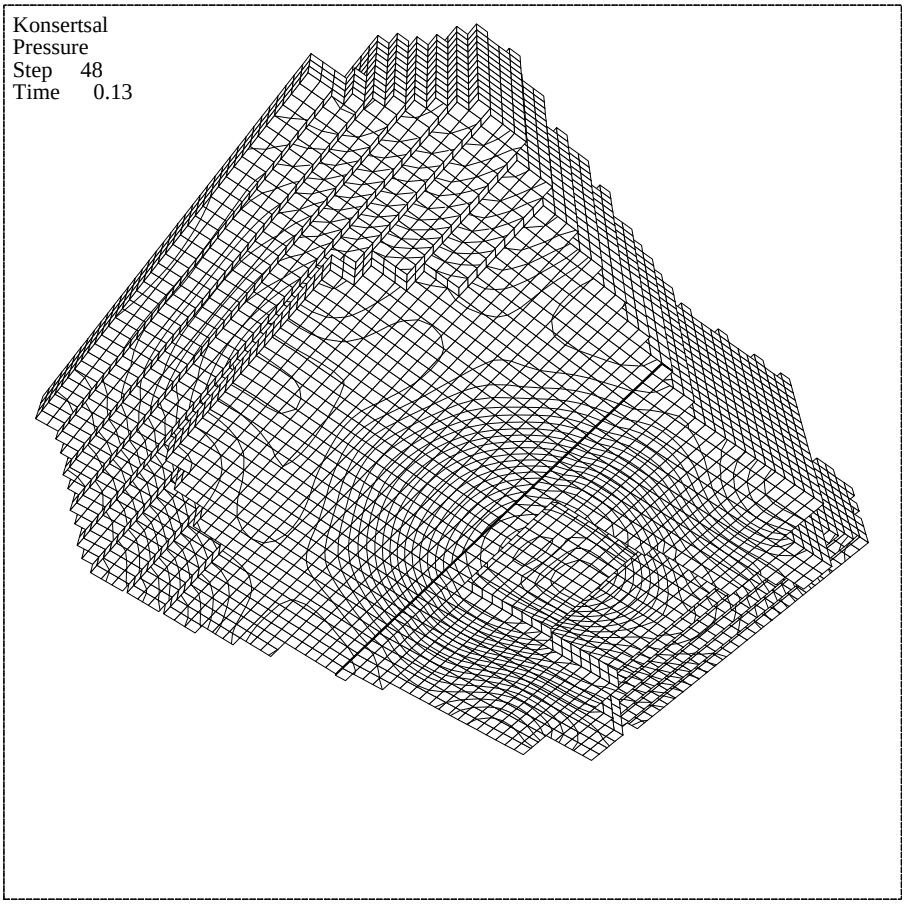


Numerisk løsing av partiell differensiallikning for akustiske bølger i tre dimensjoner

Stian G. Danenbarger

Hovedoppgave

15. august 1996

Forord

Denne rapporten er resultat av mitt hovedfagsarbeide mot graden Cand. Scient. ved Institutt for informatikk (Ifi), Universitetet i Oslo. Oppgaven er i all hovedsak utført ved Instituttet, på deltid over to år effektivt.

En stor takk rettes til min eksterne veileder, Cand. Scient. Rudi Olufsen, Technical Software Consultants A/S (TSC), for at han la vilkårene til rette for en oppgave som virkelig engasjerte, og for meget god hjelp med implementasjonen i TSCs FRONTSIM. Jeg vil også gjerne takke min interne veileder, professor Olav Dahl, Ifi, for konstruktive samtaler om de teoretiske sidene ved oppgaven, og oppmuntringer da det stod på som verst. Takker også Paul Tijink, TSC, for at han fant feilen jeg slet med i måneder, og administrasjonen ved Oslo Konserthus for velvillig utlån av arkitekttegninger. Til slutt vil jeg spesielt takke Nina for all tålmodighet, forståelse og sunne matpakker.

Noen animasjoner basert på løsninger generert ved metodene beskrevet i denne oppgaven er lagt ut på Instituttets WWW-server, med URL-adresse http://www.ifi.uio.no/~stiand/

Stian G. Danenbarger
Blindern, 15. august 1996

Innhold

1 Innledning **5**

2 Akustikk **7**
2.1 Plane bølger . . . 7
2.1.1 Bølgelengde, periode og frekvens . . . 7
2.1.2 Lydtrykk . . . 9
2.1.3 Intensitet . . . 9
2.2 Sfæriske bølger . . . 12
2.2.1 Invers kvadratlov . . . 12
2.2.2 Absorpsjon . . . 12
2.2.3 Diffraksjon . . . 13
2.2.4 Refraksjon . . . 13
2.2.5 Refleksjon . . . 13
2.2.6 Interferens . . . 14
2.2.7 Nærfelt – fjernfelt . . . 14
2.2.8 Frittfelt . . . 14
2.3 Stående bølger . . . 14
2.3.1 Helt lukket rør – helt åpent rør . . . 14
2.3.2 Åpent i én ende . . . 16
2.3.3 Rektangulære bokser – rom . . . 16
2.4 Romakustikk . . . 17
2.5 Matematisk modellering og akustikk . . . 17
2.5.1 Elementmetoden . . . 17
2.5.2 Spektralmetoder . . . 19
2.5.3 Tidsdomenet . . . 19
2.5.4 Andreordens fluks-konservative likninger . . . 20

3 Linearisert akustisk bølgelikning **23**
3.1 Tilstandslikningen . . . 23
3.1.1 Linearisering av tilstandslikningen . . . 23
3.2 Kontinuitetslikningen . . . 24
3.2.1 Linearisering av kontinuitetslikningen . . . 25
3.3 Bevegelseslikningen . . . 25
3.3.1 Linearisering av bevegelseslikningen . . . 26
3.4 Den lineære bølgelikningen . . . 26

4 Elementformuleringen **27**
4.1 Hilbertrom . . . 27
4.2 Krav til løsningen . . . 28
4.3 Variasjonsformulering . . . 28
4.4 Semidiskretisering . . . 29
4.4.1 Basisfunksjonene i 3D-rommet . . . 30
4.4.2 Funksjonsrepresentasjon . . . 31
4.4.3 Global formulering . . . 31
4.5 Lokal formulering . . . 32
4.5.1 Koeffisienter for M^K-matrisen . . . 32
4.5.2 Koeffisienter for S^K-matrisen . . . 34
4.6 Assemblering . . . 35
4.7 Diskretisering i tidsdomenet . . . 36
4.7.1 Startvektorer . . . 37
4.7.2 Skjema . . . 37
4.7.3 Stabilitet . . . 38
4.7.4 Nøyaktighet . . . 40

5 Implementasjon **42**
5.1 FRONTSIM . . . 42
5.1.1 Likningsløser . . . 42
5.2 Implementasjon i FRONTSIM . . . 44
5.3 Pre- og Postprosessering . . . 44

6 Verifikasjon **45**
6.1 Bølgelikningen — generell løsning . . . 46
6.1.1 Fasehastighet . . . 46
6.2 Initialverdier og randbetingelser . . . 47
6.2.1 Refleksjoner på randen . . . 48
6.3 Harmoniske plane bølger . . . 49
6.3.1 Uendelig kanal . . . 50
6.3.2 Endelig kanal . . . 52
6.3.3 Delvis blokkert kanal . . . 56
6.3.4 Rektangulært volum . . . 58
6.4 Harmoniske sfæriske og sylindriske bølger . . . 61
6.4.1 Interferens . . . 64
6.5 Numeriske unøyaktigheter . . . 64
6.5.1 Stabilitet . . . 68
6.5.2 Dispersjon . . . 75
6.5.3 Konvergens . . . 81

7 Testeksempel **82**
7.1 Diskretisering av et komplisert volum . . . 82
7.2 Resultater og presentasjon . . . 83
7.2.1 Impuls . . . 83
7.2.2 Lavfrekvent sinus . . . 86

8 Konklusjon **94**
8.1 Oppsummering 94
8.2 Videre arbeid 95

9 Appendiks **101**
9.1 Notasjon 101
9.1.1 Notasjon, kapittel 3 101
9.1.2 Notasjon, kapittel 4 102
9.1.3 Notasjon, kapittel 6 103
9.2 Konserthusets Store Sal 103

Kapittel 1

Innledning

Grunnlaget for denne oppgaven ble lagt gjennom samtaler med *T*echnical *S*oftware Consultants' (*TSC*) Rudi Olufsen og Kyrre Bratvedt, som ytret ønske om å utvide firmaets numeriske plattform. TSC er idag tungt representert innen programvare for reservoarsimulering, men også samtidig interessert i å undersøke anvendeligheten av matematisk modellering på andre områder. Et personlig interessefelt innen lyd og lydreproduksjon fremstod som et mulig utvidelsesområde, med mange applikasjoner.

Undersøkelsen skulle baseres på implementasjoner i TSCs hovedprodukt, programpakken *FRONTSIM*. Omfattende globale endringer i pakken kunne ikke påregnes på dette forstadiet, og implementasjonen var ment å utnytte eksisterende rutiner i størst mulig grad. Oppgaven var forholdsvis fritt definert, men skulle kunne legge et grunnlag for et eventuelt videre arbeid på feltet hos TSC.

Problemstillingen ble for dette forprosjektet begrenset til å omfatte den lineære, homogene bølgelikningen, løst over avgrensede tredimensjonale volumer med enkle randbetingelser. Denne oppgaven vil ha en akustisk vinkling, men det bør nevnes at bølgelikningen har langt videre anvendelser som i større eller mindre grad kan relateres til de videre undersøkelsene.

Sett fra en akustikers synsvinkel vil det være av stor betydning at den numeriske metoden er *konsistent* med eventuelle analytiske metoder, i den forstand at metoden gir løsninger som samsvarer med anerkjent teori ved modellering av klassiske problemstillinger. En påfølgende gradvis økning av problemenes kompleksitet kan gi grunnlag for en rimelighetsvurdering av numeriske løsninger som ikke kan verifiseres direkte.

Faktiske måleresultater var ikke tilgjengelige som sammenlikningsgrunnlag, og diskusjoner omkring bølgelikningens fysiske relevans inngår ikke i emnet for denne oppgaven. Eventuelle betraktninger vil måtte baseres på løsningens kvalitative rimelighet.

Avansert reservoar-simulering forutsetter løsing av et sett med hyperbolske differensiallikninger, typisk basert på såkalte *implisitte* numeriske skjemaer som krever løsing av store likningssystemer ved hvert tidssteg. Særdeles effektive likningsløsere er derfor en av de viktigste egenskapene ved TSCs programpakke FRONTSIM. Implisitte skjemaer kan utvise et spekter av egenskaper, og det ble vedtatt å vurdere disse i en bølge- og signalteoretisk kontekst.

Den teoretiske akustikken bærer preg av å være formalisert med utgangspunkt i metoder og konvensjoner fra elektrisk kretsteori, og dette kommer særlig til uttrykk i litteraturens omfattende bruk av komplekse, periodiske funksjoner. Innen kretsteorien har moderne datamaskin-baserte simulatorer åpnet for en utvidet bruk av såkalt *transientanalyse* ved

eksitasjon-respons karakteriseringen av lineære nettverk. Slike analyser i tidsdomenet kan gi dypere innsikt i hvordan systemet håndterer et signal. I denne oppgaven er innføringen av noen metoder fra dette feltet tilsvarende tenkt å skulle gi innsikt i noen numeriske metoders egnethet ved bølgemodellering.

Sammendrag

Oppgaven innledes med en innføring i noen grunnleggende begreper innen akustikken, og nevner noen fundamentale relasjoner og karakteristiske fenomener. En gjennomgang av publiserte eksempler på bruk av matematisk modellering i akustikken setter oppgaven inn i en historisk kontekst. Utledningen av den lineære, homogene bølgelikningen følges av en detaljert beskrevet, full diskretisering i rom og tid, basert på en fleksibel elementmetode. Fleksibiliteten er særlig knyttet til parameterstyrte egenskaper i tidsdomenet, og sammenhengen mellom parametrene og skjemaets stabilitet analyseres. Videre følger en kort beskrivelse av programpakken FRONTSIM, og de oppgaverelaterte implementasjonene. Omfattende testing danner grunnlaget for vurderinger omkring metodens konsistens, stabilitet og konvergens. Avslutningsvis gis et praktisk eksempel på en akustisk anvendelse av metoden, i form av en modellering av Store Sal i Oslo Konserthus.

Kapittel 2

Akustikk

Vitenskapen om lyd kalles *akustikk*, fra det greske *akoustos*, som betyr «høring». Med opprinnelse i studiet av mekaniske vibrasjoner og bølger, har akustikken hatt viktige anvendelser i nesten alle områder av livet (se figur 2.1 (fra Lindsay[44])). Mye av dagens kunnskap om akustikk er i utgangspunktet ervervet ved prøving og feiling gjennom århundrene, og er bare ganske nylig blitt vitenskapelig formalisert.

Lyd er essensielt sett *bølger*, og de fysiske prinsippene bak lydbølger gjelder også alle andre typer bølger. De to grunnleggende bølgeformene er henholdsvis *transversale* og *longitudinale*.

Transversale bølger kjennetegnes ved at bevegelsen er normalt, eller transversalt, på retningen bølgen beveger seg i, som bølgen langs et strukket tau når enden svinges hurtig frem og tilbake. Elektromagnetiske bølger som lys eller radio er også transversale.

