ingen elevbesvarelser har havnet i flere av disse tre kategoriene, men alle har havnet i én. De to neste kategoriene som går på bruk av ulikhetstegnet og den geometriske fremstillingen er ikke gjensidig utelukkende, og her vil noen besvarelser kunne havne under begge, i tillegg til å først være kategorisert som en av de tre førstnevnte.

Kategorien *«andel elever som bruker ulikhetstegnet feil»* innebærer blant annet de elevbesvarelsene som har fremstilt svar hvor bruken av ulikhetstegnet ikke gir mening, eksempelvis: $5 < x > -1$. I tillegg vil de som snur ulikhetstegnet på feil tidspunkt, eller lar være å snu ulikhetstegnet når det er nødvendig, havne under denne kategorien. Tre eksempler på elevbevarelser som viser feil bruk av ulikhetstegnet er inkludert her.



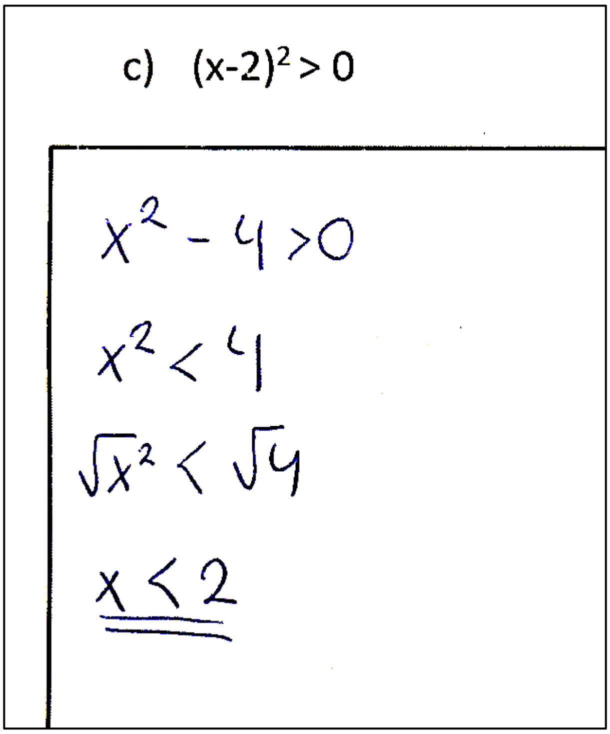
Figur 3 Elevbesvarelse som viser feil bruk av ulikhetstegnet

På denne oppgaven har eleven kommet frem til røttene -5 og 1, men fremstiller dem ved feil bruk av ulikhetstegnet. Dette er en typisk besvarelse som går igjen, og som jeg kommer tilbake til i kapittel 4 og 5.



Figur 4 Elevbesvarelse som viser feil bruk av ulikhetstegnet

Dette er en elevbesvarelse som bruker abc-formelen i faktoriseringen, men som fremstiller svaret ved en bruk av ulikhetstegnet som ikke gir helt mening. Svaret ligner det fra Figur 3, og jeg vil komme mer inn på denne typen feil i kapittel 4 og 5.



Figur 5 Elevbesvarelse som viser feil bruk av ulikhetstegnet

Denne elevbesvarelsen viser også en feil bruk av ulikhetstegnet, og eleven har her misforstått regelen om når ulikhetstegnet skal snus. Her har vedkommende snudd ulikhetstegnet fordi tallet 4 ble addert på begge sider, hvilket er feil. Jeg vil også gå mer inn på denne typen feil i kapittel og 5. Eleven har også løst opp parentesen feil, men den typen feil har jeg valgt å ikke ta hensyn til i denne studien, da det ikke handler om algebra eller ulikheter spesielt.

Under *«andel elever som viser tegn til å gjøre koblinger til den geometriske fremstillingen»* plasseres elevbesvarelser som gir tydelig uttrykk for å *bruke* de grafiske fremstillingene i sin løsning av ulikheten. Dette i form av svar som viser til de grafiske fremstillingene, eller ved å tegne opp selv. Det kan også være noen elever som har *tenkt* på en måte som gjør koblinger til de grafiske fremstillingene uten å vise det i sin besvarelse, dermed er det mulig at tallene i denne kategorien ikke stemmer helt overens med situasjonen. Likevel har jeg erfart fra slike kartleggingsprøver, og sett fra besvarelsene, at de fleste elevene pleier å vise ganske tydelig hva de har tenkt og gjort, og dermed kan tallene i denne kategorien gi en god indikasjon på hva som er tilfellet.

3.4.1 Analyse av intervjuene

Analysen av intervjuene startet med transkribering. Dette gav meg en ny inngang inn i intervjuene, og startet en bearbeidingsprosess (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 96). Ved å konkret omdanne de muntlige intervjuene til skriftlig tekst, merket jeg fort hva som gikk igjen hos de ulike elevene, og hva slags informasjon som var hensiktsmessig å ta med seg videre i forhold til forskningsspørsmålene. Ved å transkribere og lese gjennom transskripsjonene gang på gang, reflekterte jeg teoretisk over de interessante temaene som dukket opp (Kvale & Brinkmann, 2019). Kvale & Brinkmann (2019) påpeker at det, i løpet av de siste tiårene, ofte ikke har vært brukt noen særlig systematisk analyseteknikk for å analysere intervjuer (Kvale & Brinkmann, 2019, s. 265). Med teorien og forskningsspørsmålene i mente valgte jeg en usystematisk tilnærming, hvor jeg tolket de ytringene som var interessante for studiens problemstilling, og la lite vekt på det irrelevante. Dette førte til noen interessante oppdagelser som vil bli presentert i kapittel 4 og 5.

3.5 Kvalitet i forskningen

Tjora beskriver kvalitativ forskning ved at man som forsker ser på sitt valgte tema som *«et område for utforskning, heller enn ressurser for å forklare funn»* (Tjora, 2017, s. 29). I en studie som dette, hvor tre enkeltelever utgjør hoveddelen av datamaterialet, er det viktig å ha dette i tankene. Funnene her vil ikke være statistisk generaliserbare (Stigum Gleiss & Sæther, 2021) og forklarende for hva som må bli bedre i norsk skole, men de vil likevel være nyttige for meg som lærer, og andre lærere, å være klar over. Det er grunn til å anta at disse elevenes erfaringer og kompetanser også er å finne igjen i resten av skole-Norge, og dermed et interessant område for utforskning. Hvorvidt undersøkelsen er pålitelig og gyldig, handler om studiens reliabilitet og validitet, og vil bli diskutert her sammen med dens relevans i forhold til generaliserbarhet.

3.5.1 Reliabilitet

Reliabilitet handler om kvaliteten på selve forskningsprosessen, og hvorvidt den er troverdig. Det vil for eksempel være interessant å spørre seg hvordan resultatene hadde blitt dersom en annen forsker skulle reprodusere forskningen på et annet tidspunkt (Kvale & Brinkmann, 2019). Objektivitet og nøytralitet er altså viktig i møte med informantene, og mangel derav kan ha betydning for prosessen og konklusjonene. Tjora hevder at forskerens engasjement vil kunne betraktes som støy, i og med at det kan påvirke resultatene (Tjora, 2017, s. 235). For å styrke studiens reliabilitet, og minimere denne støyen, er det derfor viktig som forsker å redegjøre for egen posisjon og engasjement, samt være transparent i eget arbeid. (Kvale & Brinkmann, 2019; Stigum Gleiss & Sæther, 2021; Tjora, 2017). Stigum Gleiss & Sæther trekker frem to spørsmål som er hensiktsmessig å stille seg for å vurdere reliabilitet*: 1) Hvordan har datamaterialet blitt påvirket av måten det er blitt samlet inn på? og 2) Kan forskningsresultatene reproduseres av andre forskere?* (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 202). Jeg vil i det kommende ta for meg de to spørsmålene, samt diskutere mine vurderinger og tanker rundt egen datainnsamlingsprosess.

Ettersom dette er en kvalitativ studie hvor jeg som forsker spiller en viktig rolle, er det mye som kan påvirke datainnsamlingsprosessen, og som dermed spiller inn på studiens reliabilitet. Hvordan klarte jeg som forsker å motivere elevene til å gjøre sitt beste i arbeidet med oppgaveheftene? Og hvordan kan intervjusituasjonen ha blitt påvirket? Resultatene fra oppgaveheftet kan påvirkes av hvor motiverte elevene var til å gjøre sitt beste. For å sikre dette på best mulig måte, forsøkte jeg å motivere elevene ved å sikre at det ville være relevant og lærerikt for dem å løse disse oppgavene på best mulig måte. Da oppgaveheftene ble løst i en skoletime, hvor jeg observerte dem imens, har jeg et inntrykk av at de aller fleste elevene gjorde så godt de kunne. Intervjusituasjonene kan derimot ha blitt påvirket på flere måter ut ifra måten de er samlet inn på. Noen grep jeg tok for å sikre mest mulig reliabilitet var blant annet å sørge for at intervjuene fant sted i relativt kort tid etter arbeidet med oppgaveheftene. Det var bare én dag mellom oppgaveheftene og intervjuene, og den dagen var nødvendig for å analysere resultatene samt lage meg en intervjuguide basert på svarene deres. I tillegg er hele prosessen nøye beskrevet ovenfor, med forklaringer på hvorfor jeg valgte de ulike oppgavene og intervjuobjektene. I kapittel 3.4 ble også den analytiske tilnærmingen beskrevet, med redegjørelser og begrunnelser for hvordan jeg kom frem til mine resultater. Dette for å sikre en transparens i forskningen, noe som også styrker reliabiliteten.

Kan forskningsresultatene reproduseres av andre forskere er neste spørsmål i forhold til reliabilitet. Jeg har forsøkt å gjengi metoden så detaljert som nødvendig, og oppgaveheftet ligger vedlagt. Spørsmålet blir da: vil andre forskere analysere og tolke elevbesvarelsene på samme måte som meg? Og ville de valgt de samme spørsmålene å basere intervjuene sine på? Mest sannsynlig ikke. Kvale & Brinkmann påpeker at en for sterk fokusering på reliabilitet kan motvirke kreativ tenking og variasjon (Kvale & Brinkmann, 2019, s. 275), men det er likevel viktig å gjøre rede for de valgene som er tatt, slik at leseren selv kan vurdere hvorvidt han eller hun synes resultatene er troverdige (Tjora, 2017). Når det gjelder reliabilitet i kvalitative forskningsintervju handler det for det meste om hvorvidt informantene ville svart det samme dersom en annen forsker hadde foretatt det samme intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2019, s. 276). Dette peker igjen på viktigheten av å ikke la egne meninger og synspunkter skinne gjennom, men å lytte til informantens livsverden. Dalen presiserer at å intervjue er en treningssak, og noe som er viktig å øve på (Dalen, 2011). Jeg er ingen erfaren forsker, og heller ikke en erfaren intervjuer. Det er nok noen ting jeg ikke har klart å fange opp, og noen temaer jeg burde spilt videre på som jeg ikke gjorde. Likevel opplevde jeg selv, både i situasjonen og i transkriberingen i ettertid, at jeg holdt meg nokså nøytral, og lot eleven snakke fritt innen de rammene jeg satt.

3.5.2 Validitet

Validitet handler om gyldighet og kvalitet på datamaterialet, samt forskerens valg av konklusjoner (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 204). Stigum Gleiss & Sæther stiller følgende spørsmål for å vurdere validiteten: «*Er metoden og utvalget egnet for å svare på problemstillingen? Bygger forskerens fortolkninger og konklusjoner på datamaterialet? Svarer man på problemstillingen?»* (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 204). Larsen presiserer at én metode ikke prinsipielt kan bedømmes som bedre enn en annen metode (Larsen, 2017, s. 128), men at det er viktig at den valgte metoden kan hjelpe å finne svar på problemstillingen.

Den valgte metoden med bruk av oppgavehefter og intervjuer er egnet for å svare på hvilke kompetanser og eventuelle misoppfatninger elever viser. Elevene fikk muligheten til å løse matematikkoppgaver, samt forsvare og beskrive hva de tenkte i et intervju. I analysen av datamaterialet som vil foregå i kapittel 4 har jeg basert mine tolkninger og resultater på elevsitater og elevbesvarelser, og forsøkt å begrunne de slutningene jeg trekker. Kvalitativ forskning vil samtidig alltid være preget av konteksten (Tjora, 2017), og hvordan partene opplever situasjonen. Studiens datainnsamling foregår på to 90-minutters økter, og er dermed avhengig av at både jeg som forsker og intervjuer, *og* elevene, er ved godt mot og har et engasjement for temaet i disse to øktene. Slike ytre faktorer kan spille inn på validiteten til studien og er viktig å være klar over. Jeg opplevde selv at både jeg og elevene var fokuserte og ønsket at studien skulle bli så valid som mulig, men noe bias vil alltid finne sted.