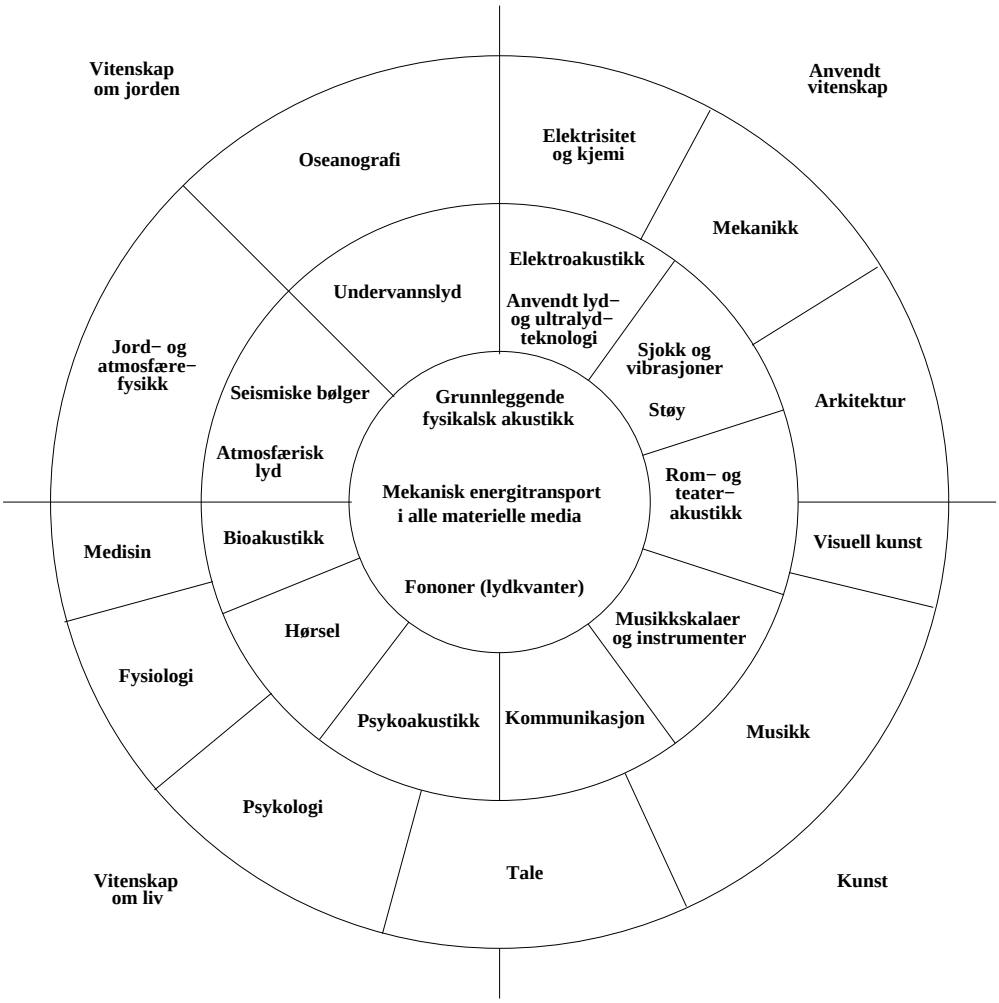
Gjennom luft eller andre medier propagerer lyd i form av en longitudinal bølge, der den mekaniske vibrasjonen som utgjør bølgen har samme retning som bølgens bevegelsesretning. En longitudinal bølge kan observeres i en spiralfjær der noen av spiralene klemmes sammen og deretter slippes, slik at en bølge, i form av en fortetting av spiralene, beveger seg langs fjæren. Bølgetransporten i luft utgjøres av slike longitudinale *kompresjonsbølger*, som i et tenkt gitter av spiralfjærer. En lydbølge består med andre ord av mer eller mindre periodiske trykkendringer rundt en *likevektstilstand*.

2.1 Plane bølger

En *plan bølge* er en bølge som beveger seg gjennom rommet som et plan, ikke som en kule med økende radius. Dette kan f.eks. være tilfellet i en kanal med diameter under $1/6$ av bølgelengden[4]. Plane bølger gir nyttige modellforenklinger ved matematiske beskrivelser av lyd.

2.1.1 Bølgelengde, periode og frekvens

En stemmegaffel vil med et lett anslag gi fra seg en ren tone med en enkelt frekvens, og trykkendringene i en slik lydbølge gjentar seg med jevne mellomrom i rommet. Avstanden mellom disse gjentagelsene kalles *bølgelengden*, måles i SI-systemet[53] i meter og representeres ved λ. Det tar en viss tid for en hel bølgelengde å passere et bestemt punkt i rommet, og denne *perioden*, representert ved T, måles vanligvis i brøkdeler av sekunder. I løpet av hvert ett-sekunds intervall passerer dessuten et visst antall bølgelengder dette samme



Figur 2.1: Akustikkens omfang og disipliner. Den innerste sektorinndelte ringen viser til den tradisjonelle inndelingen av akustikken, mens den ytterste ringen nevner tekniske og kunstneriske anvendelsesområder.

punktet i rommet, og dette antallet betegnes lydbølgens *frekvens*. Frekvens måles tradisjonelt i hertz (Hz) eller kilohertz (kHz), og representeres ved f. Mennesker hører typisk frekvenser mellom 20Hz og 20kHz.

Sammenhengen mellom frekvens og periode er

$$f = \frac{1}{T},$$

og i tillegg er relasjonen mellom bølgelengde, frekvens eller periode og bølgens hastighet c gitt ved

$$c = f\lambda = \frac{\lambda}{T}.$$

2.1.2 Lydtrykk

En lydbølge er en forstyrrelse i mediets likevektstilstand, og i væsker og gasser gjør trykket lokale små utsving omkring atmosfæretrykket. Det lokale avviket fra likevekt kalles lydbølgens *amplitude*, er en *skalar* størrelse, representeres ofte ved A, og måles i pascal (Pa), eller N/m^2. Det atmosfæriske trykket ved «standard atmosfære» defineres normalt som $10^5 Pa$, eller $10^5 N/m^2$. Den minste amplituden for en trykkendring som kan oppfattes av det menneskelige øret er omtrent $10^{-5} Pa$, mens smertegrensen ligger omkring $10 Pa$. Trykkendringene i lydbølger er altså meget små i forhold til atmosfæretrykket. Ved slike små amplituder propagerer en lydbølge lineært — dvs. med svært lite tap, dispersjon eller annen endring i bølgeformen. Signifikante ulineariteter oppstår først når bølgens amplitude når omtrent $100 Pa$, svarende til $1/1000$ av atmosfæretrykket.

Når luftbevegelsene som utgjør en lydbølge er små, er hevingene og senkningene i trykket også små og tilnærmet like store. Tilstandslikningen for en idéell gass tilsier at dersom en lukket boks med gass *økes* (hurtig) i volum med 50%, senkes trykket bare omkring 30%, mens en tilsvarende volum*reduksjon* medfører en dobling av trykket. Resultatet er en netto trykkøkning ved amplituder over $100 Pa$.

2.1.3 Intensitet

Lydintensitet eller energifluks er en vektorstørrelse, med enhet W/m^2, som beskriver kvantiteten og retningen til nettoflyten av akustisk energi i et gitt punkt. Lydtrykk er til sammenlikning en skalar.

Det kan vises[20] at intensitetsvektoren, i et medium uten netto masseflyt, svarer til det tidsmidlede produktet av trykket og partikkelhastigheten i et punkt, uttrykt ved

$$\mathbf{I} = \overline{p(t) \cdot \mathbf{u}(t)}, \tag{2.1}$$

der overstrek markerer tidsmidling. Uttrykt i én akseretning kan (2.1) sees å ha den elektriske analogen «effekt = spenning $\times$ strøm».

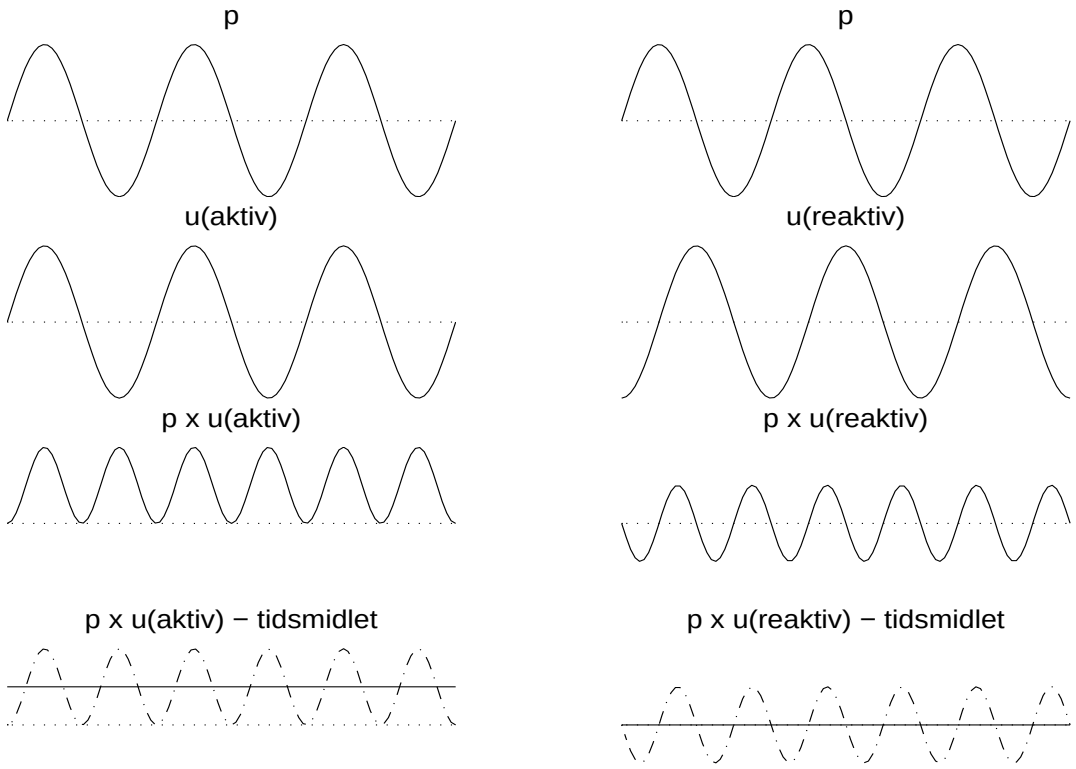
I motsetning til lydtrykk skiller lydintensitet mellom den *aktive* og *reaktive* delen av et lydfelt. Den reaktive komponenten vil tidsmidles til null, ettersom den består i en flyt av energi i én retning i første halvperiode, og en eksakt like stor energiflyt i motsatt retning i andre halvperiode av en svingning. Reaktiv intensitet utgjør likevel en del av den totale energitettheten.

Partikkelhastighet kan likeledes også splittes i en aktiv og reaktiv komponent, her kalt u^{aktiv} og $u^{reaktiv}$, der u^{aktiv} er i fase med trykket og $u^{reaktiv}$ er 90^0 ute av fase med trykket. Ved tidsmidling vil bare produktet mellom u^{aktiv} og trykket være ulik null, som vist i fig. 2.2.

I rent reaktive lydfelt er intensiteten, og derved netto energitransport, lik null, som vist i fig. 2.2. Et eksempel er en idéell stående bølge, der trykket har maksima ved veggflater der partikkelhastigheten er null. Partikkelhastigheten kan sees å være 90^0 ute av fase med lydtrykket.

En plan bølge i frittfelt (se 2.2.8) er eksempel på et rent aktivt lydfelt, der partikkelhastigheten kan finnes fra trykket ved den akustiske analogen til Ohms lov («strøm = spenning/resistans»),

$$u^{aktiv} = \frac{p}{\rho c},$$



Figur 2.2: Aktive og reaktive lydfelt i én dimensjon. Trykkets magnitude og fase (øverst) forblir uendret i et reaktivt felt, mens partikkelhastigheten (nest øverst) faseforskyves 90^0, slik at produktet av trykk og hastighet (nederst) tidsmidles til null.

der ρc er mediets akustiske impedans. Intensitetsmagnituden er da tilsvarende gitt ved

$$|\mathbf{I}| = \overline{p \cdot u^{aktiv}} = \frac{\overline{p^2}}{\rho c} = \frac{p_{RMS}^2}{\rho c},$$

der benevnelsen *RMS* (= «*R*oot *M*ean *S*quare») henspeiler på at dette er den tidsmidlede amplituden til en periodisk størrelse. Intensitet kan med andre ord beregnes indirekte fra lydtrykk under frittfelts-betingelser, der ρc er mediets akustiske *impedans*.

Akustisk impedans

Generelt er (spesifikk) akustisk impedans en kompleks funksjon, definert som forholdet mellom trykket og partikkelhastigheten. Impedansen er en skalar, men kan finnes fra partikkelhastigheten i en gitt retning. Det kan for eksempel ofte være hensiktsmessig å beregne impedansen normalt på flaten til en lydkilde. Den akustiske impedansen er definert overalt i feltet, men har særlig mening på randen, knyttet til energi-kilder og -sluk. De fleste anvendelsene av akustisk impedans er således relatert til studier omkring materialers lydabsorpsjon (se 2.2.2) og lydkilders effektivitet.

Desibel

Høremekanismen takler både meget små og meget store trykkbølger ved å være ulineær, i den forstand at mekanismen er mer effektiv i sin respons ovenfor lyder med liten amplitude enn ovenfor lyder med meget stor amplitude. Ørets ulinearitet gjør det hensiktsmessig å anvende en logaritmisk skala ved beskrivelser av lydintensitet, og i praksis er *desibel* (dB) mest kjent. Lydintensitet gitt i desibel defineres ved

$$L_I = 10log(\frac{I}{I_0}),$$

der L_I er intensitet i dB, målt i W/m^2. Referanseintensiteten I_0, tilsvarende $0dB$, er intensiteten til en $1kHz$ lydbølge ved høregrensen — omtrent $10^{-12}W/m^2$.