3.5.3 Generaliserbarhet

Kvalitative studier vil ikke kunne generaliseres på samme måte som kvantitative studier, men det betyr ikke at en kvalitativ studie ikke vil være relevant ut over den enkelte undersøkelsen (Stigum Gleiss & Sæther, 2021). Ved å ta utgangspunkt i teori og tidligere forskning i analysering og tolkning av resultater, kan studien ha relevans utenfor sin setting. Det kan da argumenteres for en analytisk generalisering (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 207) eller konseptuell generaliserbarhet (Tjora, 2017). Ettersom det er tidligere forskning og teori som ligger til grunn for dette prosjektet, kan det argumenteres for å ha relevans utenfor sin setting. Som lærer vil det være interessant og relevant å ha kunnskap om hvordan en matematikk R1-klasse arbeider med ulikheter, ettersom deres måter å tenke på mest sannsynlig ikke er unike.

3.6 Etiske betraktninger

I et forskningsprosjekt følger det som regel med en rekke etiske betraktninger som er viktig å ta hensyn til. Et forskningsprosjekt som innebærer innsamling av persondata, krever godkjenning fra NSD (Norsk Senter for Forskningsdata). I tillegg er det noen forskningsetiske prinsipper som er viktig å tenke gjennom, samt å skape et trygt miljø for deltakerne. Jeg vil her gjøre rede for de etiske betraktningene som gjelder dette prosjektet.

3.6.1 Søknad til NSD

Dette prosjektet behandler persondata i form av skriftlig, signert samtykke samt lydopptak av tre elever. Søknad til NSD ble sendt ut i god tid før datainnsamling. Ved hjelp av veileder fylte jeg ut et meldeskjema som finnes på NSD sine hjemmesider, og la ved all nødvendig informasjon, som prosjektbeskrivelse, intervjuguide og samtykkeskjema. En godkjent vurdering av denne søknaden ligger vedlagt. Etter godkjenning fra NSD var jeg oppmerksom på å følge den beskrivelsen og prosessen som jeg søkte om, både før, under og etter endt datainnsamling. I tillegg til den spesifikke søknad til NSD, er det også noen generelle forskningsetiske prinsipper som er svært aktuelle inn i mitt prosjekt.

3.6.2 Forskningsetiske prinsipp

Stigum Gleiss & Sæther kommer med en oversikt over tre forskningsetiske prinsipp som er sentrale i forskning: 1) Informert samtykke, 2) konfidensialitet og anonymitet og 3) unngå negative konsekvenser for deltakerne (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 43). Disse tre prinsippene er tatt høyde for i dette prosjektet, og vil beskrives ytterligere her.

«Informert samtykke er et grunnprinsipp i all forskning» (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 44), og det skal være frivilling, informert, utvetydig og dokumenterbart. Samtykkeskjemaet for denne studien (se vedlegg) ble delt ut til elevene før datainnsamlingen startet. Jeg var opptatt av å presisere for elevene at et eventuelt samtykke når som helst kan trekkes uten grunn, både før, under og etter selve datainnsamlingsprosessen. Forskningsprosjektet og formålet ble nøye forklart både muntlig og skriftlig, men jeg valgte å ikke si noe om nøyaktig *hva* jeg så etter i elevene sine løsningsstrategier, ettersom jeg var redd for at dette kunne påvirke reliabiliteten i prosjektet. I tillegg er det viktig at informasjonen som gis deltakerne, ikke er så detaljert at det føles overveldende og uforståelig (Kvale & Brinkmann, 2019, s. 105). Jeg passet på å fatte meg i korthet, men samtidig gi dem den informasjonen som jeg anså viktigst og sette av tid til deres spørsmål i etterkant. Samtykkeskjemaet ble signert av alle elevene i klassen, og ettersom de var mellom 16 og 17 år, var det ikke nødvendig at foreldre og foresatte signerte. Som nevnt tidligere i kapitlet, hadde elevene mulighet til å huke av for to bokser i samtykkeskjemaet. Den ene boksen gav samtykke til å bruke resultatene av arbeidet med oppgaveheftet, mens den andre boksen i tillegg samtykket til å intervjues i ettertid.

Konfidensialitet og anonymitet er også viktig å sikre i forskning (Stigum Gleiss & Sæther, 2021). Konfidensialitet handler om å ikke avsløre den personlige informasjonen deltakerne gir. Gleiss & Sæther peker også på at fullstendig konfidensialitet ikke er mulig i forskning, og at det derfor er viktig å sikre anonymitet (Stigum Gleiss & Sæther, 2021, s. 45). Kvale & Brinkmann hevder at konfidensialitet i større grad handler om hvilken informasjon som bør være tilgjengelig for hvem (Kvale & Brinkmann, 2019, s. 106), og er viktig å tenke gjennom i for eksempel lagring av intervjuopptakene. I dette prosjektet er sitater fra intervju og forholdene rundt notert og beskrevet som en sentral del av resultater og funn. Av den grunn har fullstendig konfidensialitet som beskrevet av Gleiss & Sæther ikke vært mulig, men anonymiteten til deltakerne er dog sikret ved å gi intervjuobjektene fiktive navn. I tillegg er ikke skolen navngitt, og resultatene fra oppgaveheftene kan representere en hvilken som helst norsk R1-klasse. Når det gjelder hvem som har hatt tilgang til primærdataene har det vært begrenset til meg selv og min veileder frem til januar, da lydopptakene ble slettet.

Det tredje forskningsetiske prinsippet handler om at ingen informanter skal ta skade av å delta i forskningen. Dette er særlig relevant i forskning som benytter seg av informanter i en krevende livssituasjon, eller dreier seg rundt sårbare temaer (Stigum Gleiss & Sæther, 2021). Jeg anser ikke det matematiske temaet ulikheter som sårbart, ei heller elevene, etter den informasjon jeg har, men det vil likevel være viktig å sikre et godt og trygt miljø for informantene. Særlig under intervjuene passet jeg på å være hyggelig, imøtekommende og interessert. Jeg valgte å gjennomføre intervjuene i et grupperom ved siden av klasserommet, for at elevene skulle føle seg trygge og på hjemmebane. Samtidig fokuserte jeg på å fremstå nysgjerrig og engasjert i spørsmål om deres løsningsstrategier og svar på oppgavene, fremfor kritiserende og pirkete. Etter endt datainnsamling passet jeg på å gå gjennom oppgaveheftet sammen med elevene, for å sikre at alle lærte noe under prosessen. I tillegg uttrykte jeg min takknemlighet overfor elevene i form av ord og kake avslutningsvis.

4. Resultat og analyse

I dette kapittelet skal vi se på de empiriske funnene fra elevenes arbeid med oppgaveheftene og intervjuene. Jeg vil først presentere resultatene fra oppgaveheftene, og deretter greie ut om hva som kom frem under intervjuene.

4.1 Resultater fra oppgaveheftene

Resultatene fra oppgaveheftene vil, sammenlignet med intervjuene, gi et mer helthetlig bilde av hva elevene mestrer, og hvilket nivå de ligger på innen temaet ulikheter. Jeg vil her først presentere resultater av alle oppgavene i en tabell, før jeg går mer inn på de fem oppgavene som ble trukket frem i intervjuene.

4.1.1 Resultater av alle oppgavene

Resultatene fra oppgaveheftene har jeg lagt frem i en tabell, hvor jeg først så på hvor mange av elevene som fikk til oppgaven, hvor mange som nesten fikk den til og hvor mange som ikke fikk den til. Videre så jeg på hvor mange elever som viste tegn til misoppfatninger når det gjelder ulikhetstegnet, og som da tydelig brukte ulikhetstegnet feil. Jeg så også på hvorvidt elevene viste tegn til å gjøre koblinger og se sammenhenger mellom ulikhetene og den grafiske fremstillingen som oppgave 1 består av. Til slutt har jeg en kolonne som forteller om oppgaven blir trukket frem i intervjuet eller ikke. En utdypende forklaring på hva de ulike kolonnene representerer, og hva som for eksempel inngår i å *«bruke ulikhetstegnet feil»*, finnes i kapittel 3.4.1. De cellene hvor jeg har skrevet *« - »* i stedet for tall, har det ikke vært mulig for elevene å for eksempel gjøre geometriske koblinger, eller bruke ulikhetstegnet feil.

Tabell 1: Resultatet etter 23 elevers arbeid med oppgavehefter

Oppgave	Andel elever som fikk den til	Andel elever som nesten fikk den til	Andel elever som ikke fikk den til	Andel elever som bruker ulikhetstegnet feil	Andel elever som viser tegn til å gjøre koblinger til den geometriske fremstillingen	Oppgaven blir tatt opp i intervjuene
1A	23	0	0	-	-	Nei
1B	23	0	0	-	-	Nei
2A	10	7	6	6	1	Ja
2B	4	7	12	9	2	Ja
2C	5	5	13	4	1	Ja
2D	6	2	15	2	0	Ja
2E	6	5	12	5	1	Nei
2F	0	1	22	0	0	Nei
2G	1	0	22	8	0	Ja
3A	17	4	2	4	1	Nei
3B	5	4	14	1	0	Nei
3C	-	-	-	-	-	Nei

Et førsteinntrykk av tabellen tyder på at dette var et vanskelig tema for elevene, og at den matematiske kompetansen er varierende i klassen. Som oftest viser tabellen en overvekt av elever som ikke har fått til oppgaven, og dermed blir det særlig interessant å undersøke hva som gjør det vanskelig for dem.

Det er tydelig at alle elevene har forståelse for hva nullpunkter er, og hvordan man finner dem i en grafisk fremstilling, som var det spørsmålene i oppgave 1 handlet om. Her har alle elevene svart rett på flervalgsoppgavene, noe som gir et godt utgangspunkt for de kommende ulikhetene. Likevel er den andelen elever som viser tegn til geometriske koblinger svært lav, mens andel elever som viser tegn til å bruke ulikhetstegnet feil er relativt høy. De to kolonnene som viser til disse geometriske koblingene og feil bruk av ulikhetstegnet har dog noen svakheter ved at dette er tolket ut ifra elevenes skriftlige løsninger. Hva som har forgått på det kognitive planet underveis er umulig å få svar på ved bruk av oppgavehefter. Kanskje noen elever tenker grafisk uten å vise det? Kanskje noen egentlig ikke forstår ulikhetstegnet, men hadde flaks på en oppgave eller to? Eller kanskje er det slurvefeil som har bidratt til å påvirke resultatene i en eller annen retning? 100% sikkert vil det ikke være, men ettersom elevene fikk god tid på å løse oppgavene, fremgangsmåten var valgfri og oppgavene var relevante for hva de lærte forrige semester, ser jeg på denne tabellen som en god indikasjon på klassens nivå innen dette temaet.

Oppgave 2G er det bare en elev som tilsynelatende har forstått og løst korrekt, mens resten av klassen kategoriseres som å ikke ha fått det til. Den oppgaven blir som vist ikke tatt opp i intervjuene heller, ettersom den tydeligvis er for vanskelig, og jeg sannsynligvis ikke hadde fått noen utdypende resonnement fra elevene.

Videre viser tabellen at flere elever bruker ulikhetstegnet på en feilaktig måte, som får meg til å stille spørsmålstegn ved forståelsen. Studien min handler om elevers matematiske kompetanse innen ulikheter, og her vil en helhetlig og dyp forståelse av ulikhetstegnet være viktig. Det at flere elever viser tydelige tegn til å ikke håndtere det rett, gir et inntrykk av ulikheter som et problemområde.

Fra tabellen ser vi også at det er svært få elever som viser tegn til å gjøre koblinger til den geometriske fremstillingen. Selv om oppgaveteksten for oppgave 2 eksplisitt sier at de kan bruke resultatene fra oppgave 1, er det bare én elev, og på det meste to, som har gjort dette. Det er den samme eleven som gjennomgående bruker den geometriske fremstillingen, mens resten av klassen velger å heller løse ulikhetene algebraisk. Som nevnt i kapittel 2 er det tidligere forsket på at en grafisk tilnærming til ulikheter i større grad vil føre til suksess i utregning og forståelse. Hvorfor elever likevel velger å heller løse det ved bruk av algoritmer er interessant.