L_I (dB)	W/m^2	Eksempel
130	10	Artilleri-ild på nært hold (smertegrense)
120	1	Rockekonsert, jetmotor på nært hold
110	10^{-1}	Høy orkestermusikk fra publikumsplass
100	10^{-2}	Elektrisk sag
90	10^{-3}	Innvendig i buss eller lastebil
80	10^{-4}	Innvendig i bil
70	10^{-5}	Gjennomsnittlig gatestøy, høy telefonringing
60	10^{-6}	Normal samtale, åpent kontorlandskap
50	10^{-7}	Restaurant, privat kontor
40	10^{-8}	Stille rom i privat hjem
30	10^{-9}	Stille auditorium, soverom
20	10^{-10}	Radio-, TV- eller innspillingsstudio
10	10^{-11}	Lydtett rom
0	10^{-12}	Total stillhet (høregrense)

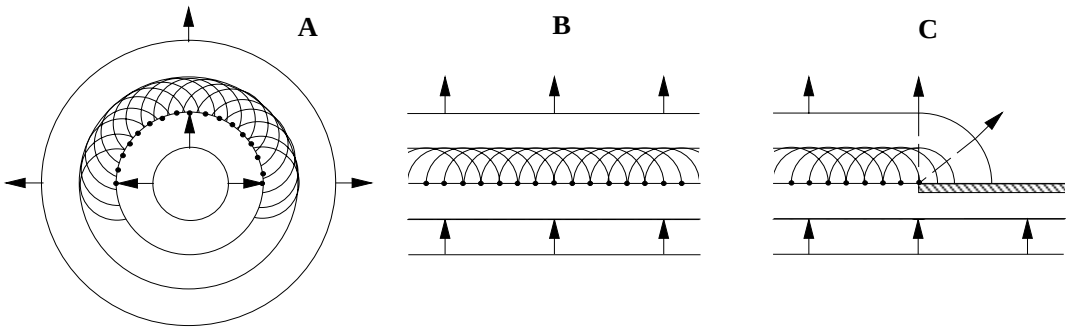
Desibel er i SI-systemet[53] strengt tatt erstattet av *Neper* (Np), definert ved

$$L_I = \frac{1}{2} ln(\frac{I}{I_0}),$$

med L_I og I_0 som over.

2.2 Sfæriske bølger

I realiteten beveger en bølge seg sjelden i en rett linje, men ekspanderer i stedet i form av en rekke sfæriske bølgefronter. Hvert punkt på en bølge er i seg selv en kilde til sfæriske bølger, kjent som Huygens' prinsipp. Huygens viste ved prinsippet om superposisjon



Figur 2.3: Huygens' bølgefronter, vist med frontene til hhv. sirkulære (A) eller plane (B) bølger som kilde. (C) viser diffraksjon rundt et hjørne basert på Huygens' prinsipp.

at en vilkårlig bølgefront er summen av et (uendelig) antall sfæriske bølgefronter, der hver bølgefront bevarer sin opprinnelige form. Observerte bølgefenomener er resultat av destruktiv eller konstruktiv *interferens* (2.2.6) mellom slike bølger. Prinsippet er også grunnleggende ved Fourieranalyse.

2.2.1 Invers kvadratlov

I teorien vil en plan bølge propagere i all evighet, uendret og uten tap. Dette gjelder ikke sirkulære eller sfæriske bølger, der intensiteten avtar med avstanden bølgen propagerer. Etterhvert som de sirkulære eller sfæriske bølgefrontene ekspanderer, fordeles energien over en større og større overflate, gitt ved geometrien i ekspansjonen. Energien pr. lengdeenhet rundt omkretsen av en sirkel faller lineært med økende radius, mens energien pr. flateenhet i en sfærisk bølge reduseres med kvadratet av radien.

Uttrykt i desibel faller intensiteten i en sfærisk bølge med $6dB$ for hver dobling av avstanden fra kilden.

2.2.2 Absorpsjon

I tillegg til det geometriske intensitetsfallet beskrevet ved den inverse kvadratlov (over), omdannes en liten del av den mekaniske energien i en lydbølge til andre energiformer gjennom flere ulike fysiske prosesser. I gasser og væsker er viskositet en viktig årsak til

slik omdanning. Ulineære fenomener som fremmer overgang fra koherent til inkoherent molekylærbevegelse er i større eller mindre grad kjent fra alle typer av medier. Disse to fysiske prosessene utgjør den klassiske absorpsjonen av en lydbølge. Denne type absorpsjon er proporsjonal med kvadratet av lydbølgens frekvens, uttrykt ved α/f^2, der α er materialets absorpsjonskoeffisient og f er frekvens.

Noen absorpsjonskoeffisienter:

Gasser	α
Helium	52.5
Hydrogen	16.9
Nitrogen	133.0
Oksygen	165.0
Luft	137.0
Karbondioksyd	140.0
Væsker	α
Vann, ved 0^oC	0.569
Vann, ved 20^oC	0.253
Vann, ved 80^oC	0.079
Kvikksølv, ved 25^oC	0.057
Metylalkohol, ved 30^oC	0.302

2.2.3 Diffraksjon

Diffraksjon er et direkte resultat av Huygens' prinsipp, og er lydbølgers evne til å avbøyes ved hjørner og til å spres etter passering av et lite hull eller en slisse. En plan bølge vil, etter passering av en delbarriere som vist i fig.2.3C, avbøyes og spres innover i barrierens «skygge» som sirkulære eller sfæriske bølgefronter, forutsatt at barrieren og bølgelengdene er av samme størrelsesorden.

En lydbølges evne til å diffraktere rundt objekter reduseres med kortere bølgelengder, relativt til størrelsen på objektene. Er bølgelengden kort nok, vil bølgen omtrent ikke diffraktere, og det dannes en akustisk skygge bak objektet. Omvendt vil en bølge passere et objekt tilnærmelsesvis upåvirket når bølgelengden er lang i forhold til objektets størrelse.

2.2.4 Refraksjon

Refraksjon er bøyning eller spredning av lydbølger på grunn av endringer i bølgens propagasjonshastighet. Et eksempel er refraksjon som skyldes atmosfærens naturlige termiske gradienter. Ettersom lydbølger propagerer hurtigere i varm luft, er lydhastigheten høyere nær jordens overflate om dagen. Lyden refrakteres da typisk oppover i atmosfæren. Om natten kan forholdet være omvendt, slik at lydbølger refrakteres tilbake mot jordoverflaten, og lyder kan høres klart over lange avstander.

2.2.5 Refleksjon

Refleksjoner spiller en viktig rolle i rom- og auditorieakustikk, og er i stor grad avgjørende for hvorvidt en sal er egnet for musikkoppsetninger eller andre formål.

En akustisk reflektor kan dirigere en bølgefront på tilsvarende måte som en lysreflektor dirigerer lys, og reflektorer benyttes til en rekke formål. Parabolske mikrofoner benytter

reflektorer for å fokusere parallelle lydbølger til et punkt, slik at svake lyder forsterkes. I konsertsaler er slik fokusering uønsket, og glatte, kurvede flater bør derfor unngås.

Når lyd passerer fra et medium til et annet med ulik lydhastighet, reflekteres noe av lyden ved overgangen, mens resten passerer gjennom.

2.2.6 Interferens

Interferens er et fenomen som oppstår når bølgefronter summeres på basis av superposisjonsprinsippet. To bølgefronter på samme sted til samme tid kan interferere *konstruktivt* dersom de er i fase, eller *destruktivt* dersom de er ute av fase. Konstruktiv interferens øker den summerte bølgens amplitude, mens destruktiv interferens kan medføre total kansellering.

Støyundertrykking er en mulig anvendelse av destruktiv interferens. Dette kan skje ved sanntids måling og aktiv reproduksjon av støyen, men i motsatt fase, slik at destruktiv interferens reduserer støynivået.

2.2.7 Nærfelt – fjernfelt

Området i nærheten av en lydkilde betegnes ofte noe upresist for *nærfeltet*. To mer veldefinerte betegnelser er henholdsvis *akustisk* nærfelt og *geometrisk* nærfelt[45]. Det akustiske nærfeltet defineres som området nær en lydkilde der den reaktive intensiteten ikke er neglisjerbar sammenliknet med den aktive. Det geometriske nærfeltet er til sammenlikning definert som området nær en lydkilde som kjennetegnes ved særlig dype minima eller nuller i trykket, slik at det avgitte feltet ikke kan approksimeres ved plane eller sfæriske bølger. Det tilsvarende geometriske *fjernfeltet* er karakterisert ved plane eller sfæriske bølger der den reaktive intensitetsvektoren gjerne kan være stor, men avviker lite fra retningen til den aktive, slik at partikkelbevegelsen er rettlinjet og ikke elliptisk.

2.2.8 Frittfelt

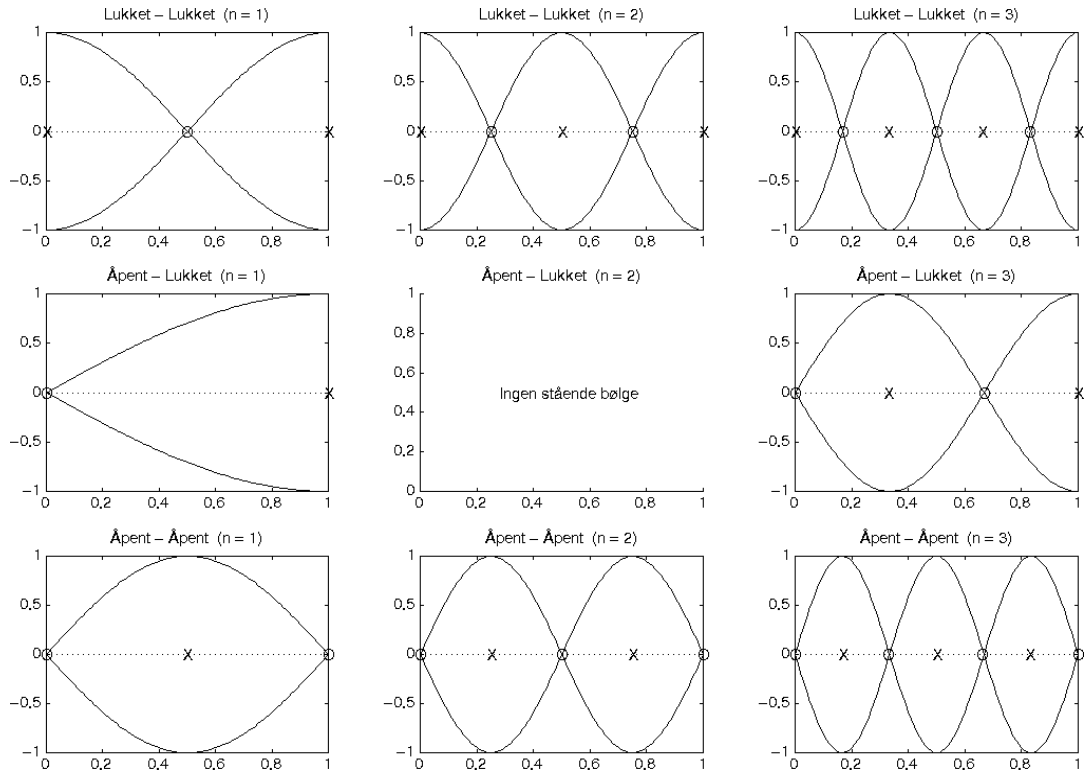
En lydkilde som plasseres i en omgivelse som er meget stor i relasjon til den avgitte lydens bølgelengde, der avgrensende flater er svært langt unna og eventuelle andre objekter meget små eller svært langt unna i forhold til bølgelengden, sies å være i et *frittfelt*.

2.3 Stående bølger

To identiske sinusoidale lydbølger som beveger seg i motsatt retning gjennom et rør eller en kanal vil danne en såkalt stående bølge, dvs. en bølge som ikke beveger seg i noen romretning. Den stående bølgen er sinusoidal, som de to bølgekomponentene, og oscillerer med samme frekvens. Den kjennetegnes dessuten ved såkalte *noder* med en halv bølgelengdes avstand, med *antinoder* midt i mellom. De n-te harmoniske ($n = 1, 2, 3$) stående trykkbølgene i rør som henholdsvis er åpne i begge ender, lukket i én ende eller lukket i begge ender er vist i fig.2.4.