Oppgave 3C var en tekstoppgave, hvor elevene skulle skrive ned egne tanker. Resultatet fra den oppgaven fremkommer dermed ikke i tabellen, men heller i et eget avsnitt senere.

4.1.2 Resultater av intervjuoppgavene

Jeg vil her presentere de oppgavene jeg tok for meg i intervjuene, henholdsvis oppgave 2a,b,c,d og g. Oppgave 2a-c åpner opp for spørsmål om den geometriske koblingen, ettersom disse ulikhetene også var fremstilt grafisk i oppgave 1. Oppgave d og g var interessante å spørre om ettersom de i større grad krever en konseptuell forståelse for algebra, og er vanskelig å løse bare ved bruk av algoritmer. I de kommende avsnittene vil jeg presentere oppgaven samt å si noe om hvordan elevene løste den.

4.1.2.1 Oppgave 2A

Oppgave 2A ba elevene om å løse følgende ulikhet: $x^2 - 4x + 4 \leq 0$. Denne funksjonen var også tegnet som graf i oppgave 1, og i oppgaveteksten for oppgave 2 stod det også følgende:

«Du kan gjerne bruke resultatene fra oppgave 1 der det er relevant». Fra «Figur 1» i oppgave 1 (se vedlegg) er det tydelig at denne funksjonen aldri er mindre enn 0, men den er lik 0 i $x = 2$. Elevene kunne valgt å bare se på figuren, og ut ifra den resonnere seg frem til svaret $x = 2$, men fra Tabell 1 overfor ser vi at det bare er én elev som valgte å bruke den geometriske fremstillingen for å komme frem til svaret. Videre fra Tabell 1 ser vi at 10 elever fikk til oppgaven, og 7 fikk den nesten til. 6 elever fikk den ikke til i det hele tatt, og sammenlignet med de andre oppgavene er det et nokså lavt tall.

De elevene som fikk til oppgaven, eller som nesten fikk den til, valgte å faktorisere uttrykket, med unntak av den ene eleven som brukte den grafiske fremstillingen. Abc-formelen ble mest brukt, mens noen så også at en heltallsfaktorisering var mulig. Flertallet av de elevene som ikke fikk til oppgaven, brukte abc-formelen, og brukte den enten feil eller fikk en annen type regnefeil.

Videre i tabellen ser vi at det var 6 elever som viste en feil bruk av ulikhetstegnet. Flertallet av disse ble kategorisert som «Andel elever som nesten fikk den til», ettersom mange av dem fant at rota var 2, men konkluderte med at $x \leq 2$. Her virker det som om elevene behandler ulikheten som en likning, men lar ulikhetstegnet stå som det er når de skriver opp svaret. Ellers har flere elever kommet frem til $x = 2$ ved bruk av abc-formelen, men konkluderer med at $2 \leq 0$, noe som ikke gir mening. Det at elevene behandler ulikheten som en likning, og løser den på nøyaktig samme måte, bekrefter forskningen til Tsamir & Bazzini (2004) og Vauyavutjamai & Clements (2006). Som nevnt i kapittel 2.6.1 er det blant annet den strukturelle likheten mellom likninger og ulikheter som kan gi elevene en følelse av at de skal løses på samme måte, og det hevdes dette tyder på en instrumentell forståelse av temaet.

4.1.2.2 Oppgave 2B

I oppgave 2B ble elevene bedt om å løse følgende ulikhet: $-x^2 + 4x + 5 < 0$. Også denne funksjonen var tegnet opp som graf i oppgave 1, og elevene kunne her velge å bruke grafen for å finne løsningen. Fra tabellen leser vi at det denne gangen var to elever som valgte å gjøre dette. Ellers ser vi at sammenlignet med a-oppgaven, var det færre som fikk til denne oppgaven. Fra 10 elever i oppgave a, var det bare 4 stykker som ble kategorisert som «Andel elever som fikk den til».

Mange av elevene som fikk den til velger å faktorisere uttrykket, helst ved bruk av abc-formelen. Abc-formelen var også den hyppigste metoden hos de elevene som ikke fikk den til, eller som nesten fikk den til. Det negative fortegnet foran annengradsleddet har skapt forvirring hos fler elever, og ført til feil svar og regnefeil hos mange. Det er også noen som bruker abc-formelen riktig, og finner røttene, men stopper der. De løser ulikheten som om det skulle vært en likning, og kommer ikke frem til en mengde x-verdier, men heller bare to røtter.

På denne oppgaven var det hele 9 konkrete eksempler på feil bruk eller misforståelse av ulikhetstegnet. Noen elever har bare kommet frem til røttene, -1 og 5, og skriver dem opp, som om de løste en likning, på følgende måte: $x = -1 \lor x = 5$. Når de setter to streker under et slikt svar viser det en manglende forståelse for hva oppgaven er ute etter. Det kan se ut som om de ikke helt forstår hensikten eller betydningen av ulikhetstegnet, men sier seg fornøyd med å ha funnet nullpunktene. En annen elevbesvarelse som viser manglende forståelse av ulikhetstegnet, er for eksempel: $5 < 0 \lor -1 < 0$. Her har eleven løst polynomet ved korrekt bruk av abc-formelen, men konklusjonen gir ikke mening. 5 vil aldri være mindre enn 0, mens -1 alltid vil være mindre enn 0. En annen feil i ulikhetstegnet som gikk igjen hos flere elever, er svar som: $x < -1 \lor x < 5$. Her ser vi også en konklusjon som ikke gir helt mening matematisk. Det å ha en forståelse for, samt evnen til å håndtere, matematiske symboler er essensielt innen algebra, og, som nevnt i kapittel 2, er det å kunne *bruke* disse symbolene og semiotiske representasjonene en forutsetning for utviklingen av den matematiske kompetansen (Duval, 2006; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)

4.1.2.3 Oppgave 2C

I oppgave 2C fikk elevene presentert følgende ulikhet: $(x - 2)^2 > 0$. De observante elevene vil legge merke til at dette er oppgave *2a* i faktorisert form, og dermed vil de også finne denne som grafisk fremstilling i oppgave 1. Spørsmålet er denne gangen motsatt fra a-oppgaven, og svaret vil da være alle reelle tall bortsett ifra 2. Fra tabellen leser vi at det bare var 5 elever som fikk til denne oppgaven, og 13 som ikke fikk den til. 5 elever fikk den nesten til, som vil si at de har funnet rota $x = 2$, eller skrevet at rota er den samme som i oppgave *a*, men konkluderer likevel med at $x > 2$, eller at x kan være alle reelle tall.

De 5 elevene som fikk til oppgaven var de som så at dette var samme polynom som i oppgave a, men at oppgaven spurte om det motsatte. Det å kunne gjenkjenne og formulere et polynom, samt representere det på ulike vis, er en del av det kompetanseområdet Kilpatrick et al. kaller for *anvendelse* (se kapittel 2.3.1) (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001), og er en viktig del av den matematiske kompetansen. Det vil også være avgjørende med god symbol- og struktursans i denne oppgaven, som beskrevet i kapittel 2.4, for å kjenne igjen uttrykket fra tidligere oppgave. Dette kan det virke som om noen elever mangler.

En feil som gjentar seg blant flere elever i denne oppgaven er at de ønsker å løse opp parentesene for å finne polynomet, noe som er helt unødvendig, og flere av dem utfører det da på følgende måte: $(x-2)^2 \rightarrow x^2 - 4$. Videre tar de kvadratroten av annengradsleddet og 4, og kommer frem til at $x > 2$. Et eksempel på dette er vist som «figur 5» i kapittel 3.4.1. Dette viser at mange elever ikke ser sammenhengen mellom nullpunkter og faktorisert form. Det å se sammenhengen mellom ulike konsepter og deres tilhørende situasjoner krever evnen til *resonnering* (se kapittel 2.3.1). Fra rammeverket til Kilpatrick et al. vil det i denne oppgaven være viktig å kunne *anvende* matematikken rett, samt *resonnere* seg frem til hvorvidt løsningen er legitim (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Begge disse områdene viser elevene utfordringer ved, når de først velger å løse opp parentesene, hvilket er unødvendig og ofte fører til feil, og deretter presenterer en løsning som ikke gir mening.

Videre for denne oppgaven ser vi fra tabellen at 4 elevbesvarelser viser tydelig tegn til en misforståelse eller feilbruk av ulikhetstegnet. Feilbruken her kommer for det meste av svar som $x > 2$, selv om løsningen er $x = 2$. En annen elev konkluderer med $4 > 0$, som viser manglende forståelse av hva ulikhetstegnet skal bidra med i matematikken. 4 vil alltid være større enn 0, og det at en elev velger å konkludere med dette viser også manglende evne til *resonnering*.

4.1.2.4 Oppgave 2D

Ulikheten $5x^4 \leq 0$ har bare en løsning: $x = 0$. Den beste og mest effektive måten å løse denne ulikheten vil være å bare se på den, og tenke seg til at x^4 alltid vil være et positivt tall, og dermed vil det aldri bli noe negativt. x −verdien $x = 0$ vil gi verdien 0, og vil dermed være den eneste løsningen.

Fra tabellen ser vi at det var 6 elever som fikk til denne oppgaven, og av de har de fleste bare sett på ulikheten og konkludert, eller testet for to verdier før de konkluderer. En elev har satt faktorene 5, x^2 og x^2 inn i et fortegnsskjema, og kommet frem til svaret på en kronglete måte, mens en elev har delt på 5 på begge sider, og deretter tatt fjerderoten av x^4 og 0. Disse elevene har også blitt kategorisert som «Andel elever som fikk den til», selv om løsningsstrategiene viser lite forståelse.

Det er ikke en spesiell løsningsstrategi som gjentar seg blant de elevene som ikke fikk den til, men heller mange ulike forsøk. Noen deler det opp, og skriver $5 * x * x * x * x$, mens andre finner $f(0)$. En elev skriver «har ikke peiling, men den deriverte er $20x^3$», mens en annen konkluderer med at $x \leq 0$. Bare to elever har svart blankt, noe som forsikrer meg om at elevene i denne studien har prøvd sitt beste. Selv om det er mange interessante løsningsstrategier som kommer frem i denne oppgaven som ikke fører noen vei, blant annet flere former for algebraisk manipulasjon, er det styrkende for studien å legge merke til at de aller fleste har gitt det et forsøk.

De to elevene som her har vist feil bruk av ulikhetstegnet, har skrevet $24 \leq 0$ eller $5 \leq 0$. Dette gir ikke mening, og indikerer at elevene antakelig ikke tenker så veldig godt gjennom *betydningen* av det de skriver og konkluderer med.

Det å fokusere på strukturer og forhold er viktig i denne oppgaven, og elevene vil dra nytte av en god symbol- og struktursans. Kieran (2014) peker på dette som et av hovedproblemene for elever i algebra, som beskrevet i kapittel 2.4. Overgangen fra aritmetikk til algebra har blitt for brå, og det å se etter strukturer og forhold i stedet for å kalkulere et svar, har ikke blitt en del av elevenes tankesett (Kieran, 2014). Dette kan se ut til å gjelde samtlige elever i denne studien også.

4.1.2.5 Oppgave 2G

Oppgave 2G ber elevene om å løse ulikheten $\frac{2x+3}{4x+6} \geq 2$, som kan løses enkelt ved å tegne graf eller merke seg forholdet mellom teller og nevner som er ½.

Fra tabellen ser vi at det bare er én elev som har fått til denne oppgaven, mens de resterende 22 ikke har fått den til. De aller fleste har her prøvd på diverse algebraisk manipulasjon, og aller helst ønsker elevene å kvitte seg med brøken, noe som gjør at de ganger med nevneren på begge sider. Elevene har varierende hell i den algebraiske manipulasjonen, og de som kommer frem til $x = -\frac{3}{2}$ setter to streker under dette, selv om det er den ekskluderte verdien som gjør at vi får $\frac{0}{0}$. Den ene eleven som derimot har fått oppgaven til, har ikke brukt tid på noe algebraisk manipulasjon, men heller sett at forholdet mellom dem aldri kan bli større enn eller lik 2, og dermed har ulikheten ingen løsning.