2.3.1 Helt lukket rør – helt åpent rør

I et lukket rør har en stående trykkbølge ved $n = 1$, eller grunnfrekvensen, trykk-antinoder i hver ende og en trykknode i midten, slik at lengden av et lukket rør er lik en halv bøl-



Figur 2.4: De første tre harmoniske stående trykkbølgene i rør som henholdsvis er åpne i begge ender, lukket i én ende eller lukket i begge ender. Trykknoder (X) og -antinoder (O) er angitt. Den andreharmoniske finnes ikke i en lukket kanal.

gelengde. Tilsvarende for et åpent rør, men trykk-antinoden er da å finne i midten, mens trykknodene er i hver ende. Grunnfrekvensen (f_1) er derved gitt ved

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2L_{ll}} = \frac{c}{2L_{åå}},$$

der L_{ll} og $L_{åå}$ er lengden av røret som er henholdsvis lukket i begge ender eller åpent i begge ender. Bølgelengden λ_n til de følgende harmoniske er videre gitt ved

$$\lambda_n = \frac{2L_{ll}}{n} = \frac{2L_{åå}}{n},$$

med frekvens

$$f_n = \frac{nc}{2L_{ll}} = \frac{nc}{2L_{åå}} = nf_1.$$

2.3.2 Åpent i én ende

Et rør som er åpent i én ende og lukket i den andre, har en trykknode ved den åpne enden og en trykk-antinode ved den lukkede, slik at lengden $L_{lå}$ av røret tilsvarer en kvart bølgelengde. Randverdiene i et slikt rør tillater bare et odde antall kvartbølgelengder langs en gitt lengde, slik at

$$\lambda_n = \frac{4L_{lå}}{n}, \quad n \text{ odde}.$$

Stående bølger i et rør som er åpent i én ende og lukket i den andre innebefatter altså bare frekvenser som tilsvarer odde harmoniske, slik at

$$f_n = \frac{nc}{2L_{lå}} = nf_1, \quad n \text{ odde}.$$

2.3.3 Rektangulære bokser – rom

Et luftrom formet som en rektangulær boks kjennetegnes ved en rekke ikke-harmoniske (luft)resonanser i form av stående bølger. De avgrensende flatene er trykk-antinoder, og det dannes stående bølger mellom to og to parallelle flater, og mellom mer komplekse kombinasjoner av flater. Volumer bygget opp av rektangulære seksjoner kjennetegnes ved tre klasser av resonanser, *aksielle*, *tangentielle* og *oblikke*, med frekvenser gitt ved relasjonen

$$f = \left(\frac{c}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2},$$

der L_x, L_y og L_z er det rektangulære volumets dimensjoner, og n_x, n_y og n_z er positive heltall. Permutasjoner av n_x, n_y og n_z der to verdier er null gir aksielle resonanser, én verdi lik null gir tangentielle, mens alle n_x, n_y og n_z ulik null gir oblikke resonanser. Selv om de aksielle dempes minst og de oblikke mest, så er det likevel det store antallet oblikke resonanser som dominerer ved høyere frekvenser, og statistisk teori utgjør gjerne det beste modelleringsverktøyet.

2.4 Romakustikk

Studiet av hvordan lyd oppfører seg i et rom baserer seg i hovedsak på to teorier – *bølge*-teorien og den *geometriske* teorien. Den geometriske teorien, først presentert av Sabine[58], er enkel, men effektiv når det gjelder å identifisere de viktigste parametrene som innvirker på etterklangstiden. Den gir et brukbart inntrykk av rommets akustiske egenskaper, og anvendes derfor nærmest universelt i førsteutkast ved akustisk romkonstruksjon. Mer detaljerte studier krever anvendelse av bølgeteorien.

Morse og Bolt[49] gir en omfattende gjennomgang og analyse av romakustikken, diskuterer Sabines og andres geometriske teorier og presenterer en teori som innebefatter romresonanser og randflatenes akustiske impedans. Anvendelsen av randimpedans tillater at stivhet og masse influerer resonansfrekvensene såvel som dempingen. Bølgeteorien er beskrevet i litteraturen av Morse[48] og Morse og Ingard[50], og begrenser seg i hovedsak til rektangulære romseksjoner.

2.5 Matematisk modellering og akustikk

Et av den teoretiske akustikkens viktigste mål har vært å kunne modellere, og derved forutsi, de akustiske egenskapene ved et mer eller mindre avgrensede luftvolum, som for eksempel rom, resonatorer og ulike typer akustiske filtre. Tidlig i det nittende århundre samlet Sabine[58] store mengder data om eksisterende akustikkrom, og kunne på basis av dette fastsette empiriske retningslinjer til bruk ved fremtidige konstruksjoner.

Innen 1930 ble metoder basert på randflater som «akustiske speil» anvendt for å studere etterklangstid i rom[18]. Metoden har senere vært benyttet mye i utforskningen av hva som kreves av luftvolumer der lyd søkes kontrollert.

En alternativ, men tilsvarende, teknikk er såkalt *ray tracing*, der lyd-«stråler» (rays) antas å stråle ut fra kilden i alle retninger[40]. Strålene står normalt på bølgefronten, og når de treffer en randflate blir de delvis reflektert og delvis absorbert, avhengig av overflatens absorberende egenskaper. En av teknikkens begrensninger ligger i den alminnelige antakelsen om at refleksjonene er spekulære og ikke diffuse, men modifiserte teknikker for å komme rundt problemet har vært vist[64]. Borish[6] utvidet «speilbilde»-teknikken og diskuterte ray tracingens begrensninger.

Gibbs og Jones[23] diskuterte speil-kilde («image-source») tilnærmingen med hensyn på beregning av lydfelter i enkle, rettvinklede rom, men måtte anta absorpsjonskoeffisienter på $0.27 - 0.88$ for å få brukbare resultater. Metoden har vist seg å ha begrensninger når absorpsjonen er liten. Waterhouse[65][66] benyttet tilsvarende metoder for å studere refleksjoner fra akustiske randflater. Analysene begrenset seg til maksimalt tre ortogonale vegger, og kunne derfor ikke forutsi resonansfenomener som stående bølger.

2.5.1 Elementmetoden

Elementmetoden har blitt en universell løsningsmetode for statisk og dynamisk analyse av strukturelle systemer[3][10][68]. I løpet av de tre siste tiårene har metoden vært anvendt på fly- og romfartsstrukturer, på bygninger og andre sivile strukturer, og også på maskiner og landbaserte kjøretøy. Kommersielle programpakker for denne typen simuleringer er alminnelig tilgjengelige, også for PC.

Tilpassingen av slike faststoff-strukturelle elementmetoder til bruk ved representasjon av fluider (væsker og gasser) er av nyere dato, og anvendelsene ikke like utbredt. Eksempelvis er det akustiske feltet omkring en transduser[37][38][41][47][59] ikke like inngående studert som de rent strukturelle egenskapene ved transduseren[39][52][60][63]. En årsak kan være at mange akustiske problemstillinger baserer seg på antakelsen om et såkalt «frittfelt» (se 2.2.8), som pr. definisjon er et svært stort domene. Analyser av lydkilder i frittfelt krever bruk av spesielle teknikker for å avgrense domenet og derved begrense likningssystemets størrelse.

Randbetingelser

Er elementmetode-domenet stort nok til at de terminerende randflatene er utenfor kildens geometriske nærfelt (se 2.2.7), vil trykk og partikkelhastighet være i fase, og mediets impedans kan antas lik ρc. Dette krever ofte store domener, og antallet elementer kan i noen tilfeller bli uhåndterlig. I elementmetode-programmer med trykk som nodevariabel, må man ved en slik tilnærming kontrollere at dempingsmatrisen (se nedenfor) har verdien $1/\rho c$ alle steder på hoveddiagonalen som svarer til de terminerende randflatene. Dempingsmatrisen vil på denne formen være fullstendig imaginær som resultat av den rent dissipative randen.

Kagawa et al.[37] og Osipov og Shirkouskii[55] benyttet en ρc-rand med godt resultat, men med et stort antall elementer. Størrelsen på problemet kan eventuelt reduseres, uten å avkorte domenet, ved å introdusere såkalte «uendelige elementer»[5]. Basert på en forholdsvis enkel lineæravbildning fra et uendelig domene til et endelig, har metoden funnet mange anvendelser innen fysikk og teknikk[69]. En tredje mulighet er å benytte testfunksjoner med verdier og normalderiverte som tilsvarer analytiske fjernfelts-løsninger i randnodene. Dette ble anvendt av Swenker[62] og Janse og Kaizer[30].

Problemets størrelse kan reduseres drastisk ved for eksempel å anta at kilden (transduseren) er montert i en baffel, slik at impedansen i baffelåpningen kan approksimeres med den klassiske analytiske løsningen for et rigid stempel i en uendelig baffel. Randen bringes da typisk inn i transduserens nærfelt (se 2.2.7), slik at randimpedansen går over til å bli både reaktiv og disspativ. Ettersom randflaten, i form av et hull i baffelen, ikke er rigid, vil enkelte høyere ordens fenomener kunne introdusere feil[22].

Metoder der randen bringes inn i nærfeltet og impedansen modelleres analytisk har også vært publisert av Hunt[28], som terminerte med en admittans gitt ved sfæriske harmoniske funksjoner, og beregnet det «ytre» lydfeltet med en integrallikningsteknikk på basis av trykkfordelingen i det «indre» elementmetode-domenet. Astley og Cummings[2] beregnet lydfeltet fra en uendelig kanal (i praksis en såkalt «linjekilde»), og lot et sylindrisk elementmetode-domene forbinde kanalen og det analytiske ytre feltet, mens Kristiansen og Johansen[41] lot et sfærisk elementmetode-domene inneholde en aksesymmetrisk hornhøyttaler uten baffel. Morita et al.[47] modellerte feltet rundt en hornhøyttaler i en baffel med en kombinasjon av elementmetoden og Greens funksjoner.

Demping

De fleste strukturelle elementmetode-problemer kan løses med hensyn på masse- og stivhetsmatrisene alene. Forenklingen er rimelig på bakgrunn av den vanligvis meget begrensede dempingen i slike problemer, og eventuelt kan litt demping legges til etter at løsningen er funnet.

I akustikken kan tilsvarende forenklinger benyttes for lett dempede systemer[21], og Craggs[11] og Shuku og Ishihara[61] har rapportert gode resultater etter anvendelse av elementmetoden ved beregning av resonanser i irregulære rom. Milner og Bernhard[46] studerte rom med to parallelle flater ved bruk av elementmetoden, og optimerte proporsjoner og resterende flatevinkler med hensyn på en jevnest mulig fordeling av resonansene.

Kagawa[34] viste at elementmetoden kunne benyttes til modellering av akustiske filtre, og gav et beregningseksempel. Young og Crocker[67] beregnet overføringskarakteristikken til et to-dimensjonalt akustisk filter med en elementmetode-tilnærming, og sammenliknet resultater med én-dimensjonal planbølgeteori. Kagawa og Omote[35][36] anvendte teknikken på aksesymmetriske akustiske filtre med vilkårlig sirkulært tverrsnitt, og sammenliknet de beregnede resulatene med målinger. Teknikken viste seg å forutsi overføringskarakteristikken med god nøyaktighet.

Ovennevnte filtermodeller var tilegnet studier av utelukkende reaktive fenomener, og omfattet ikke energitransport. Energitransport, eller intensitet (se 2.1.3), forekommer kun i dissipative systemer som kjennetegnes ved faseforskjeller i løsningen over ulike deler av domenet. Dissipasjon, og derved også modellering av intensitet, krever informasjon om både amplitude og fasevinkel, og forutsetter med andre ord en dempingsmatrise med komplekse verdier i tillegg til de vanlige masse- og stivhetsmatrisene. Randen der modellen termineres må dessuten også kunne representere energidissipasjon.

Metoder basert på kompleks randimpedans innebefatter som regel en antakelse om at mediets reaktive egenskaper ved randflaten er rent lokale[12][13][37]. Antakelsen er ikke nødvendigvis gyldig, men kan gi brukbare resultater uten å måtte øke størrelsen på problemet, og det tilhørende likningssystemet som skal løses.

Craggs[12] benyttet elementmetoden på rent reaktive akustiske filtre, modellert som dissipative på grunn av energien som forsvinner ut gjennom inn- og uttakene i filteret. Kagawa, Yamabuchi og Mori[37] presenterte en tilsvarende formulering, og viste i tillegg tre beregningseksempler der resultatene sammenfalt godt med måleresultater. Craggs[14] utvidet elementmetoden til også å omfatte absorpsjonsmaterialet, og modellerte derved utvidede reaktive materielegenskaper. Ettersom et større antall frihetsgrader er påkrevet, øker bruken av egne absorpsjonselementer problemets størrelse. Spesielle metoder måtte dessuten anvendes for å kople absorpsjonselementene til det akustiske systemet[15][16].

2.5.2 Spektralmetoder

En nært beslektet approksimasjonsteknikk som har vært anvendt i utstrakt grad innen fluidmekanikken[9], og tildels også innen seismisk modellering[56], er såkalte *spektralmetoder*[7][24]. Metodene er generelt godt egnet til bølge-problemer, ettersom basisfunksjonene (se 4.1) i noen grad innehar feltets bølgenatur. Spektralmetodene krever derfor generelt færre frihetsgrader enn diskrete element- og differansemetoder. Til gjengjeld egner metodene seg best for glatte bølgefunksjoner over domener med meget enkel geometri, og takler ikke diskontinuiteter særlig godt.

2.5.3 Tidsdomenet

Teorien bak lineære funksjonsrom (se 4.1) viser at en fullverdig funksjonsrepresentasjon i en referanseramme kan lineæravbildes over i en like fullverdig representasjon i en annen referanseramme, også selv om den nye rammen har lavere dimensjonalitet, forutsatt at visse krav er tilfredsstilt. Dette er blant annet en av forutsetningene bak enhver diskretisering,

som pr. definisjon innebærer en reduksjon i dimensjonalitet[8].

Akustikken er et av feltene der Fouriers teorier om lineære veide summer over ortonormale funksjoner, særlig representert ved sinus- eller komplekse eksponensialfunksjoner, har fått størst gjennomslag. I praksis er dette fundamentet for den såkalte «steady state»-analysen av akustiske problemer. Her benyttes en periodisk funksjon med passende frekvens som *drivende* funksjon, eksempelvis gitt ved

$$p(t) = p_0 e^{j(\omega_0 t + \theta)} ,$$

der $\omega_0 = 2\pi f_0$, med f_0 som frekvens, p er lydtrykk, p_0 er *RMS*[1] amplitude og θ er fase. Periodisiteten åpner for at tidsdomenet, som en egen dimensjon, ikke trenger å betraktes som del av referanserammen. Klassisk analytisk akustikk har med utgangspunkt i dette «lånt» et komplett sett av metoder fra elektrisk kretsteori, noe som i stor grad formet akustikken som eksakt vitenskap[4].