Fra Tsamir & Almog (2000) har vi at algebraisk manipulasjon ofte er en foretrukket metode for elever i møte med ulikheter, selv om det også er den metoden som oftest fører til feil. Særlig i rasjonale ulikheter vil algebraisk manipulasjon føre til feil, da elevene glemmer å ta hensyn til de ekskluderte verdiene som fører til et $\frac{0}{0}$ – uttrykk, akkurat som her (Tsamir & Almog, 2000). I tillegg tyder den manglende suksessen fra denne oppgaven på en svak symbol- og struktursans, som handler om evnen til å se sammenhenger og forhold i for eksempel en brøk som dette (Arcavi, 1994; van Stiphout, Drijvers, & Gravemeijer, 2013), som det står mer om i kapittel 2.4.2.

De 8 eksemplene på feil bruk av ulikhetstegnet i denne sammenhengen er for det meste fra elevbesvarelser som konkluderer med $0.5 \geq 2, 2 \geq 2$ eller $2.5 \geq 2$. Dette viser lite relasjonell forståelse av hva ulikhetstegnet betyr, samt en svakhet i elevenes resonneringskompetanse. Det gir ikke mening å skrive at 0.5 er større enn eller lik 2, for det er ikke sant. Kanskje elevene her ikke helt har forstått ulikhetstegnet funksjon og mening? Hele 8 av 23 elever konkluderer med et ulikhetsforhold som ikke gir mening, og dette får meg til å lure på hva de tenker på når de løser ulikheter.

4.1.3 Resultater av oppgave 3C

Oppgave 3C ba elevene om å skrive med egne ord (ikke matematiske symboler) løsningen på oppgave *a* og *b*. Jeg ønsket med dette å se hvordan elevene ordla seg, og hva de tenkte en løsning på en ulikhet betydde. Her fikk jeg 23 forskjellige svar, men jeg ønsker å presentere de svarene som går igjen, og hvilke mønster jeg har bemerket som er relevante for problemstillingen om matematisk kompetanse, representasjoner og misoppfatninger.

Som nevnt i kapittel 3 er det noen svakheter med utformingen av denne oppgaven. Jeg mener likevel det er interessant å trekke frem noen av elevene sine svar, og se hva som går igjen i deres forklaringer. De aller fleste elevene har tolket oppgaven dithen at de skulle forklare hvordan de løste oppgaven. Selv om det ikke var nøyaktig det jeg spurte om, er svarene deres interessante å analysere. Hvordan de formulerer seg gir meg et innblikk i deres tankegang og forståelse.

Flere elever har valgt å løse ulikhetene som likninger, og bekrefter også dette i sin skriftlige besvarelse av denne oppgaven. En elev skriver: *«jeg løste først bare som en likning...»,* og en annen: *«for å finne løsningen ved å regne ut som en vanlig likning»*. Dette finner vi igjen i tidligere forskning, som nevnt overfor, og svaret er dermed ikke overraskende (se kapittel 2.6.1) (Tsamir & Almog, 2000; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Dersom elevene har en instrumentell forståelse for temaet, og for det meste har satt fokus på å lære seg prosedyren, kan dette føre til en overgeneralisering av metoden, og videre gjøre at begrepsdanningen kommer i bakgrunnen (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000).

Noen av svarene til elevene tyder på en instrumentell forståelse av temaet, hvor evnen til beregning virker å stille sterkt. Som svar på oppgaven skriver de ting som: *«...må vi få x-ene på den ene siden, og tallene på den andre», «for å få x-verdien aleine, må en først sortere litt»* og *«jeg flyttet slik at jeg fikk x-ene på den ene siden, og tallene på den andre»*. Ut ifra oppgavens tvetydige formulering er det ikke overraskende at elevene har valgt å svare på en slik måte, og forklarer hva de har gjort. Det er likevel interessant at det er den instrumentelle beskrivelsen av prosedyren som blir sett på som fremgangsmåten.

Svært få elever svarer på en måte som viser til relasjonell forståelse, som for eksempel ved å skrive at funksjonsuttrykket $f(x) = x - 3$ er en lineær funksjon som har ett nullpunkt i $x = 3$, og er dermed større enn null når x er større enn 3. Det er bare en elev som har gitt et svar som ikke bare handler om det instrumentelle, og vedkommende skriver: *«Funksjonen f(x) er større enn 0 når x-verdien er høyere enn 3»*. Her viser eleven en tilsynelatende relasjonell forståelse for x som variabel, og god kjennskap til ulikhetstegnet og dets funksjon.

4.2 Resultater fra intervjuene

Resultatene fra oppgaveheftene gav meg blant annet indikasjoner på hva jeg ønsket å spørre elevene om. Jeg vil her presentere de tre intervjuene jeg holdt med Kari, Per og Else (fiktive navn), med utgangspunkt i oppgavene og holdninger til matematikkundervisningen.

4.2.1 Kari

Kari ble valgt ut til intervju fordi hun stort sett representerer gjennomsnittet av klassen. Hennes svar og løsningsstrategier var som hos flertallet, og dermed antok jeg at hennes tanker og kompetanser var noe som gikk igjen hos flere. I løsningen av oppgaveheftet hadde hun en del rett, for det meste ved bruk av algebraisk manipulasjon, men hun så ikke så mange sammenhenger med for eksempel de grafiske fremstillingene, noe som også gjaldt flertallet.

Kari viser i flere tilfeller tegn til en overvekt av instrumentell forståelse av matematiske ulikheter, og det kan virke som om abc-formelen er en prosedyre hun har lært seg godt, og mestrer, og dermed ønsker hun å bruke den. Til og med på oppgave 2*c*, som tar for seg en ferdig faktorisert form av polynomet, $(x - 2)^2$, starter hun med å gange ut parentesen, for så å bruke abc-formelen. I løpet av intervjuet ønsker jeg å få svar på hvordan hun tenker og jobber med matematikken, og jeg spør henne først hva hun tenkte da hun løste oppgave 2a.

Kari: *Ja det så jeg at det var en annengradslikning, også lette jeg etter tall a, b og c, også brukte jeg abc-formelen.*

I spørsmålet om de andre oppgavene som innebar et annengradspolynom svarte hun omtrent det samme, at hun ønsket å finne tall a, b og c, for så å bruke abc-formelen. Måten hun snakker og forsvarer sine matematiske tanker på fremstår instrumentelt ettersom hun svarer ved å fortelle hvilken prosedyre hun valgte. Jeg som intervjuer spør henne hva hun *tenkte*, mens hun svarer hva hun *gjorde*. Hun viser kompetanse til beregning, som beskrevet av Kilpatrick et al.(2001), og har fokus på prosedyre.

Videre på oppgave $2b$: $-x^2 + 4x + 5 < 0$, har Kari igjen brukt abc-formelen, og svart $-1 < x < 5$. Verdiene -1 og 5 er riktignok nullpunkter, men svaret på ulikheten er annerledes. For at polynomet skal være mindre enn null, må x være i området $(\leftarrow, -1) \vee (5, \rightarrow)$. Jeg spør henne hva hun selv tenker at svaret sitt betyr.

Intervjuer:	*Her har du fått to verdier, -1 og 5. Kan du forklare hvordan det svaret er formulert?*
Kari:	*Eh, ja. Ehm, hvis ehm x er større enn (......) vent, hvis x er større enn -1 og mindre enn minus, nei mindre enn 5, så blir det, så blir svaret positivt, og hvis det er mindre så er det negativt.*

Kari sliter med å sette ord på hva $-1 < x < 5$ betyr, eller hvordan man sier det med ord, kan det virke som. Det er flere ting som ikke stemmer overens matematisk i det hun sier, og det er tydelig at hun er usikker. Kan det hende at hun ikke er vant til å *snakke* matematikk, men bare *gjøre* det? Eller er det tilfelle at hun ikke husker så mye av ulikheter og hvordan man jobber med det? Det kan likevel virke som om hun har noe forståelse for sammenhengen med den grafiske fremstillingen, da hun har skrevet at grafen krysser x-aksen i -1 og 5. Når jeg spør henne om dette, svarer hun *«Atte grafen går gjennom de to punktene der, eh, der y er 0»*. Det å se en sammenheng mellom representasjoner på denne måten, og dermed også kunne forsvare svarene sine, krever evne til resonnering, som beskrevet i kompetanserammeverket i kapittel 2.3.1. Selv om Kari har svart feil på oppgaven, viser hun noe evne til resonnering da hun ser sammenhengen mellom algebraisk og grafisk form.

I oppgave 2G skal elevene finne ut når $\frac{2x+3}{4x+6} \geq 2$. Her har Kari prøvd diverse algebraisk manipulasjon, og til slutt kommet frem til «ingen løsning», som er rett svar på ulikheten, men jeg lurer på om hva hun tenker om det svaret.

Kari: *Eh, jeg tenkte det lignet på sånn, eh, sånn ligning med brøk.*

Intervjuer: *Ja*

Kari: *Så da fant jeg asymptotene, men så skjønte jeg at det har jo egentlig ingenting med det å gjøre. Så jeg regna ut her, så brukte jeg sånn limit, også da ble det (...) Ja, da fikk jeg, da tror jeg at jeg fikk ingen løsning, men jeg er litt usikker.*

Intervjuer: *Ja, du skrev «ingen løsning», også et lite spørsmålstegn bak.*

Kari: *Ja*

Rasjonale likninger og asymptoter var kompetansemål i matematikk 1T, og er dermed noe Kari husker fra fjoråret. Hun har god kjennskap til ulike prosedyrer i matematikken, som for eksempel hvordan man regner ut asymptoter, og tar grenseverdier, men den begrepsmessige forståelsen og evnen til anvendelse og resonnering viser seg ikke i denne sammenhengen.

Videre i intervjuet ønsker jeg å vite hva Kari fokuserer på når hun lærer matematikk. Hva er viktig for henne å forstå når læreren underviser? Er det hvorfor metoden fungerer, eller er det hvordan? Bruker hun mye tid på å verifisere en matematisk metode, eller pugger hun den? På spørsmålet om hva hun legger vekt på svarer hun følgende:

Kari: *Da pleier jeg å liksom, ehm, når vi får nye formler eller nye fremgangsmåter, så pleier jeg å liksom jobbe mye med oppgaver for å huske den og lære hvordan jeg skal bruke den.*

Intervjuer: *Ja. Så jobbe mye for å få det inn, på en måte?*

Kari: *Ja. I stedet for å pugge formelen, men liksom lære den.*

Intervjuer: *Mhm. Er det da viktig for deg å lære hvorfor formelen fungerer som den gjør også?*

Kari: *Ehm.*

Intervjuer: *Eller er det mindre viktig?*

Kari: *Det varierer litt. Det er ikke alltid jeg bryr meg så mye.*

Kari er opptatt av å jobbe mye for å få metoden og prosedyren til å sitte ordentlig. Det er ikke alltid hun bryr seg om hva som ligger bak en algoritme, så lenge hun klarer å bruke den. Å ha engasjement i matematikken handler om å se verdien og meningen i faget, og *tro* at det lønner seg å arbeide med den. Kari er tydelig på at det er viktig å jobbe, men det at hun ikke alltid bryr seg så mye om begrunnelser, gir meg et inntrykk av at hun ikke helt ser verdien heller.

Oppsummert viser Kari god kjennskap til prosedyrer, med abc-formelen som en særlig favoritt. Det at hun ikke velger å bruke andre former for faktorisering, eller at hun velger å løse opp en et ferdig faktorisert uttrykk for å bruke abc-formelen viser lite evne til resonnering. En god evne til anvendelse av matematikken kommer heller ikke tydelig frem hos Kari, noe som kan tyde på at hun ikke har særlig evne til anvendelse, eller at oppgavene ikke la opp til det. Den begrepsmessige forståelsen

4.2.2 Per

Per var en av de elevene som hadde fått til mest på oppgaveheftet, og dermed er han et interessant intervjuobjekt. Hva slags kompetanse og forståelse viser han tegn til når det gjelder matematiske ulikheter? Han viser ingen tegn til å bruke funksjonene på første side for å løse ulikhetene, og jeg er nysgjerrig på om han ser en sammenheng der eller ikke.

På oppgave 2A, $x^2 - 4x + 4 \leq 0$, svarer Per utfyllende på hva han har gjort.