I datamaskinenes tidsalder er «steady state»-analysen fortsatt dominerende, ikke minst understreket ved at *samtlige* ovennevnte referanser til anvendelser av numeriske metoder innen akustikken er basert på en slik referanseramme. Matematisk sett betyr dette at de fleste akustiske problemstillingene kan representeres i form av elliptiske differensiallikninger, og da særlig ulike varianter av *Helmholtz'* likning[4], for lydtrykk gitt ved

$$\nabla^2 p = -\left(\frac{\omega_0}{c_0}\right)^2 p ,$$

der ω_0 og p er som over, og c_0 er lydhastighet. Elliptiske differensiallikninger er meget godt representert i den numeriske analysen, og løsningsmetoder er inngående beskrevet (se f.eks. referanser i [31]).

Et av den teoretiske akustikkens hovedmål er modellering av akustiske egenskaper og fenomener. I en utvidet Euklidsk geometri kan modellering av bølger betraktes som et firedimensjonalt problem – dvs. tre romdimensjoner og tid[25][26]. Trykt fremstilling tillater kun todimensjonal representasjon, evt. basert på forholdsvis enkel lineær mapping fra tre dimensjoner, og bare særdeles oversiktlige løsninger tillater en eventuelt ytterligere innføring av tidskoordinater i mappingen (f.eks. i form av fasefronter). Dersom hensikten med matematisk modellering er å gi ny innsikt i et problemkompleks, kan den eventuelle kompleksiteten i den visuelle fremstillingen av en løsning tenkes å være med på å begrense modelleringens muligheter.

Komplekse, flerdimensjonale numeriske beregninger, gjerne hentet fra reelle eksempler (se f.eks. 7.1), stiller spesielt høye krav til fremstillingsform. Visuell presentasjon, eller *visualisering*, av numeriske data har da også blitt en egen fagdisiplin. I den senere tid har den raske utviklingen innen både hard- og software åpnet for å introdusere tidsdomenet, i form av såkalt *animert* (bevegelig) visualisering, og dette må kunne sees som særlig godt egnet for presentasjon av data fra numerisk løste partielle differensiallikninger. Utbredelsen av det såkalte «World Wide Web» for informasjonsoverføring kan dessuten også tenkes å gjøre publisering av animerte løsningspresentasjoner mer vanlig.

2.5.4 Andreordens fluks-konservative likninger

Bølgelikningen, en andreordens partiell differensiallikning for akustiske bølger, er med hen-

[1] Root Mean Square, se seksjon 2.1.3

syn på trykket gitt ved

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_0^2 \, \nabla^2 p \, ,$$

med p og c_0 som over, og utledes i kapittel 3. Den karakteriseres blant annet ved å være uten diffusjon, og regnes i klassen av hyperbolske, såkalte *fluks-konservative* likninger, på formen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \mathbf{F}(\mathbf{u}) \, ,$$

der $\mathbf{u}$ er en vektor, og $\mathbf{F}$ refereres til som *konservert fluks*. Lineære andreordens likninger på denne formen kan omformes til systemer av førsteordens likninger

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{d} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i},$$

der $d = m - 1$ er romdimensjonen, x_i er romkoordinatene, A_i er symmetriske $m \times m$-matriser og $\mathbf{u}$ er en m-vektor. Den tredimensjonale bølgelikningen kan omformes på denne måten ved for eksempel å benytte notasjonen

$$\mathbf{u} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right]^T ,$$

der p er lydtrykket som gitt over, og $\{x, y, z\}$ er romkoordinater. Stabile og nøyaktige metoder for slike førsteordens hyperbolske likningssystemer har vært vist[31] (se også spesielt [32][33]), men ettersom omforming av den tredimensjonale bølgelikningen i praksis firedobler antallet variable, kan det uansett være god grunn til å forsøke å approksimere likningen i den form den står.

Johnson[31] skriver at numeriske metoder med god stabilitet og høy nøyaktighet for andreordens hyperbolske problemer ikke er kjent, men skisserer likevel et ikke navngitt trestegs skjema basert på tidsdiskretisering av systemet av ordinære differensiallikninger som fremkommer ved semidiskretisering (se 4.4) av bølgelikningen. Metoden krever to variable i hvert nodepunkt (U og $\partial U/\partial t$), og har to parametre som kan varieres for å gi ulike egenskaper. Han viser til ytterligere en klasse av metoder med variable parametre kalt *Newmarks* metode[51], og skisserer også her et skjema som krever to variable (U og $\partial U/\partial t$) i hvert nodepunkt. Zienkewics og Morgan[69] beskriver en trestegs metode som svarer til Newmarks, og utleder denne som en elementmetode i tidsdomenet med bare en variabel i hvert nodepunkt. De gir også en stabilitetsanalyse.

Ved et bestemt valg av parametre vil begge ovennevnte metoder svare til den kanskje mest kjente metoden for tidsdiskretisering av bølgelikningen — den klassiske trestegs *sentrerte differanse*-metoden[31][43]. Metoden er *eksplisitt* (se 4.7.3), har ingen numerisk demping, og fungerer ifølge Johnson meget godt dersom den eksakte løsningen er glatt, men diskontinuerlige initialdata kan medføre kraftige spuriøse oscillasjoner.

Elementmetoder anvendt over hele rom-tids-domenet er mindre vanlig, av flere årsaker[69]. Et stort tidsdomene kan resultere i et uhåndterlig stort likningssystem, som dessuten generelt blir usymmetrisk, selv med Galerkin-vekting (se 4.4.3). Tidsdomenet er geometrisk sett ukomplisert, og enkle differanser er derfor nærliggende. En eventuell visualisering av en irregulær rom-tids elementmetodeløsning kan dessuten være vanskelig å oppfatte intuitivt.

Hughes og Hulbert[27] viste en elementmetodeformulering i både rom og tid for andreordens hyperbolske differensiallikninger, men forusatte en viss regularitet i diskretiseringen og tidssteg proporsjonale med elementenes størrelse. Flere minste kvadraters ledd var lagt til i skjemaet for å vise et konvergensteorem. En liknende formulering, med utgangspunkt i den såkalte «diskontinuerlige Galerkin»-metoden[31][32][33] ble senere vist av French[19]. Det tilhørende konvergensteoremet stilte ingen proporsjonalitetskrav til tidsstegenes størrelse, og krevde ingen tillegg av minste kvadraters ledd i formuleringen.

Kapittel 3

Linearisert akustisk bølgelikning

Trykket og tettheten i en gass eller væske ved *likevekt*, dvs. før mediet forstyrres av en lydbølge, betegnes henholdsvis p_0 og ρ_0. Disse antas konstante gjennom hele mediet. Lyd karakteriseres ved små trykk- og tetthetsperturbasjoner, p' og ρ', og små strømmer $\mathbf{U} = (u, v, w)$, som funksjon av tid og rom. Tyngdekraften har ubetydelig innvirkning på hørbare lydbølger. Har da at

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \end{aligned}$$

der p' refereres til som det *akustiske* trykket eller overskuddstrykket i et punkt, mens p kalles det *instantane* trykket eller totaltrykket. Tilsvarende for tettheten.

3.1 Tilstandslikningen

Tilstandslikningen er en relasjon som beskriver sammenhengen mellom *tilstandsvariablene* tetthet ρ, trykk p og temperatur T i en gass eller væske, på formen

$$\rho = \rho(p, T).$$

For hørbar lyd vil tilstandsendringene med god tilnærmelse kunne regnes som *isentropiske* eller *adiabatiske*, det vil si at endringene i trykk og tetthet er for hurtige til at noen signifikant varmetransport fra komprimerte områder kan forekomme innen kompresjonen er opphørt[40][54]. For andre medier enn idéell gass bør den isentropiske relasjonen mellom trykk og tetthet utarbeides empirisk. En Taylorutvikling av denne relasjonen kan gis som

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots , \tag{3.1}$$

der indekset betegner verdier av de partielt deriverte ved likevektstilstanden.

3.1.1 Linearisering av tilstandslikningen

Ved tilstrekkelig små fluktuasjoner kan (3.1) lineariseres ved å se bort fra høyere ordens ledd[40], som gir

$$p - p_0 = K\,\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\,,$$

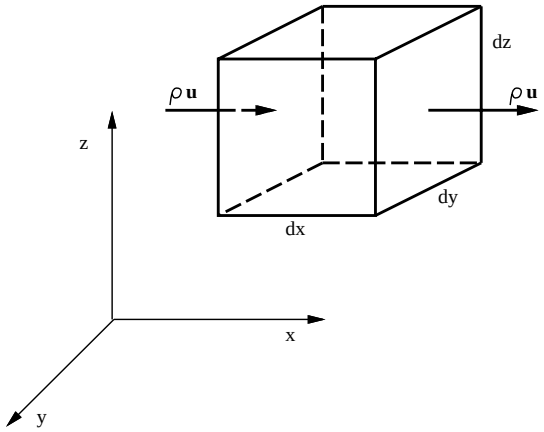
der $K = \rho_0 \left(\partial p / \partial \rho\right)_{\rho_0}$ er den adiabatiske *kompresjonsmodulen* for mediet. Tilstandslikningen kan uttrykkes mer kompakt med hensyn på det akustiske trykket p' og relativ tetthetsendring, eller *kondensasjon*, $s = (\rho - \rho_0)/\rho_0$, som

$$p' = Ks, \tag{3.2}$$

forutsatt at $|s| \ll 1$.

3.2 Kontinuitetslikningen

Kontinuitetslikningen er fundamental i fluidmekanikken, og gir et matematisk uttrykk for prinsippet om at masse verken skapes eller ødelegges. Likningen viser at massen som passerer inn gjennom overflaten på et lite volumelement er lik den innvendige masseøkningen i volumet. Figur 3.1 viser et volumelement formet som et rettvinklet parallellepiped med



Figur 3.1: Massestrøm gjennom volumelement $dxdydz$

sidekanter dx, dy og dz. Antar et homogent materiale, og kan da se bort fra diffusjon, slik at komponenten til massestrømmen i x-retning er gitt ved ρu, i y-retning ved ρv og z-retning ved ρw, gitt strømningshastigheten $\mathbf{U} = (u, v, w)$. Massestrømmen *inn* gjennom elementet i x-retning er da $\rho u dydz$, og tilsvarende er

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right] dydz$$

lik massestrømmen *ut* i samme retning. Nettobidraget av innstrømmet masse til volumet i x-retningen i tidsrommet dt er er derfor

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right] dxdydzdt,$$

og tilsvarende uttrykk fås for bidragene i y- og z-retningen. Elementets masseøkning i samme tidsrom dt kan skrives

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydzdt,$$

og etter prinsippet om bevaring av masse må denne økningen skyldes netto innstrømming av masse. Det betyr at

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

som kalles *kontinuitetslikningen*, og som kan uttrykkes ved

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \tag{3.3}$$

ettersom *divergensen* $\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$, der $\mathbf{U} = (u, v, w)$.

3.2.1 Linearisering av kontinuitetslikningen

Likning (3.3) er ulineær, ettersom den andre termen i uttrykket involverer produktet av partikkelhastighet og instantan tetthet, som begge er akustiske variable. Omformes uttrykket for den relative tetthetsendringen til $\rho = \rho_0(1 + s)$, der s kan antas meget liten og ρ_0 er en konstant i både tid og rom, kan (3.3) lineariseres til

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \tag{3.4}$$

3.3 Bevegelseslikningen

Bevegelseslikningen uttrykker Newtons lov for volumelementet nevnt over. Foruten trykkraften kan volumkrefter som tyngdekraften, treghets- eller magnetiske krefter, og flatekrefter på grunn av viskøs friksjon virke på elementet. Vil her anta alle andre krefter enn trykkraften er neglisjerbare. Den midlere trykkraften på sideflatene som står vinkelrett på x-aksen i figur 3.1 er gitt ved henholdsvis

$$\left[p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right] dydz$$

og

$$\left[p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right] dydz,$$

slik at kraftresultanten i x-retning på grunn av trykket blir

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz.$$

Resultantkreftene i y- og z-retning finnes på tilsvarende måte. Den totale kraften som virker på volumelementet på grunn av trykket kan da skrives

$$-\left[\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k}\right] dxdydz,$$

eller tilsvarende

$$-\nabla p dxdydz.$$

Antar elementet lite nok til at massen er gitt ved $\rho dxdydz$, og akselerasjonen er gitt ved $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$, der $\mathbf{U} = (u, v, w)$, så lenge elementet ikke beveger seg i feltet. Newtons lov sier at

elementets masse ganger dets akselerasjon er lik resultanten av kreftene som virker på det. Etter divisjon med elementets masse er bevegelseslikningen da gitt ved

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{3.5}$$

Bevegelseslikningen uten friksjonsledd kalles av og til også *Eulers likning*.

3.3.1 Linearisering av bevegelseslikningen

Likning (3.5) er også ulineær, og kan forenkles. Anta $|s| \ll 1$, slik at den instantane tettheten ρ kan erstattes med ρ_0, og ∇p med $\nabla p'$ siden p_0 er konstant. Da kan (3.5) uttrykkes ved

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p', \tag{3.6}$$

som utgjør den *lineariserte* bevegelseslikningen.

3.4 Den lineære bølgelikningen

De tre likningene (3.2), (3.4) og (3.6) kan til sammen danne en differensiallikning hvor bare én variabel inngår. Divergensen til til (3.6) er gitt ved

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla p') = -\nabla^2 p' \ ,$$

der ∇^2 er den tre-dimensjonale Laplace-operatoren. Deriverer (3.4), og benytter $\partial(\nabla \cdot \mathbf{U})/\partial t = \nabla \cdot (\partial \mathbf{U}/\partial t)$, som gir

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = 0.$$

Setter inn for s fra (3.2), og får til slutt

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \ , \tag{3.7}$$

der $c = \sqrt{K/\rho_0}$. Likning (3.7) utgjør den lineære, tapsfrie bølgelikningen for forplantning av lyd i væsker og gasser, og c er fasehastigheten for bølgene.