Intervjuer: *Egentlig så lurer jeg bare på hva du har tenkt. Hvis vi begynner med a-oppgaven, hva tenkte du på den oppgaven her?*

Per: *Begynte med å faktorisere. Og da brukte jeg den heltallsfaktorisering som vi lærte på T, også ser jeg at eh, det er det samme som $(x-2)^2$. Ehm, også begynte jeg jo å sette opp et fortegnsskjema med x^2, nei, $(x-2)$ og $(x-2)^2$, også ser jeg at det blir negativt hvis x var mindre enn 2, også ble det positivt hvis x var større enn to.*

Intervjuer: *Mhm*

Per: *Også gjorde jeg det på alle faktorene, så la jeg de sammen, også ser jeg at det blir to negative her, og da blir det positivt også to positive, så det blir positivt. Også spør han jo når tid den er mindre enn eller lik, og den er jo aldri mindre, men han er lik null i 2. Så da er svaret 2.*

Her viser Per tegn til en konseptuell forståelse av ulikheten, ved at han konkluderer med å si *«...den er jo aldri mindre, men han er lik null i 2.»* Han har en forståelse av hva det vil si når ulikhetstegnet peker en gitt retning, og hva oppgaven er ute etter. Også da han ble spurt om b-oppgaven, svarer han på en måte som viser tegn til konseptuell forståelse:

Per: *Også fikk jeg at x var mindre, nei x var negativt, nei grafen var negativ hvis x var mindre enn -1, også positiv mellom -1 og 5.*

Intervjuer: *Mhm*

Per: *Og han spurte jo om han var, når tid han var mindre enn 0, så da er det jo fra -1 og utover, og fra 5 og utover*

Her viser han, til tross for noen omveier, en forståelse for x som variabel. Inntrykket av Per er at han forstår mye av matematikken, og at ulikheter er noe han husker og har forstått godt. Det virker også som om han liker å løse ulikheter på en algebraisk måte, uten en grafisk fremstilling. Når jeg spør han om hvorfor han ikke bruker de grafiske fremstillingene mer aktivt svarer han:

Intervjuer: *Hva syns du om sånne grafiske fremstillinger som i oppgave 1. Syns du det gir oppklaring, eller syns du det er mer et sånn tillegg – at det ikke er nødvendig?*

Per: *Jeg syns egentlig det var litt sånn tillegg.*

Intervjuer: *Ja. Så du hadde ikke trengt den informasjonen?*

Per: *Nei. Men den er jo grei for å se om det stemmer og sånn.*

Intervjuer: *Ja, absolutt.*

Per: *Men ikke nødvendigvis for utregningen.*

Han bruker grafene for å sjekke at han har regnet rett. Det viser at han har forståelse for hva grafene betyr, og sammenhengen mellom grafisk og algebraisk fremstilling.

4.2.3 Else

Else ble valgt ut som intervjuobjekt fordi hun flere plasser roter litt med ulikhetstegnet, og jeg er nysgjerrig på hvordan hun forklarer sine løsninger. Den løsningsstrategien som går igjen hos Else, på hver eneste ulikhet, er at hun prøver seg på algebraisk manipulasjon, og har som mål å stå igjen med en eller to verdier for x.

På oppgave 2A har hun faktorisert uttrykket, og fått ut verdien 2. Svaret er at x må være lik 2, men Else har svart $x \leq 2$.

Intervjuer: *Kan du forklare hva svaret ditt betyr?*

Else: *Eh, det betyr at eh, 2 er enten er lik, nei x er enten er lik eller større enn 2.*

Ut ifra måten Else svarer på her, med å si at x *er lik eller større enn 2*, indikerer en noe manglende forståelse for ulikheter. I oppgaveheftet svarte hun $x \leq 2$, altså at x er mindre enn eller lik 2, mens i intervjuet sier hun at *x* er større enn eller lik 2. Hun sitter med oppgaveheftet foran seg under intervjuet, og leser av sin egen løsning, men svarer likevel det motsatte. Det rette svaret på oppgaven er at $x = 2$, men Else har, som flertallet ellers i klassen, latt ulikhetstegnet stå som det ble gitt i oppgaven. Det kan virke som om hun løser ulikheten som en likning, hvor eneste forskjell er et ulikhetstegn som erstatter likhetstegnet. Denne oppfatningen bekreftes til en viss grad videre i intervjuet:

Intervjuer: *At x enten er større enn eller lik 2. Hva skjer når.. Eller hva vil det si, at x er større enn eller lik 2? Kan det ikke være (...) 1, for eksempel, eller 0 eller..*

Else: *Eh.. (.....) Nei det handler vel om når du setter inn i x-en da. Så skal du jo til slutt ende opp med 0 (...)*

Intervjuer: *Mhm. Du skal ende opp med 0, ja. Altså, du skal finne ut når dette her er 0, eller? Er det det du mener, eller misforstår jeg?*

Else: *Jo, er lik eller (......) Ja.*

Intervjuer: *Mhm. Hadde det, ehm, hvis det hadde stått* $x^2-4x+4=0$*, hadde du løst den annerledes da, eller hadde du gjort akkurat det samme?*

Else: *Da hadde jeg gjort akkurat det samme.*

Else hadde gjort akkurat det samme dersom det var snakk om en likning som skulle løses, og det bekrefter antakelsen om at hun har et mål om å finne en eksakt verdi for hva x *må være* i dette tilfellet. Videre på oppgave 2A spør jeg henne:

Intervjuer: Vet du noe som når den er *mindre enn eller lik* 0? Den er jo lik 0 i 2. Når er den mindre enn 0?

Else: *(...) Ehm. Det var et godt spørsmål, hehe.*

Å arbeide med ulikheter handler om å for eksempel finne ut når noe er mindre enn eller lik en gitt verdi. Else har svart på alle oppgavene i oppgaveheftet, og har som sagt vist at algebraisk manipulasjon er den metoden hun som oftest går for. Det kan virke som om prosedyren er noe hun har pugget, men kanskje ikke egentlig *forstått.* En instrumentell forståelse er det som later til å gå igjen, både i løsningen av oppgaveheftet og i intervjuet. Videre om oppgave 2A ønsker jeg å finne ut om en kobling til den grafiske fremstillingen er noe hun forstår.

Intervjuer: *Mhm. Det står her at du kan bruke resultatene fra oppgave 1 der det er relevant. Vil du si at det er relevant for denne her? Så du noen sammenheng?*

Else: *Nei, jeg brukte egentlig ikke disse.*

Intervjuer: *Nei. Så hvis du ser på den* (peker på den grafiske fremstillingen) *så er jo det akkurat den samme.* $x^2 - 4x + 4$

Else: *Ja*

Intervjuer: *Og hvis jeg spør deg: når er denne funksjonen her, når er denne mindre enn eller lik 0? Klarer du å se det?*

Else: *Når den går, krysser 4?*

Intervjuer: *Når den krysser 4 på y-aksen?*

Else: *Ja.*

Som alle andre har Else svart rett på hele oppgave 1, som var en avkrysningsoppgave hvor de skulle se på de tre grafiske fremstillingene, og krysse av for rett svar når det gjaldt nullpunkter. Funksjonen fra oppgave 2A krysser y-aksen i y=4, og her kan det virke som om Else tenker at da er funksjonen mindre enn eller lik 0 på venstre siden av y-aksen, og større enn eller lik 0 på høyre siden. Det er også en mulighet at hun misforstod spørsmålet mitt, eller at hun hadde trengt mer tid på å svare, men alt i alt er det mye som tyder på at Else ikke er vandt til å koble ulikheter til en grafisk fremstilling, og bruke det som løsningsmetode. En systematisk bruk av forskjellige representasjoner, såkalt MRs (se kapittel 2.5) er viktig i utviklingen av god begrepsforståelse i matematikk (Justnes, 2018), noe Else viser svakheter i.

Algebraisk manipulasjon er som nevnt en foretrukket løsningsmetode for Else. Også i oppgave 2C, hvor jeg spør om $(x-2)^2 > 0$, har hun valgt å manipulere uttrykket for å kvitte seg med parentesen. Hun sier: *«også vil jeg jo ha x på ei side»,* og snakker for det meste om prosedyren i seg selv. Det skjer likevel en feil i denne utregningen, og hun ender opp med å få $x^2 - 4$. Hun tar kvadratroten av begge to, og ender opp med $x = 2$.

Oppgave 2E er en tredje variant av den første funksjonen, og her blir ulikheten satt opp på følgende måte: $x^2 - 4x + 3 \leq -1$. Her har Else flyttet over leddet med -1, og i samme slengen har hun snudd ulikhetstegnet.

Else: *Ja, først så faktoriserte jeg den, men så fikk jeg jo 1 utenfor til slutt, også visste jeg ikke helt hva jeg skulle gjøre. Så fant jeg ut at det var enklere å bare sette 1 over med en gang*

Intervjuer: *Mhm*

Else: *Så det var det jeg gjorde, også faktoriserte jeg, også kom jeg fram til et svar.*

Intervjuer: *Mhm, og her har du snudd på ulikhetstegnet*

Else: *Ja, for her er det som jeg har plussa med 1 for å få liksom, siden det står -1, så vil jeg at det skal bli 0, så da må jeg plusse på 1 på begge sider, og da må jeg snu ulikhetstegnet.*

Intervjuer: *Har du noen tanke om hvorfor du må det?*

Else: *Ehm, det er vel, det er vel en viktig regel i forhold til ulikhet? Men jeg har aldri tenkt på hvorfor.*

Her har hun først prøvd å faktorisere uten å flytte på 1-tallet, men kom til slutt frem til at det var enklere å bare flytte over 1-tallet med en gang. Dette viser at hun er fleksibel i bruk av prosedyren, og vet at det finnes flere måter å gjøre det på, men at ofte er det en måte som er enklere og «finere» enn en annen. Det hun likevel gjør feil er å snu på ulikhetstegnet når hun flytter på -1-leddet, og i tillegg begrunner hun det med at det vel er en viktig regel i forhold til ulikhet. Det kan virke som om Else har pugget en del regler og prosedyrer, uten å bry seg så veldig om *hvorfor* det er en regel, og *hvorfor* det fungerer på den måten. Dette gjør at hun glemmer nøyaktig hvordan regelen var, og ender opp med å bruke den feil.

4.3 Oppsummering

Ut ifra elevbesvarelsene og intervjuene har jeg fått et inntrykk av hvordan elevene forstår og jobber med algebra og ulikheter. Resultatene som er presentert i dette kapitlet tar utgangspunkt i problemstillingen, og det er elevenes viste matematiske kompetanse samt misoppfatninger som jeg finner relevant. Ut ifra elevenes løsninger av oppgaveheftet leser jeg at ulikheter er et tema som ikke ligger friskt i minne hos flere av dem, noe som ikke er så rart ettersom det var en del av kompetansemålene for matematikkurset 1T, og ikke R1. Videre kan det virke som om ulikhetstegnet skaper forvirring, og at elevene ikke er vant til å bruke grafisk fremstilte funksjoner for å løse ulikheter. Dette med mer vil diskuteres ytterligere i kapittel 5.

5. Funn og drøfting

I dette kapittelet skal jeg presentere mine funn basert på datamaterialet. I problemstillingen har jeg stilt følgende spørsmål:

> *Hvilke kompetanser og representasjoner bruker R1-elever når de løser ulikheter av første og andre grad, og hvilke eventuelle misoppfatninger og utfordringer viser de?*

Ut ifra elevenes løsninger av oppgaveheftene, og deres ytringer under intervjuene, har jeg kommet frem til tre hovedfunn som jeg nå vil gå nærmere inn på.

5.1 Funn 1: Instrumentell forståelse av ulikheter

Det første funnet jeg vil trekke frem, er at flere elever viser tegn til en instrumentell forståelse av temaet ulikheter, og den prosedurale flyten vektlegges da. Som definert av Skemp, og forklart i kapittel 2.3.2 handler en instrumentell forståelse om å kunne gjennomføre en lært prosedyre, men å ikke forstå hva som ligger bak (Skemp, 1976). Dette viser seg ut ifra elevenes løsninger av oppgaveheftene, og kommer også til syne gjennom intervjuene. Et sitat som understreker dette, er det sitatet som også brukes som tittel på denne studien, da jeg mener det er forklarende og gjengående i elevenes ytringer. Jeg spør eleven om hvorfor hun har valgt å skifte vei på ulikhetstegnet etter å ha flyttet leddet -1 over fra venstre side til høyre side. Da svarer eleven:

> *Ehm, det er vel, det er vel en viktig regel i forhold til ulikhet? Men jeg har aldri tenkt på hvorfor.*

Som nevnt i kapittel 4 er det rimelig å anta at eleven her har pugget prosedyren uten forståelse, og dermed glemt nøyaktig hvordan det fungerer. Brekke, Grønmo og Rosèn påpeker at manglende konseptuell forståelse kan føre til overgeneralisering og fare for å glemme (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000), og her virker det tydelig at eleven har overgeneralisert regelen som handler om å snu ulikhetstegnet.