Det kan vises[4] at det akustiske trykket, tetthetsendringene, partikkelhastigheten og -bevegelsene er relatert ved derivasjon eller integrasjon i tid og rom, og at disse operasjonene ikke endrer løsningens form. Dersom mediet er rotasjonsfritt vil derfor alle disse parametrene kunne substitueres for p' i (3.7).

Kapittel 4

Elementformuleringen

Foregående kapittel skisserte utledningen av en partiell differensiallikning, kalt *bølgelikningen*, som gitt passende rand- og initialbetingelser danner en fullstendig, lineær matematisk modell av bølgeforplantning i væsker og gasser. Dagens matematiske metoder for eksakt løsing av slike likninger begrenser seg til relativt enkle problemstillinger med ukomplisert geometri. Datamaskinen kan være et nyttig hjelpemiddel for å komme videre, men krever reformulering av problemet til ren algebraisk form, der bare de mest basale aritmetiske operasjoner anvendes. Ulike former for *diskretisering* kan komme til anvendelse her. Diskretisering innebærer at den ukjente funksjonen representeres med et endelig antall ukjente parametre, i en eller annen form for approksimasjon. Approksimasjon ved bruk av *testfunksjoner*, oftest klassifisert under *elementmetoder*, danner fundamentet for denne oppgaven.

4.1 Hilbertrom

Mengden av alle funksjoner som er definert (og målbare) over referanserammen S i et n-dimensjonalt rom, og som har egenskapen at kvadratet av normen, gitt ved et indreprodukt

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_S f(s)\,\overline{f(s)}\,ds < \infty,$$

er et separabelt *Hilbertrom*[31][57]. Rommet betegnes $\mathcal{L}_2(S)$ når indreproduktet er gitt ved

$$(f, g) = \int_S f(s)\,\overline{g(s)}\,ds.$$

Overstrek markerer komplekskonjugering. Enhver fullstendig funksjonsrepresentasjon f i et Hilbertrom kan uttrykkes ved en lineær sum

$$f = \sum_{N=1}^{\infty} C_N e_N$$

der $\{e_N\}$ er et subsett av en komplett ortonormal mengde og $C_N = (f, e_N)$. Denne representasjonsformen omtales gjerne som den *generaliserte Fourierrekken* til f med hensyn på e_N. Dersom S for eksempel er intervallet $[0, 2\pi]$ på den reelle tallinjen, vil en slik representasjon være den klassiske Fourier «sinus- og cosinus»-rekken.

4.2 Krav til løsningen

Lar $\mathcal{I} = (0, T]$ være et tidsintervall, med T positiv. Lar videre Ω være et domene i $\mathcal{R}^3$, avgrenset av en antatt glatt randflate Γ, med utadrettet enhetsnormal $\vec{n}$. Ønsker å finne en approksimasjon til funksjonen $U(x, y, z, t)$, definert over rom-tids-domenet $\Theta = \Omega \times \mathcal{I}$. U kan være trykk, partikkelhastighet, tetthet eller en annen størrelse som kan svinge periodisk rundt en likevektstilstand. Funksjonen skal tilfredsstille den homogene bølgelikningen

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,, \tag{4.1}$$

utledet i kapittel 3, samt randbetingelsen

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{på } \Gamma \tag{4.2}$$

og gitte initialbetingelser

$$U(\,\cdot\,, 0) = U_{REF} \tag{4.3}$$

og

$$\frac{\partial U(\,\cdot\,, 0)}{\partial t} = 0. \tag{4.4}$$

Referanseverdien U_{REF} og fasehastigheten c er konstanter. Randbetingelsen (4.2), der krav til løsningens deriverte er spesifisert, refereres ofte til som en *Neumann*-betingelse. Verdier som skal tilfredsstilles eksplisitt, som i (4.3), kalles *Dirichlet*-betingelser. I tillegg til betingelsene (4.2), (4.3) og (4.4) vil også et sett med *kilder*, i form av en eller flere noder med eksplisitt gitte tidssekvenser av Dirichlet-betingelser, bli benyttet i denne oppgaven.

4.3 Variasjonsformulering

Elementmetoder er basert på den såkalte *svake* formen av (4.1), ofte kalt en *variasjonsformulering*, og løsningen kalles en *svak løsning* av (4.1). Matematisk sett er det betraktelig enklere å vise eksistens av den svake løsningen av problemet fremfor den klassiske[31].

Partielt deriverte over Ω vil i det følgende bli uttrykt ved

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha_x} \partial y^{\alpha_y} \partial z^{\alpha_z}},$$

med $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, der $\alpha_d, d = x, y, z$, er et ikke-negativt naturlig tall og $|\alpha| = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z$.

Introduserer Hilbertrommet $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}_2(\Omega) : D^\alpha f \in \mathcal{L}_2(\Omega),\ |\alpha| \leq 1\}$, med indreprodukt

$$(f, g)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \Sigma_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega D^\alpha f \cdot D^\alpha g \; dxdydzdt \tag{4.5}$$

og tilhørende norm

$$||f||^2_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \Sigma_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega |D^\alpha f|^2 \; dxdydzdt. \tag{4.6}$$

Rommet $\mathcal{H}^1(\Omega)$ består med andre ord av funksjonene f, definert over Ω, som sammen med de førstederiverte er kvadratisk integrerbare, dvs. tilhører $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Første trinn i variasjonsformuleringen er å multiplisere (4.1) for en gitt $t \in \mathcal{I}$ med en *testfunksjon* $V \in \mathcal{V} = \mathcal{H}^1(\Omega)$. Integrerer over Ω og får uttrykket

$$\int_\Omega \frac{1}{c^2} V \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} - V\nabla^2 U(t)\, d\Omega = 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{4.7}$$

4.4 Semidiskretisering

Idéen bak elementmetoden er å erstatte det generelt uendelig-dimensjonale rommet $\mathcal{V} = \mathcal{H}^1(\Omega)$ med underrommet $\mathcal{V}_h$, bestående av stykkevis polynomiale funksjoner som kun avhenger av et endelig antall parametre. En vanlig fremgangsmåte er å approksimere løsningen ved først å diskretisere Ω ved hjelp av en passende elementmetode. Får da et *semidiskret* initialverdiproblem, i form av et *stivt* (se 4.7.3) system av ordinære differensiallikninger. For full diskretisering anvendes her en differansemetode i tiden.

Viste i 2.5.4 at bølgelikningen (4.1) i prinsippet kunne vært omformet til et system av førsteordens hyperbolske likninger. Ettersom en omforming ville firedoblet antallet variable for hver testfunksjon, og den anvendte versjonen av TSCs FRONTSIM-pakke kun tillot én variabel i hvert nodepunkt, var dette utelukket.

Differensialoperatorene i (4.1) er av andre orden i både Ω og $\mathcal{I}$, og et krav om begrensede integral i (4.7) forutsetter $\mathcal{C}^1$-kontinuitet både i testfunksjonene over Ω og i tidsdifferansene. Kan redusere kontinuitetskravet for $U(t)$ over Ω til $\mathcal{C}^0$ ved å anvende *Greens formel*[31][57], gitt ved

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, d\Omega = \int_\Gamma f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} \, d\Gamma - \int_\Omega f \nabla^2 g \, d\Omega,$$

der $d\Omega$ angir en liten bit av volumet $\Omega \subset \mathcal{R}^3$, $d\Gamma$ angir et lite område på randflaten Γ, og $\partial g / \partial \vec{n}$ er den utadrettede *normalderiverte* på Γ. Differensialoperatorene for $U(t)$ og V blir da av samme orden, og dette er en forutsetning ved anvendelsen av Galerkins metode (se 4.4.3).

Det følger at (4.7) kan formuleres som

$$\int_\Omega \frac{1}{c^2} V \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} + \nabla V \cdot \nabla U(t) \, d\Omega = 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{4.8}$$

der $\partial U / \partial \vec{n}$ er satt lik null, som angitt i (4.2). Randen er tenkt å modellere en solid, fullstendig reflekterende «vegg», slik at energitransport normalt ut gjennom randen ikke forekommer. Valg av $V = \partial U / \partial t$ i (4.8) gir et enkelt energiestimat[31]

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\left|\frac{\partial U(t)}{\partial t}\right|\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\left|\nabla U(t)\right|\right|^2 = 0, \quad t \in \mathcal{I},$$

slik at

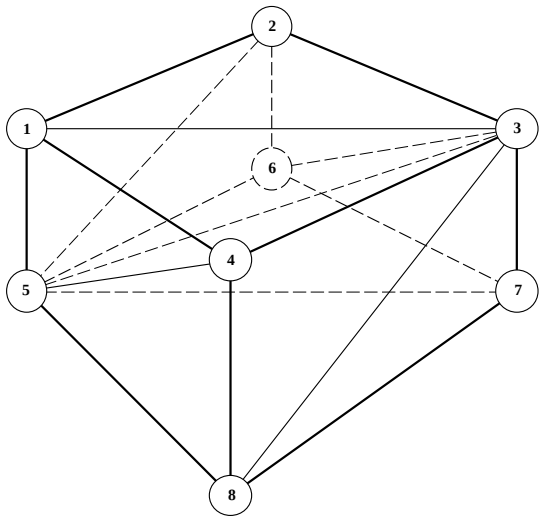
$$\left|\left|\frac{\partial U(t)}{\partial t}\right|\right|^2 + ||\nabla U(t)||^2 = \text{ konstant } = \left|\left|\frac{\partial U(\,\cdot\,, 0)}{\partial t}\right|\right|^2 + ||\nabla U(0)||^2, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Systemets *totale energi* er derved bevart så lenge $\partial U / \partial \vec{n} = 0$.

Diskretiserer Ω ved å dele hele domenet inn i en mengde $T_h = K_1, \ldots, K_L$ ikke overlappende tetraedre K_i, i FRONTSIM (se 5.1) organisert i blokker (figur 4.1), med diameter $h > 0$,

$$\Omega = \bigcup_{K \in T_h} K = K_1 \cup K_2 \ldots \cup K_L, \tag{4.9}$$

slik at ingen hjørner i et tetraeder ligger på sidekanten til et annet tetraeder, og randen Γ utgjøres av en kontinuerlig og stykkevis plan flate i tre dimensjoner. Rommet $\mathcal{V}_h$ kan defineres som $\mathcal{V}_h = \{V \in \mathcal{H}_1(\Omega) : V|_K \in \mathcal{P}_1(K) \; \forall K \in T_h\}$. Rommet inneholder med andre ord



Figur 4.1: Elementinndeling og nodenummerering i en standard FRONTSIM-blokk med seks tetraeder-elementer.

alle kontinuerlige funksjoner som er lineære på hver av tetraedrene K, og $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$. Antar at diskretiseringen er *kvasi-uniform*[19], dvs. at det finnes konstanter c_0 og c_1 uavhengige av h slik at for hvert element $K \in T_h$,

$$c_0 h \leq \sigma_K \leq \text{diam}(K) \leq c_1 h,$$

der σ_K er diameteren til den største innskrevne kulen i K. Antar videre at det finnes en interpolasjonsoperator π_h som avbilder $V \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ til V_h og tilfredsstiller

$$||(I - \pi_h)V||_{\mathcal{H}^1(K)} \leq Ch^r(K)||V||_{\mathcal{H}^{r+1}(K)} \quad \forall K \in T_h,$$

der C er en konstant, uavhengig av h, K og V, og eksponenten r er karakteristisk for V_h og typisk representerer graden på de anvendte polynomene. Under tilsvarende antakelser kan det vises[17] at det finnes en konstant C, som over, slik at

$$\begin{aligned} ||(I - \pi_h)V||_{\mathcal{L}_2(K)} &\leq Ch^2(K)|V|_{\mathcal{H}^2(K)} \quad \text{og} \\ |(I - \pi_h)V|_{\mathcal{H}^1(K)} &\leq C\frac{h^2(K)}{\sigma_K}|V|_{\mathcal{H}^2(K)} \quad \forall K \in T_h, \end{aligned}$$

der

$$|V|_{\mathcal{H}^r(\Omega)} = (\Sigma_{|\alpha|=r} \int_\Omega |D^\alpha V|^2 \, dxdydz)^{\frac{1}{2}}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

måler $\mathcal{L}_2$-normen bare til de partielt deriverte av V av orden akkurat lik r, og ikke lavere. $|\cdot|_{\mathcal{H}^r(\Omega)}$ kalles derfor en *seminorm*.

Rommet $\mathcal{V}_h$ kan sies å være *komplett*, ettersom det kan vises at funksjonene i $\mathcal{V}_h$, gitt et tilstrekkelig antall $K \in T_h$, kan tilnærme enhver «pen» funksjon i $\mathcal{V}$ med ønsket presisjon[31].

4.4.1 Basisfunksjonene i 3D-rommet

For å beskrive funksjonen $V \in \mathcal{V}_h$ velger jeg verdiene $V(a_i)$ der tetraedrenes hjørner møtes, heretter referert til som *nodene* a_i, $i = 1, \ldots, N$ på T_h, som parametre. *Basisfunksjonene* $\varphi_j \in$

$\mathcal{V}_h$, $j = 1, \ldots, N$, er da gitt ved

$$\varphi_j(a_i) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, N.$$

Observerer at volumet som utgjøres av mengden av punkter (x, y, z) der $\varphi_j(x, y, z) > 0$, består av tetraedre med noden a_j felles. En funksjon $V \in \mathcal{V}_h$ kan representeres ved

$$V(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N} V(a_j)\varphi_j(x, y, z), \quad \text{for } (x, y, z) \in \Omega \cup \Gamma,$$

dvs. enhver $V \in \mathcal{V}_h$ kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av basisfunksjonene φ_j. Det følger at V_h er et lineært, N-dimensjonalt rom med basis $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$.

4.4.2 Funksjonsrepresentasjon

Gitt verdiene v_i, $i = 1, \ldots, 4$, finnes det en entydig bestemt V på volumelementet K med hjørner (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, 4$, slik at

$$V(x_i, y_i, z_i) = v_i, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Den lineære funksjonen V, beskrevet ved $V(x, y, z) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z$ med konstanter $c_i \in \mathcal{R}$, gir da likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

med c_i ukjent. Systemet har en entydig løsning hvis og bare hvis

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \neq 0,$$

og denne løsningen er gitt ved [57]

$$c_j = \frac{\sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+j} d_{ij} v_i}{D}, \quad j = 1, \ldots, 4, \tag{4.11}$$

der d_{ij} er resultatet av å eliminere rad i og kolonne j fra 4×4-matrisen i (4.10), også kalt en *subdeterminant* av orden 3.

Et resultat fra lineær algebra sier at $D/6$ = volumet av K. Forutsatt at tetraedrene ikke er degenerert, er dermed determinanten $D \neq 0$ og systemet (4.10) har en løsning.

4.4.3 Global formulering

Kan nå formulere følgende semidiskrete elementmetode for problemet basert på (4.1), med utgangspunkt i variasjonsformuleringen i (4.8): Finn $U_h(t) \in \mathcal{V}_h$, $t \in \mathcal{I}$, slik at

$$\int_\Omega \frac{1}{c^2} V \frac{\partial^2 U_h(t)}{\partial t^2} + \nabla V \cdot \nabla U_h(t)\, d\Omega = 0 \quad \forall V \in \mathcal{V}_h, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{4.12}$$

Siden $U_h(t) \in \mathcal{V}_h$ tilfredsstiller (4.12),

$$U_h(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i(t)\varphi_i(x,y,z) \quad \text{der} \quad \xi_i(t) = U_h(x_i,y_i,z_i,t),$$

der $\xi_i(t) \in \mathcal{R}$ er tidsavhengige koeffisienter, og Galerkins metode tilsier at V kan velges lik $\varphi_j,\ j = 1,\ldots,N$, kan (4.12) skrives som

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{c^2} \int_\Omega \varphi_i \cdot \varphi_j d\Omega\, \ddot{\xi}_i(t) + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j d\Omega\, \xi_i(t) = 0, \quad \text{J} = 1,\ldots,N, \quad t \in \mathcal{I}.$$

Dette lineære systemet av N ordinære differensiallikninger med N ukjente kan uttrykkes som et matrise-vektor produkt

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{M}\ddot{\xi}(t) + \mathbf{S}\xi(t) = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{4.13}$$

der $\ddot{\xi} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, og matrisene

$$\mathbf{M} = (m_{ij}) = \int_\Omega \varphi_i \cdot \varphi_j d\Omega$$

og

$$\mathbf{S} = (s_{ij}) = \int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j d\Omega,$$

og løsningsvektoren $\xi = (\xi_i)$. Det antas at et sett initaldata er gitt, approksimert ved $\xi(0) = W_0$ og $\dot{\xi}(0) = W_1$ relativt til basis $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N\} \in \mathcal{V}_h$.

Har vist at stykkevis spesifiserte testfunksjoner, med identiske differensialoperatorer for $U(t)$ og V, gjør det mulig å velge identiske basisfunksjoner for $U(t)$ og V slik at matrisene M og S som regel blir symmetriske. Dette refereres til som *Galerkins metode*.

Tradisjonelt blir M-matrisen referert til som *massematrisen* og S-matrisen som *stivhetsmatrisen*. Betegnelsene stammer fra den opprinnelige anvendelsen av elementmetoden, som var styrkeberegning av mekaniske konstruksjoner.

4.5 Lokal formulering

På elementform kan systemet (4.13) skrives som

$$\frac{1}{c^2}\mathbf{M}^K\ddot{\xi}(t) + \mathbf{S}^K\xi(t) = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{4.14}$$

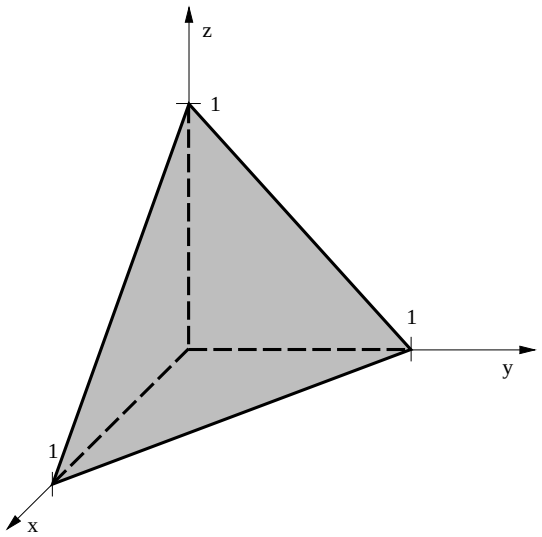
der $\mathbf{M}^K = (m_{ij}^K)$ og $\mathbf{S}^K = (s_{ij}^K)$ er 4×4-matriser. Matrisene $\mathbf{M}^K$ og $\mathbf{S}^K$ kalles gjerne med en fellesbetegnelse for *elementmatriser*.

4.5.1 Koeffisienter for $\mathbf{M}^K$-matrisen

Volumet $\text{vol}(K^e)$ av «enhetstetraederet» K^e, med ett hjørne i origo og de tre andre hjørnene i henholdsvis $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ og $(1,0,0)$, kan finnes ved

$$\text{vol}(K^e) = \int_{\Omega^e} d\Omega^e = \int_0^1 \int_0^{-x+1} \int_0^{-x-y+1} dxdydz = 1/6. \tag{4.15}$$

En lineær basisfunksjon $\varphi_i^e(x, y, z)$, $i = 1, \ldots, 4$, på K^e skal ha verdi én i node i, null i de tre andre, og interpolere lineært mellom nodene over resten av elementet. Nodene antas her å falle sammen med hjørnene i tetraederet.



Figur 4.2: Enhetstetraederet

Eksempler på basisfunksjoner er funksjonene $\varphi_2^e(x, y, z) = x$ og $\varphi_3^e(x, y, z) = y$ over enhetstetraederet. Fra (4.13) kan det sees at matrisen $\mathbf{M}^e$ består av koeffisientene $m_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \varphi_i^e \cdot \varphi_j^e \, d\Omega^e$, $i, j = 1, \ldots, 4$, slik at for eksempel

$$m_{23}^e = \int_{\Omega^e} \varphi_2^e \cdot \varphi_3^e \, d\Omega^e = \int_0^1 \int_0^{-x+1} \int_0^{-x-y+1} xy \;\; dxdydz = 1/120 = 1/20 \cdot \text{vol}(K^e)$$

og

$$m_{22}^e = \int_{\Omega^e} (\varphi_2^e)^2 \, d\Omega^e = \int_0^1 \int_0^{-x+1} \int_0^{-x-y+1} x^2 \;\; dxdydz = 1/60 = 1/10 \cdot \text{vol}(K^e).$$

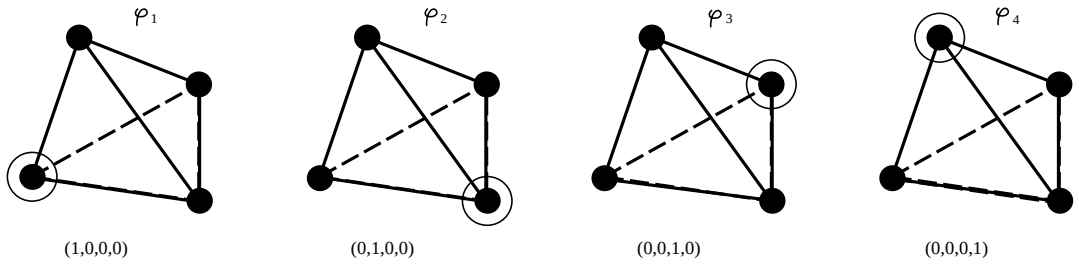
Tilsvarende kan det vises at

$$m_{ij}^e = \begin{cases} 1/10 \cdot \text{vol}(K^e), & i = j \\ 1/20 \cdot \text{vol}(K^e), & i \neq j \end{cases}$$

Ettersom alle tetraederelementer i denne oppgaven kan betraktes som én-til-én lineæravbildninger av enhetstetraederet, følger det at matrisene $\mathbf{M}^K$ er gitt ved

$$\mathbf{M}^K = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/20 & 1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/10 & 1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/20 & 1/10 & 1/20 \\ 1/20 & 1/20 & 1/20 & 1/10 \end{bmatrix} \cdot \text{vol}(K), \tag{4.16}$$

der $\text{vol}(K)$ er volumet av hvert tetraeder K.



Figur 4.3: Basisfunksjonene φ_i^K på et element for fire ulike høyresider i (1.3)

4.5.2 Koeffisienter for $\mathbf{S}^K$-matrisen

Basisfunksjonene $\varphi_i^K(x,y,z)$, $i = 1,\ldots,4$, på K kan finnes ved å løse likningssystemet (4.10) med fire spesielle valg av høyresider — henholdsvis $(1,0,0,0)$ for φ_1^K, $(0,1,0,0)$ for φ_2^K, $(0,0,1,0)$ for φ_3^K og $(0,0,0,1)$ for φ_4^K — se fig. 4.3. Eksempelvis vil $\varphi_1^K = c_1^1 + c_2^1 x + c_3^1 y + c_4^1 z$, her valgt til å ha høyresiden $(1,0,0,0)$, ifølge (4.11) ha parametrene:

$$
\begin{aligned}
c_1^1 &= [((-1)^{1+1}\cdot d_{11}\cdot 1) + ((-1)^{2+1}\cdot d_{21}\cdot 0) + ((-1)^{3+1}\cdot d_{31}\cdot 0) + ((-1)^{4+1}\cdot d_{41}\cdot 0)]/D \\
&= d_{11}/D \;=\; \det\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}/D \\
&= (x_2y_3z_4 + y_2z_3x_4 + z_2x_3y_4 - x_2z_3y_4 - y_2x_3z_4 - z_2y_3x_4)/D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2^1 &= [((-1)^{1+2}\cdot d_{12}\cdot 1) + ((-1)^{2+2}\cdot d_{22}\cdot 0) + ((-1)^{3+2}\cdot d_{32}\cdot 0) + ((-1)^{4+2}\cdot d_{42}\cdot 0)]/D \\
&= -d_{12}/D \;=\; -\det\begin{bmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}/D \\
&= -(y_3z_4 + y_2z_3 + z_2y_4 - z_3y_4 - y_2z_4 - z_2y_3)/D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_3^1 &= [((-1)^{1+3}\cdot d_{13}\cdot 1) + ((-1)^{2+3}\cdot d_{23}\cdot 0) + ((-1)^{3+3}\cdot d_{33}\cdot 0) + ((-1)^{4+3}\cdot d_{43}\cdot 0)]/D \\
&= d_{13}/D \;=\; \det\begin{bmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{bmatrix}/D \\
&= (x_3z_4 + x_2z_3 + z_2x_4 - z_3x_4 - x_2z_4 - z_2x_3)/D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_4^1 &= [((-1)^{1+4}\cdot d_{14}\cdot 1) + ((-1)^{2+4}\cdot d_{24}\cdot 0) + ((-1)^{3+4}\cdot d_{34}\cdot 0) + ((-1)^{4+4}\cdot d_{44}\cdot 0)]/D \\
&= -d_{14}/D \;=\; -\det\begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{bmatrix}/D \\
&= -(x_3y_4 + x_2y_3 + y_2x_4 - y_3x_4 - y_2z_4 - y_2x_3)/D.
\end{aligned}
$$

De tre andre basisfunksjonene på elementet finnes på tilsvarende måte. Fra uttrykket for φ_1^K over, kan det observeres at

$$\frac{\partial \varphi_i^K(x,y,z)}{\partial x} = c_2^i, \quad \frac{\partial \varphi_i^K(x,y,z)}{\partial y} = c_3^i \quad \text{og} \quad \frac{\partial \varphi_i^K(x,y,z)}{\partial z} = c_4^i, \quad i = 1,\ldots,4,$$

og ettersom

$$\nabla\varphi_i^K \cdot \nabla\varphi_j^K = \frac{\partial \varphi_i^K(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j^K(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i^K(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j^K(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i^K(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial \varphi_j^K(x,y,z)}{\partial z}$$

kan en koeffisient i matrisen $\mathbf{S}^K = (s_{ij}^K)$ skrives som

$$s_{ij}^K = \int_{\Omega^K} c_2^i c_2^j + c_3^i c_3^j + c_4^i c_4^j \, d\Omega^K \quad i,j = 1,\ldots,4.$$

Konstantene c_2, c_3 og c_4 kan settes utenfor integralet, og $\int_{\Omega^K} d\Omega^K = \text{vol}(K) = D/6$. Har da endelig at

$$s_{ij}^K = \text{vol}(K) \cdot \left[c_2^i c_2^j + c_3^i c_3^j + c_4^i c_4^j\right] \quad i,j = 1,\ldots,4. \tag{4.17}$$