Hvordan man som elev angriper matematikken og tenker om egen læring vil også påvirke læringsutbyttet. En elev forteller i intervjuet at hun pleier å *jobbe* mye med oppgaver for å *huske* formler, og lære seg hvordan hun skal bruke dem. Her leser vi verbene *jobbe, huske* og *bruke*, hvilke tyder på en kompetanseutvikling med overvekt på det område som Kilpatrick et al. kaller «*beregning*» (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Et såpass sterkt fokus på prosedyrer og memorering fører ofte til at forståelsen er instrumentell (Skemp, 1976).

Fra elevenes arbeid med oppgaveheftene ser vi også tegn til instrumentell forståelse. Et eksempel finner vi ved å sammenligne resultatet av oppgave 2a, 2c og 2e. Disse tre deloppgavene representerer det samme annengradspolynomet, bare i ulik fremstilling.

2a: $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

2c. $(x-2)^2 > 0$

2e: $x^2 - 4x + 3 \leq -1$

2a viser polynomet på den kjente formen $ax^2 + bx + c$ på venstre siden og 0 på høyresiden. For de fleste elever vil denne formen være kjent fra undervisning og lærebøker. *2c* viser polynomet i faktorisert form, som er det man som regel ønsker å finne når man løser annengradsulikheter. *2e* viser det samme polynomet, bare noe forskjøvet. Ved å addere med 1 på begge sider, vil man komme frem til det samme polynomet som i oppgave *2a.* Fra Tabell 1 leser vi resultatene fra disse oppgavene. Et utdrag av tabellen tas med her:

Tabell 2: Utdrag av Tabell 1

Oppgave	Andel elever som fikk den til	Andel elever som nesten fikk den til	Andel elever som ikke fikk den til
2A	10	7	6
2C	5	5	13
2E	6	5	12

Oppgave 2a var den flest elever fikk til. En grunn til det kan være at den er fremstilt på en måte som er lett gjenkjennelig for elevene, med 0 alene på den ene siden. Det at *«andel elever som fikk den til»* ganske nøyaktig halverer seg fra oppgave 2a til 2c, og omtrent også til 2e tyder på at elevene har en instrumentell forståelse av ulikheter. De er ikke fleksible i sine løsningsstrategier, og ser ikke klare sammenhenger mellom et polynoms faktoriserte form og den klassiske fremstillingen $ax^2 + bx + c$. Det er også et tegn på en svak struktursans. Som beskrevet i kapittel 2.4.2, krever det en form for struktursans for å bruke likeverdige strukturer av et uttrykk på en fleksibel og kreativ måte (Linchevski & Livneh, 1999). Kieran (2014) peker også på nettopp dette som et av hovedproblemene i elevers algebravansker. De sliter med å *gjenkjenne* og *bruke* strukturer (Kieran, 2004)

Når den instrumentelle forståelsen dominerer i et emne som algebra, er det fare for at elevene både glemmer fort og utvikler misoppfatninger (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000). For å igjen sitere Skemp, vil en instrumentell forståelse ikke bære elevene i lengden:

> *Intsrumental understanding I would until recently not have regarded as understanding at all* (Skemp, 1976, s. 2)

5.2 Funn 2: Svakhet i elevenes bruk og forståelse av ulikhetstegnet

Det andre funnet jeg vil trekke frem er at elevene viser en svakhet i sin forståelse og bruk av ulikhetstegnet, som tyder på en mangelfull begrepsutvikling. Dette kommer først og fremst til syne i tabell 1 (resultat av oppgaveheftene), hvor den fjerde kolonnen representerer *«andel elever som bruker ulikhetstegnet feil»*. Høyest andel her finner vi på oppgave 2*b*, med 9 elever som bruker ulikhetstegnet feil, og oppgave 2*g* hvor 8 elever viser feil bruk. I oppgave 2b ble elevene bedt om å løse følgende ulikhet:

$$-x^2 + 4x + 5 < 0.$$

Svaret på denne oppgaven er intervallet:

$$x \in (-\infty, -1) \lor (5, \infty).$$

Det som likevel flere elever har svart på denne oppgaven, og som da tyder på svakhet i deres bruk og forståelse av ulikhetstegnet er følgende:

$$x < -1 \lor x < 5$$

Her har elevene kommet frem til riktige røtter, men fremstiller dem på feil måte. At x må være mindre enn -1 er helt rett, men elevene skriver videre at x må være mindre enn 5. Dette gir ikke mening, fordi dersom x er mindre enn -1, så vil det følge at x er mindre enn 5. Flere elever har svart på denne måten, og en lignende løsning går også igjen i noen av de andre oppgavene.

Noe jeg legger merke til er at ulikhetstegnet beholder samme retning fra oppgavens utforming til elevenes svar. Kanskje elevene ikke helt og fult forstår hva ulikhetstegnet *betyr* i møte med annengradspolynomer? Vi vet fra tidligere forskning at elever ofte behandler ulikheter som likninger, hvilket denne studien bekrefter. Elevene er vant med likhetstegnet, som aldri skifter retning eller betyr noe annet enn «er lik», og dermed behandler de ulikhetstegnet på samme måte. De lar det stå slik det ble presentert av oppgaven, uten å tenke gjennom hva det representerer. Elevene viser ikke et eierskap og en fleksibilitet i møte med ulikhetstegnet, og da er det rimelig å anta at de ikke har en begrepsmessig forståelse til temaet. Kanskje det overdrevne fokuset på regler, formler og algoritmer i undervisningen har gått på bekostning av elevenes begrepsdannelse? (Brekke, Grønmo, & Rosèn, 2000)

Det er også en mulighet at en feil som eksemplifisert overfor er en slurvefeil, men når den samme typen feil gjentas på flere oppgaver, tyder det på en misoppfatning eller svakhet som ikke er tilfeldig. Brekke påpeker at feil er tilfeldige, mens misoppfatninger ikke er tilfeldige, men at det ofte ligger en bestemt tenkning bak (Brekke, 2002). Feil er noe de fleste matematikere begår fra tid til annen, mens en misoppfatning er viktig å ta tak i og avverge for å sikre at videre læring bygger på rett kunnskap.

Fra intervjuene viser elevene svakhet i sin forståelse av ulikhetstegnet på ulike måter. Et typisk eksempel på dette er når en elev blir bedt om å formulere svaret sitt.

> *«Eh, ja. Ehm, hvis ehm x er større enn (......) vent, hvis x er større enn -1 og mindre enn minus, nei mindre enn 5, så blir det, så blir svaret positivt, og hvis det er mindre så er det negativt.»*

Eleven viser her en usikkerhet og tvilsom forståelse for ulikheter. Det virker som om eleven ikke fult og helt kjenner til ulikhetstegnet, og hva det representerer. Hun sliter med *«større enn»* og *«mindre enn»*, og i tillegg konkluderer hun med at det er *svaret* som blir positivt eller negativt. Dybdelæring, som omtalt i kapittel 2.2, innebærer en varig forståelse av blant annet begreper (Utdanningsdirektoratet, 2019), mens elevenes tilsynelatende svakhet i bruk og forståelse av ulikhetstegnet kan være en indikasjon på overflatelæring som fort blir glemt.

5.3 Funn 3: Elevene bruker i liten grad ulike representasjoner

Det tredje funnet jeg ønsker å trekke frem er at elevene ikke ser verdien og nytten i å skifte mellom ulike representasjoner, for eksempel fra algebraisk til geometrisk fremstilling. I oppgaveteksten for oppgave 2, presiserte jeg tydelig et ønske om at elevene skulle benytte seg av de grafiske fremstillingene, og jeg skrev: *«Du kan gjerne bruke resultatene fra oppgave 1 der det er relevant».* Fra tabell 1 kan vi lese fra den femte kolonnen *«andel elever som viser tegn til å gjøre koblinger til den geometriske fremstillingen».* Her er det høyst to elever, men som regel én eller null, som viser tegn til dette. På fler av oppgavene kunne elevene valgt å lese av svaret fra de grafiske fremstillingene, men den metoden var det bare én elev som benyttet seg av.

Som beskrevet i kapittel 4.2.2, hevder Per at de grafiske fremstillingene ble litt som et unødvendig tillegg, men at det kunne være greit for å sjekke om han hadde fått rett svar og sånn. Ut ifra både resultatene fra oppgaveheftene og intervjuene er Per den eleven som har vist den mest solide og fleksible matematiske kompetansen, men likevel virker det ikke som om han ser nytten i å bruke ulike representasjoner, da han oppgir å ikke *bruke* de grafiske fremstillingene for å løse ulikhetene. Kanskje er det en uvant måte å jobbe med matematikk på? Else var derimot tydelig på at hun ikke brukte de grafiske fremstillingene, men gir ikke en forklaring på hvorfor. Kari hevder å ty til den grafiske fremstillingen når hun møter avanserte funksjoner, men viser ingen tegn til det i sin løsning av oppgaveheftet, så det er litt vanskelig å forstå hva hun mener med avanserte funksjoner.

Det å gjenkjenne matematiske problemer og representere dem på ulike vis er en del av kompetanseområdet som Kilpatrick et al. kaller for «*anvendelse*» (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001), som er ytterligere beskrevet i kapittel 2.3.1. Evnen til å skifte mellom ulike representasjoner, som beskrevet i kapittel 2.5, spiller også en viktig rolle i elevenes mestring av matematikk når det gjelder å se sammenhenger og *gjøre* matematikk (Niss, et al., 2002). Det at elevene her i svært liten grad velger å benytte seg av de grafiske representasjonene, kan komme av at de ikke er vant til å skifte mellom representasjoner, og at det dermed ikke føles naturlig for dem. Vi vet at bruken av ulike representasjoner i matematikk er viktig for forståelsen (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016), og at undervisningen bør fokusere på dette (Justnes, 2018). Samtidig vet vi at det ofte blir sett på som et svakhetstegn å benytte seg av ulike representasjoner og visuelle fremstillinger, men Boaler et al.(2016) er tydelig på at dette er viktig for utviklingen av dyp matematisk forståelse. Denne studien bekrefter det tidligere forskning av blant annet Adu-Gyamfi, Stiff & Bossè påpekte, nemlig at elever sliter med overgangen fra en representasjonsform til en annen. Særlig innen et tema som algebra og ulikheter påstår jeg at elevene vil dra stor nytte i å bruke ulike representasjoner når de introduseres for og arbeider med ulikhetene, noe svært få elever i denne studien ønsket å gjøre.

5.4 Oppsummering

Når R1-elevene fra denne studien løser ulikheter, viser det seg å være ved hjelp av kompetansen *«beregning»* (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001). Flere eksempler fra datamaterialet tyder på en instrumentell forståelse blant elevene, hvilket også kan kobles opp mot de andre hovedfunnene. En instrumentell forståelse av temaet vil føre til at man fortere glemmer, og overgeneraliserer regler og prosedyrer, hvilket kan være medvirkende for elevenes tilsynelatende svakhet i forståelse og bruk av ulikhetstegnet. Videre viser de å sjelden benytte seg av ulike representasjoner, som også krever relasjonell forståelse. Elevenes kompetanse innen ulikheter virker å begrense seg noe til det område Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) kaller «*beregning*», mens de andre «trådene» i kompetanserammeverket ikke virker å være like godt utviklet.

6 Konklusjon og videre forskning

Jeg vil nå koble resultatene mine opp mot de opprinnelige forskningsspørsmålene.

6.1 Forskningsspørsmålene

6.1.1 Hvordan løser elevene ulikheten, og hvordan tolker de svaret?

Når det gjelder dette første forskningsspørsmålet, viser funn 3 at elevene i stor grad kun bruker én innlært metode, uten å trekke inn ulike representasjoner. En favorisert metode som går igjen er abc-formelen, og flere elever bruker den til tross for at andre metoder er både mer effektive og tilgjengelige. Noen elever velger også å benytte seg av andre faktoriseringsmetoder, og det som går igjen for omtrent alle besvarelsene er at elevene benytter seg av en form for algebraisk manipulasjon. Fra Kierans GTG-modell beskrevet i kapittel 2.4.2 har vi blant annet de *transformerende* aktivitetene, som er de regelbaserte og handler om manipulasjon av algebraiske uttrykk (Kieran, 2004). Når et stort flertall i klassen velger en algebraisk manipulasjon som løsningsstrategi, til tross for at denne metoden ikke er mest effektiv, kan det tyde på en undervisning som består mye av transformerende aktiviteter.

Som beskrevet i kapittel 2.4.2, krever det en form for matematisk modenhet å motstå den fristelsen det er å angripe en likning eller ulikhet med algebraisk manipulasjon (Arcavi, 1994). Det indikerer svak symbolsans å benytte seg av den samme prosedyren gang på gang, selv når dette ikke er det mest effektive. Dette var tilfellet for flertallet i denne klassen.

6.1.2 Hvordan bruker elevene sammenhengen mellom den algebraiske løsningen og den grafiske løsningen?

Dette forskningsspørsmålet kan enkelt besvares ved å skrive: «de bruker den ikke». Det tredje funnet som jeg trakk frem overfor var at elevene i liten grad brukte de ulike representasjonene, og det kan tyde på at de ikke helt forstår sammenhengen. Det var riktignok flere elever som under intervjuene hevdet å se en sammenheng, ved at de gjenkjente polynomet fra figuren. Likevel var det svært få elever som faktisk *brukte* den informasjonen de fikk fra de grafiske fremstillingene til å løse ulikheten. Det er viktig at elevene får ta i bruk ulike representasjoner, og se sammenhenger i matematikken. Det å løse ulikheter grafisk er også tidsbesparende, og det gir en dypere forståelse for funksjoner. Det vil være hensiktsmessig for elevenes forståelse å introdusere dem for ulike løsningsstrategier og representasjoner for å i større grad oppnå dybdelæring De er muligens vant til å se på en graf for å identifisere nullpunkter og ekstremalpunkter, men mindre belært i hvordan man *bruker* informasjonen som grafen gir til å løse en gitt ulikhet. Algebra er, som tidligere nevnt, utfordrende for norske elever. Justnes peker på viktigheten av en matematikkundervisning som systematisk legger til rette for flere representasjoner, såkalte MRs (Multiple Representations) (Justnes, 2018), for å øke elevenes begrepsforståelse. Visuelle fremstillinger av matematikken er ikke bare for svake elever, som flere elever og lærere ofte tenker, men for alle elever i alle trinn og emnekoder (Boaler, Chen, Williams, & Cordero, 2016).

6.1.3 Er det primært en relasjonell forståelse, eller en instrumentell forståelse av temaet ulikheter som dominerer?

Det første funnet som ble presentert her var at elevene har en instrumentell forståelse av temaet ulikheter. En relasjonell forståelse kan sammenlignes med den konseptuelle forståelsen som beskrives i rammeverket til Kilpatrick, Swafford & Findell (2001), og innebærer dybdeforståelse og evnen til å benytte seg av ulike representasjoner, som beskrevet i kapittel 2. Ettersom elevene viste svært lite tegn til å skifte mellom ulike representasjoner, selv om oppgaveteksten anbefalte det, er det grunn til å anta at elevenes forståelse er primært instrumentell. Den instrumentelle forståelsen viser ser også tydelig i elevenes løsningsstrategier, da det ofte ikke er den mest effektive prosedyren som blir brukt, men heller den favoriserte metoden. Abc-formelen går igjen, til tross for at enten heltallsfaktorisering, avlesning av grafen, eller en visuell fremstilling av ulikheten kan betraktes som en enklere løsningsmetode her. Det kan virke som om flertallet av elevene lener seg på den metoden og algoritmen som de har pugget og jobbet mye med. Fraværet av varierende bruk av prosedyrer viser tydelige tegn til en instrumentell forståelse av fagstoffet.

6.2 Konklusjon

Jeg startet denne studien med følgende problemstilling:

> *Hvilke kompetanser og representasjoner bruker R1-elever når de løser ulikheter av første og andre grad, og hvilke eventuelle misoppfatninger og svakheter viser de?*

Denne studien bekrefter at algebra, her spesifikt algebra knyttet til ulikheter i videregående skole, er et problem for norske elever. Innen temaet ulikheter viser elevene primært en instrumentell forståelse. Flere bruker den samme løsningsstrategien omtrent på alle oppgavene, til tross for at det finnes «lettere» og «kortere» veier å gå. De grafiske fremstillingene blir svært lite brukt, og elevene sier selv at de ikke ønsker å bruke dem. Elevene viser svakheter og misoppfatninger i sin bruk av ulikhetstegnet, og flere oppgir svar som ikke gir mening.

Fra tidligere forskning vet vi at elever tenderer å behandle ulikheter som likninger, og løser dem likt (Tsamir & Almog, 2000; Vaiyavutjamai & Clements, 2006). Denne studien viser også tilfeller av dette, med noen unntak. Det kan virke som om undervisningen og skolekulturen har båret preg av prosedyrer fremfor forståelse, noe fagfornyelsen også ønsker å snu. Matematisk kompetanse innebærer mer enn prosedyreflyt, selv om det også spiller en viktig rolle. Elevene vil dra nytte av å tilnærme seg fagstoffet på flere ulike måter, blant annet gjennom ulike representasjoner, for å utvikle en dyp forståelse for matematikken.

6.3 Studiens begrensninger og videre forskning

Denne studien begrenser seg til én klasse i matematikk R1. Selv om elevene bekrefter mye fra tidligere forskning, og kan tenkes å representere norske elever generelt på noen områder, er det vanskelig å si noe om hvorvidt disse funnene lar seg generalisere. Klassen i seg selv virket å være nokså gjennomsnittlig og representativ, men det vil likevel ikke være mulig å vite hvordan en annen klasse hadde respondert på nøyaktig samme studie. Det ville derfor vært interessant å gjennomføre den samme studien på flere klasser rundt om i Norge, for å sammenligne funn. I tillegg må det nevnes at det var tre elever som ble intervjuet, og de ble håndplukket av meg. Resultatene hadde sannsynligvis sett noe annerledes ut dersom noen andre elever i klassen ble intervjuet.

Studien begrenser seg også til ett emneområde innen algebra, nemlig ulikheter. Det ville vært interessant å gjennomføre samme type studie innen et annet tema, og sett om funnene var noe like. Er det særlig innen ulikheter at elevene viser instrumentell forståelse og utfordringer i bruk av ulike representasjoner? Eller er det noe som gjelder i skolematematikken generelt?

Generelt er det interessant å forske på matematisk kompetanse innen algebra, da det er det emneområdet som norske ungdommer viser seg å gjøre det dårligst i (se kapittel 1 og 2). Det finnes mange måter man kan undersøke dette, både kvalitativt og kvantitativt. Mye forskning som allerede er gjennomført, går på å lokalisere misoppfatninger og vanskeligheter som elevene har i møte med algebra. Kanskje hadde det vært interessant å videre forske på ulike undervisningsstrategier og -tilnærminger fremover? Hvilke konkrete grep kan lærere gjøre i sin undervisning for å bedre elevers algebraiske kompetanse? Hva fungerer godt, og hva fungerer dårlig?

Kunnskap om hva elever sliter med i matematikkundervisningen er viktig som lærer å inneha. Dette kan gi verdifull informasjon om hvilke grep som bør tas i undervisningen. Det vil alltid være behov for mer forskning på dette, da elevgruppen stadig endrer seg, og alle klasser er forskjellige. Og alle elever fortjener god, forskningsbasert undervisning i matematikk.

6. Litteraturliste

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L., & Bossè, M. (2012, Mars 1). Lost in Translation: Examining Translation Errors Associated With Mathematical Representations. *School Science and Mathematics*, ss. 159-170.

Arcavi, A. (1994, November). Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, ss. 24-35.

Bicer, A. (2021). Multiple representations and mathemtical creativity. *Thinking skills and creativity*, ss. 1-17.

Boaler, J., Chen, L., Williams, C., & Cordero, M. (2016). Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, ss. 1-6.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004, Juli 14). Inequalities in Mathematics Education: The Need for Complementary Perspectives. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28th*, ss. 139-143.

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståeles. Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Utdanningsdirektoratet.

Brekke, G., Grønmo, L., & Rosèn, B. (2000). *Kartlegging av matematikkforståelse. Veiledning til algebra F, H og J.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2016). Chapter 5. Cultivating Early Algebraic Thinking. I C. Kieran, *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (ss. 107-140). Hamburg: Springer.

Dalen, M. (2011). *Intervju som forskningsmetode, en kvalitativ tilnærming.* Oslo: Universitetsforlaget.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, ss. 103-131.

Fladberg, K. L. (2016, November 29). *- Det har gått fra vondt til verre*. Hentet fra Dagsavisen: https://www.dagsavisen.no/nyheter/innenriks/2016/11/29/det-har-gatt-fra-vondt-til-verre/

Furuseth, I., & Everett, E. (2012). Kap. 9: Kunsten å holde stø kurs. Å lage en god analyse. I I. Furuseth, & E. Everett, *Masteroppgaven. Hvordan begynne og fullføre* (ss. 145-161). Universitetsforlaget.

Goldin, G. (2000). A Scientific Perspective on Structured, task-based interviews in Mathematics Education Research. I A. Kelly, & R. Lesh, *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (ss. 517-545). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Grønmo, L., & Hole, A. (2016). Kapittel 2: Matematikk i videregående skole. I L. S. Grønmo, A. Hole, & T. Onstad, *Ett skritt fram og ett tilbake. TISS Advanced 2015 Matematikk og Fysikk i videregående skole* (ss. 31-54). Oslo: Cappeln Damm Akademisk.

Grønmo, L., Onstad, T., & Pedersen, I. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole.* Oslo: Unipub.

Hole, A., & Grønmo, L. (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken. En nøkkel til å lykkes i realfag. Analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Jacobsen, D. I. (2005). *Hvordan gjennomføre undersøkelser? Innføring i samfunnsvitenskapelig metode 2.utgave.* Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Justnes, C. N. (2018). Representasjoner i matematikk. *Realfagsløyper*, ss. 1-6.

Kelle, U., & Buchholtz, N. (2015). 12: The Combination of Qualitative and Quantitative Pesearch Methods in Mathematics Education: A "Mixed Methods" Study on the Development of the Professional Knowledge of Teachers. I A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (ss. 321-364). Bremen: Springer.

Kieran, C. (2004, Januar). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, ss. 139-151.

Kieran, C. (2004). Chapter 2. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. I K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (ss. 21-35). Melbourne: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2014). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. I S. Wagner, & C. Kieran, *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Volume 4* (ss. 33-57). New York: Routledge.

Kilpatrick, J. (2014). Competency Framework in mathematics education. I S. Lerman, *Encyclopedia of mathematics education* (ss. 85-87). Georgia: Springer.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping Children Learn Mathematic. I J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, *8. Developing Mathematical Proficiency Beyond Number* (ss. 255-313). Washington, DC: National Academy Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). 4: The Strands of Mathematical Proficiency. I J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell, *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics* (ss. 115-155). Washington, D.C.: The National Academies Press.

Kleven, T. A. (2014). Kap 2: Data og datainnsamlingsmetoder. I T. Kleven, F. Hjardemaal, & K. Tveit, *Innføring i pedagogisk forskningsmetode (2.utg). En hjelp til kritisk tolkning og vurdering* (ss. 27-47). Fagbokforlaget.

KUD. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen 1997.* Oslo: Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartement.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2019). *Det kvalitative forskningsintervju.* Oslo: Gyldendal.

Larsen, A. K. (2017). *En enklere metode. Veiledning i samfunnsvitenskapelig metode.* Fagforlaget.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure Sense: the Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics*, ss. 173-196.

Ludvigsen, S. (2015). *NOU 2015:8 Fremtidens skole. Fornyelse av fag og kompetanser.* Oslo: Departementenes sikkerhets- og serviceorganisasjon Informasjonsforvaltning.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secundary students' algebraic proficiency.* Oslo: Faculty of Educational Sciences, University of Oslo.

Ndlovu, L. (2019). *A Design Based Research on Stundets' Understanding of Quadratic Inequalities in a Graphing Calculator Enhanced Environment .* Stellenbosch: Stellenbosch University.

Niss, M. (1996). Goals of Mathematics Teaching. I A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Education Part 1* (ss. 11-47). Roskilde: Springer.

Niss, M., Jensen, T., Andersen, T., Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., . . . Nissen, K. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* København: Roskilde Universitetscenter.

NSD - Norsk Senter for Forskningsdata. (2022). *Vanlige Spørsmål: Norsk Senter for Forskningsdata*. Hentet fra NSD - Norsk Senter for Forskningsdata: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/vanlige-sporsmal

Patton, M. Q. (2014). Module 29: Data Collection Decisions. I M. Q. Patton, *Qualitative Research & Evaluation Methods* (ss. 255-263). Sage Publications Inc.

Pedersen, I. F. (2013, Oktober 31). What characterizes the algebraic competence of Norwegian upper secundary school students? Evidenve from TIMSS Advanced. *International Journal of Science and Mathematics Education* , ss. 71-96.

Rittle-Jonson, B., Schneider, M., & Star, J. (2015, Mars 22). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*, ss. 587-597.

Sackur, C. (2004, Juli 14). Problems Related to the use of Graphs in Solving Inequalities. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28th*, ss. 148-152.

Sandstad, E. (2012). *"Du tenker mindre på matte'n, egentlig!". Et søkelys på norske elevers bruk av digitale hjelpemidler i matematikk.* Oslo: Universitetet i Oslo.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, ss. 1-16.

Stigum Gleiss, M., & Sæther, E. (2021). *Forskningsmetode for lærerstudenter. Å utvikle ny kunnskap i forskning og praksis.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Switzer, M. J. (2014, April). Graphing Inequalities, Making Meaning. *Mathematics Teacher*, ss. 580-586.

Tanner, R. C. (1961, Desember). Mathematics Begins With Inequalities. *The Mathematical Gazette*, ss. 292-294.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis.* Oslo: Gyldendal Akademisk.

Tsamir, P., & Almog, N. (2000, Februar 17). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, ss. 513-524.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and Inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value' inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, ss. 793-812.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Tiano, S. (2004, Juli 14). "New Errors" and "Old Errors": The Case of Quadratic Inequalities. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28th*, ss. 155-158.

Universitetet i Oslo. (2021, Desember 16). *Nettskjema diktafon-app*. Hentet fra Universitetet i Oslo: https://www.uio.no/tjenester/it/adm-app/nettskjema/hjelp/diktafon.html

Utdanningsdirektoratet. (2015, Desember 8). *Utdanningsdirektoratet.* Hentet fra Matematikk og fysikk. Den internasjonale studien TIMSS Advanced: https://www.udir.no/tall-og-forskning/internasjonale-studier/timss-advanced/

Utdanningsdirektoratet. (2018, Oktober 29). *Utdanningsdirektoratet.* Hentet fra Film: Dybdelæring: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stottemateriell-til-overordnet-del/film-dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2019, Mars 13). *Utdanningsdirektoratet.* Hentet fra Dybdelæring: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/dybdelaring/

Utdanningsdirektoratet. (2020, September 3). *Utdanningsdirektoratet.* Hentet fra Hva er nytt i matematikk?: file:///Users/Silje/Downloads/hva-er-nytt-i-matematikk.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2021, August 1). *Læreplan i matematikk for realfag (matematikk R).* Hentet fra Utdanningsdirektoratet: https://www.udir.no/lk20/mat03-02/om-faget/fagets-relevans-og-verdier

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. (2006). Effects of Classroom Instruction on Student Performance on, and Understanding of, Linear Equations and Linear Inequalities. *Mathematical Thinking and Learning*, ss. 113-147.

van Stiphout, I., Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2013, Mai). The Development of Students' Algebraic Proficiency. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, ss. 62-80.

Vedlegg 1 – vurdering fra NSD

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Vurdering

Referansenummer

135701

Prosjekttittel

R1-elevers kompetanse og representasjoner i møte med ulikheter av første og andre grad

Behandlingsansvarlig institusjon

Universitetet i Oslo / Det utdanningsvitenskapelige fakultet / Institutt for lærerutdanning og skoleforskning

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Arne Hole, arne.hole@ils.uio.no, tlf: 99798988

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Silje Espeland, silje_s95@hotmail.com, tlf: 91775342

Prosjektperiode

01.08.2021 - 31.12.2022

Vurdering (1)

06.07.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 06.07.2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 31.12.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være den registrertes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

· lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
· formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
· dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
· lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), og dataportabilitet (art. 20).
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer.

Ved bruk av databehandler (f.eks ved skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.
Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2 – Samtykkeskjema

Vil du delta i forskningsprosjektet
Likninger og ulikheter i matematikk R1 ?

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å undersøke elevers arbeid med likninger og ulikheter i matematikk R1. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Prosjektet er en masteroppgave i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Oslo. Prosjektet gjennomføres høsten 2021 og våren 2022. Formålet er å undersøke elevers arbeid med likninger og ulikheter i matematikk R1, blant annet hvilke løsningsstrategier som brukes.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Universitetet i Oslo er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Prosjektet handler om matematikkompetansen til elever i matematikk R1.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du arbeider med et oppgavesett. Det vil ta deg omtrent 30 minutter. Oppgavesettet handler om temaer som er relevante for pensum i matematikk R1.

I tillegg er det aktuelt å delta i et intervju om oppgavesettet i etterkant (maks 30 minutter).

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg. For de som ikke ønsker å delta i arbeidet med oppgavesettet, vil faglærer lage et alternativt opplegg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket. Kun student og veileder vil ha tilgang til personopplysninger. Navnet og kontaktopplysningene dine vil jeg erstatte med en kode som lagres på egen navneliste adskilt fra øvrige data. Ingen deltakere vil kunne gjenkjennes/identifiseres ved publikasjoner tilknyttet prosjektet.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 1. juli 2022. Alle personopplysninger slettes ved prosjektslutt.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
å få rettet personopplysninger om deg,
å få slettet personopplysninger om deg, og
å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Universitetet i Oslo har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
Universitetet i Oslo ved Silje Espeland (silje_s95@hotmail.com) eller Arne Hole (arne.hole@ils.uio.no)
Vårt personvernombud: Roger Markgraf-Bye, e-post: personvernombud@uio.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Prosjektansvarlig	*Student*
Arne Hole	Silje Espeland

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Likninger og ulikheter i matematikk R1*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

å delta i arbeid med oppgavesettet
å delta i eventuelt intervju om oppgavesettet i etterkant, maks 30 minutter.

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 3 – Oppgavehefte

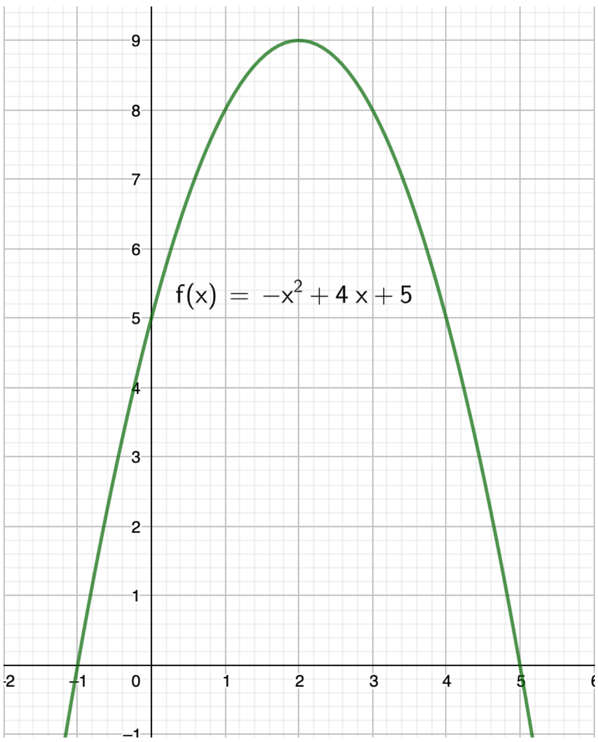
Oppgavehefte

Tusen takk for at du vil delta i mitt forskningsprosjekt.

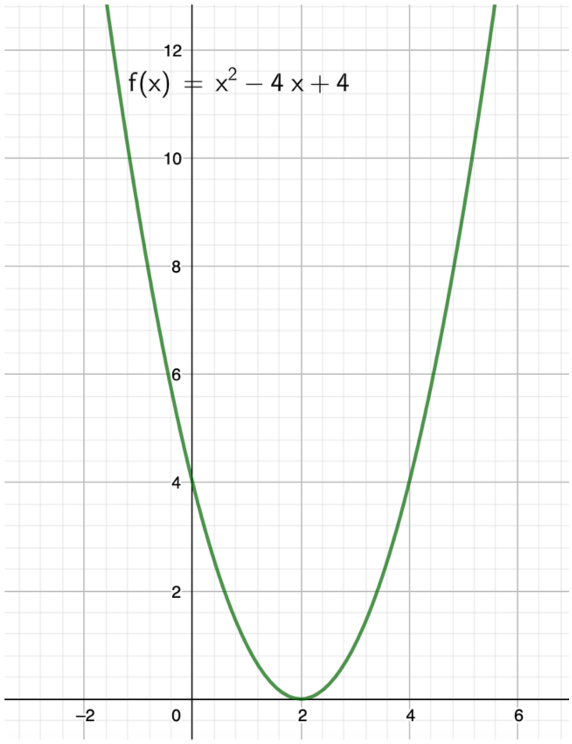
Det er tre oppgaver, og i alt 12 deloppgaver. Husk å svare på alle

Med vennlig hilsen Silje

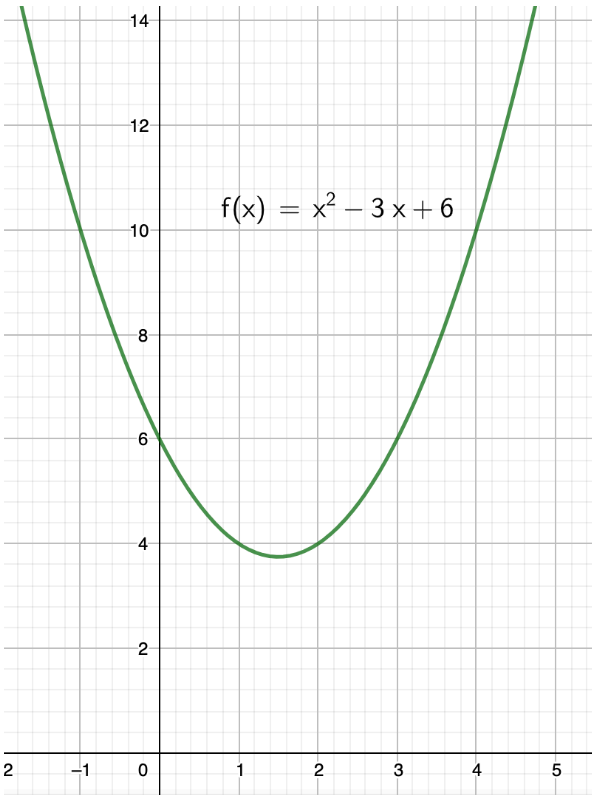
Oppgave 1. Her ser du tre grafer. Svar på avkrysningsspørsmålene.



Figur 1: grafen til f(x) = -x^2 + 4x + 5



Figur 2: grafen til f(x) = x^2 – 4x + 4



Figur 3: grafen til f(x) = x^2 – 3x + 6

a) Kryss av for rett svar:
Hva er sant for *figur 3?*
- ☐ Grafen har ingen nullpunkt.
- ☐ Grafen har uendelig mange nullpunkt.
- ☐ Grafen har to nullpunkt.

b) Kryss av for rett svar:
Hvilken av grafene har nullpunkt i x = 2?
- ☐ Grafen i *figur 1*
- ☐ Grafen i *figur 2*
- ☐ Grafen i *figur 3*

Oppgave 2

Løs følgende ulikheter. Du kan gjerne bruke resultatene fra oppgave 1 der det er relevant.

a) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

b) $- x^2 + 4x + 5 < 0$

c) $(x-2)^2 > 0$

d) $5x^4 \leq 0$

e) $x^2 - 4x + 3 \leq -1$

f) $\sin x + \cos x \geq 2$

g) $\frac{2x+3}{4x+6} \geq 2$

Oppgave 3: Vi har f(x) = x - 3, og g(x) = $-\frac{1}{2}x + 3$

Løs følgende ulikheter på to forskjellige måter:

a) f(x) > 0

b) f(x) < g(x)

c) Skriv med ord (ikke matematiske symboler) løsningen på oppgave a) og b):

____

____

____

____

____

____

____

____