4.6 Assemblering

Den *globale* matrisen M kan finnes ved først å beregne elementmatrisene for alle $K \in T_h$ og så, gitt (4.9), summere bidragene fra hvert tetraeder:

$$m_{ij} = \sum_{K \in T_h} m_{ij}^K. \tag{4.18}$$

Summasjonen av elementbidragene kalles *assemblering*. Følgende illustrasjon viser mer detaljert hvordan 4×4-matrisen $\mathbf{M}^K = (m_{ij}^K)$, fra elementet K med globalnoder e, f, g, h, adderes *symmetrisk* inn i den globale M-matrisen:

$$\begin{bmatrix}
m_{11} & \cdots & m_{1e} & \cdots & m_{1f} & \cdots & m_{1g} & \cdots & m_{1h} & \cdots & m_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m_{e1} & \cdots & (m_{ee} + m_{11}^K) & \cdots & (m_{ef} + m_{12}^K) & \cdots & (m_{eg} + m_{13}^K) & \cdots & (m_{eh} + m_{14}^K) & \cdots & m_{en} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m_{f1} & \cdots & (m_{fe} + m_{21}^K) & \cdots & (m_{ff} + m_{22}^K) & \cdots & (m_{fg} + m_{23}^K) & \cdots & (m_{fh} + m_{24}^K) & \cdots & m_{fn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m_{g1} & \cdots & (m_{ge} + m_{31}^K) & \cdots & (m_{gf} + m_{32}^K) & \cdots & (m_{gg} + m_{33}^K) & \cdots & (m_{gh} + m_{34}^K) & \cdots & m_{gn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m_{h1} & \cdots & (m_{he} + m_{41}^K) & \cdots & (m_{hf} + m_{42}^K) & \cdots & (m_{hg} + m_{43}^K) & \cdots & (m_{hh} + m_{44}^K) & \cdots & m_{hn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
m_{n1} & \cdots & m_{ne} & \cdots & m_{nf} & \cdots & m_{ng} & \cdots & m_{nh} & \cdots & m_{nn}
\end{bmatrix}$$

Koeffisientene $m_{ij} = 0$ med mindre a_i og a_j er nabonoder. Den globale M-matrisen vil på grunn av dette typisk ha en diagonaldominant båndstruktur med et stort antall nullkoeffisienter, og det er derfor ofte meget plassbesparende å ikke assemblere denne, men kun lagre de fulle elementmatrisene $\mathbf{M}^K$. En mer avansert teknikk er å assemblere i en éndimensjonal vektor som kun inneholder koeffisienter fra M som er forskjellig fra null. Informasjon om indeksering av denne vektoren kreves også. Dette er den mest plassbesparende metoden, og den anvendes ofte i simulatorer, blant annet i FRONTSIM.

4.7 Diskretisering i tidsdomenet

Fleksibiliteten i parameterstyrte metoder som Newmarks metode[51] åpner for å introdusere aperiodiske, også diskontinuerlige, drivende funksjoner, selv om disse strengt tatt ikke er i $\mathcal{H}^1$. Bølgelikningen kjennetegnes blant annet ved at den generelle løsningen er en funksjon som i et såkalt frittfelt propagerer uendret og i samme hastighet vekk fra lydkilden i alle romretninger (se 6.1 for generell én-dimensjonal løsning). Den ekvivalente numeriske kilden er i denne oppgaven gitt ved en eller flere noder med Dirichlet-betingelse som varierer som funksjon av tiden. Klassen av slike såkalte *drivende* funksjoner kan i mange tilfeller med fordel utvides fra «steady state»-analysens monokromatiske sinusfunksjoner til mer bredspektrede, sammensatte funksjoner med bestemte egenskaper. Parameterstyrte metoders stabilitet, nøyaktighet og numeriske dempning kan, og bør, da i noen grad tilpasses problemet.

Utledningen som følger er basert på Zienkewics[69], som har vist at en trestegs rekurrensrelasjon basert på Newmarks metode kan utledes fra en lokal approksimasjon basert på elementmetodeteknikker i tidsdomenet.

Tidsdomenet $\mathcal{I}$ kan diskretiseres ved oppdeling i N intervaller

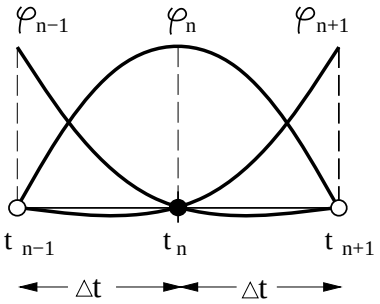
$$0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T,$$

der $t_n = n\Delta t$. Tar utgangspunkt i et lokalt tre-noders kvadratisk element J med noder i punktene t_{n-1}, t_n og t_{n+1}, og benytter testfunksjoner $W \in \mathcal{W}_{2\Delta} = \{W \in \mathcal{H}^1(\mathcal{I}) : W|_J \in \mathcal{P}_2(J),\ J = [t_{n-1}, t_{n+1}]\}$. Antar uniforme tidsintervaller, med $\Delta t = t_{n+1} - t_n = t_n - t_{n-1}$. Velger $\tau = (t - t_n)/\Delta t$, og kan da uttrykke tre basisfunksjoner, vist i figur 4.4, ved

$$\varphi_{n-1} = -\frac{\tau(1-\tau)}{2}, \qquad \varphi_n = 1 - \tau^2 \qquad \text{og} \qquad \varphi_{n+1} = \frac{\tau(1+\tau)}{2}, \tag{4.19}$$

med tilsvarende andrederiverte

$$\frac{\partial^2 \varphi_{n-1}}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} = -\frac{2}{\Delta t^2} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial^2 \varphi_{n+1}}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2}. \tag{4.20}$$



Figur 4.4: Basisfunksjoner på tidselement J

Multipliserer systemet (4.14) med testfunksjonen W, integrerer over J, og får

$$\int_J \frac{1}{c^2} \mathbf{M}^K \ddot{\xi}_{2\Delta} W + \mathbf{S}^K \xi_{2\Delta} W \, dt = 0, \quad \forall W \in \mathcal{W}_{2\Delta}, \tag{4.21}$$

der $\xi_{2\Delta} \in \mathcal{W}_{2\Delta}$, gitt ved

$$\xi_{2\Delta} = \eta^{n-1}\varphi_{n-1} + \eta^n\varphi_n + \eta^{n+1}\varphi_{n+1}, \quad \eta^i = \xi_{2\Delta}(t_i), \quad i = \{n-1, n, n+1\},$$

tilfredsstiller (4.21). Ved innsetting av uttrykk for basisfunksjonene fra (4.19) og (4.20) kan (4.21) omformes til

$$[\mathbf{M}^K + \beta\alpha\mathbf{S}^K]\,\eta^{n+1} + [-2\mathbf{M}^K + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\alpha\mathbf{S}^K]\,\eta^n + [\mathbf{M}^K + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma)\alpha\mathbf{S}^K]\,\eta^{n-1} = 0, \quad (4.22)$$

der

$$\begin{aligned} \alpha &= c^2\Delta t^2 \\ \beta &= \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\tau(\tau+1)W\,d\tau}{\int_{-1}^{1} W\,d\tau} \\ \gamma &= \int_{-1}^{1} (\tau + \frac{1}{2})W\,d\tau. \end{aligned}$$

Matrisene $\mathbf{M}^K$ og $\mathbf{S}^K$ antas konstante i tid.

4.7.1 Startvektorer

Skjemaet krever to initielle løsningsvektorer, ved f.eks. $t = 0$ og $t = \Delta t$, for å starte. Vektoren $U(\,\cdot\,, 0)$ antas gitt. En forlengs-differanse her vil gi en approksimasjon til $U(\cdot, \Delta t)$, men nøyaktigheten blir da bare av $\mathcal{O}(\Delta t)$. En lokal Taylorutvikling vil i stedet gi

$$U(\,\cdot\,, \Delta t) = U(\,\cdot\,, 0) + \frac{\partial U(\,\cdot\,, 0)}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U(\,\cdot\,, 0)}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta t)^3,$$

og ved innsetting av gitte verdier $p(0) = U(\,\cdot\,, 0)$ og $q(0) = \frac{\partial U(\,\cdot\,, 0)}{\partial t}$, samt at $\frac{\partial^2 U(\,\cdot\,, 0)}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 U(\,\cdot\,, 0)$, fås

$$U(\,\cdot\,, \Delta t) = p(0) + q(0)\Delta t + \frac{1}{2}c^2\nabla^2 U(\,\cdot\,, 0),$$

med nøyaktighet av $\mathcal{O}(\Delta t)^3$. Ved interpolasjon eller projeksjon gir dette en nøyaktig approksimasjon til $U(\cdot, \Delta t)$, som sammen med $U(\,\cdot\,, 0)$ kan utgjøre de to første vektorene i rekursjonen (4.22).

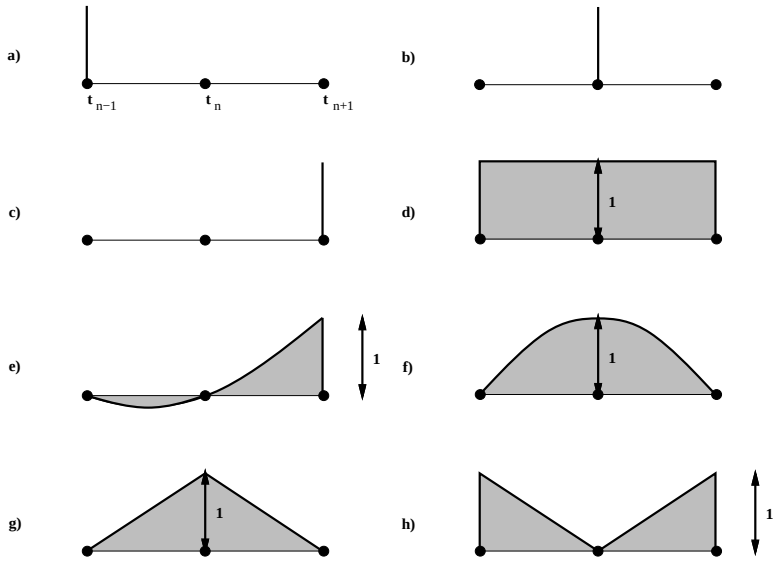
Kommentar

Sterke begrensninger på mulighetene til globale endringer i den anvendte programpakken gjorde det nødvendig å benytte pakkens innebygde rutiner for generering av startvektorer. Uten dokumentasjon var det ikke trivielt å finne hva slags approksimasjon som lå til grunn for disse. Senere feilanalyser (se 6.3.1) kan tyde på at nøyaktigheten begrenser seg til $\mathcal{O}(\Delta t)$.

4.7.2 Skjema

Rekurrensrelasjonen (4.22) gir et likningssystem

$$[\mathbf{M}^K + \beta\alpha\mathbf{S}^K]\,\eta^{n+1} = \mathbf{b}, \quad (4.23)$$



Figur 4.5: Ulike W-funksjoner.

som løses for hvert tidssteg, der vektoren

$$\mathbf{b} = [2\mathbf{M}^K - (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\alpha\mathbf{S}^K]\,\eta^n - [\mathbf{M}^K + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma)\alpha\mathbf{S}^K]\,\eta^{n-1}. \tag{4.24}$$

Ulike skjemaer i tidsdomenet kan gis ved ulike verdier for β og γ, vist i figur 4.5 og tabellen (4.25).

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
γ	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
β	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

(4.25)

4.7.3 Stabilitet

Semidiskretisering av (4.7) gav et system (4.13) av ordinære differensiallikninger, der anvendelsen av Galerkins metode gjør at $N \times N$-matrisene $\mathbf{M}$ og $\mathbf{S}$ kan antas symmetriske. Egenverdiene til matrisen $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}$ er gitt ved *egenverdiproblemet*

$$(\mathbf{S} - \omega^2\mathbf{M})\lambda = 0,$$

dersom den *karakteristiske* likningen

$$\det(\mathbf{S} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \tag{4.26}$$

har ikke-trivielle løsninger i form av egenverdiene $\omega_1^2 \leq \ldots \leq \omega_M^2$, der $\omega_1 = \mathcal{O}(1)$ og $\omega_M = \mathcal{O}(h^{-2})$, og tilhørende egenvektorer $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$. Det kan vises at egenverdiene er positive, reelle tall hvis matrisene $\mathbf{M}$ og $\mathbf{S}$ er *positivt definitte*, og at større egenverdier ω_m svarer til hurtig oscillerende (høyfrekvente) egenvektorer λ_m, mens mindre egenverdier tilsvarer lavfrekvente egenvektorer. Systemet (4.13) av ordinære differensiallikninger refereres til som *stivt* fordi løsningen $\xi(t)$ kan ha komponenter spredt over tidsskalaen fra $\mathcal{O}(1)$

til $\mathcal{O}(h^{-2})$, og dette kan stille store krav til stabiliteten til den anvendte metoden for tidsdiskretisering[31].

Et skjema sies å være *stabilt* dersom en feil i initialbetingelsene, målt i en passende norm, ikke vokser ubegrenset med tiden. Stabilitetsbegrepet avhenger derfor av normen feilen måles i. Anta at $\mathbf{e}^n$ er feilen ved tidspunkt n, som er resultat av en feil $\mathbf{e}^0$ i initialbetingelsene. La $||\cdot||$ betegne en gitt norm i løsningsrommet, og ϵ være et vilkårlig positivt tall. Systemet sies da å være stabilt i normen $||\cdot||$ hvis og bare hvis det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ slik at

$$||\mathbf{e}^n|| < \epsilon \quad \text{så lenge} \quad ||\mathbf{e}^0|| < \delta.$$

Feilvektoren $\mathbf{e}^n$ ved tidspunkt n kan uttrykkes som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{e}^n = \sum_{m=1}^{M} y_m^n \lambda_m$$

av egenvektorene λ_m, og for hver m følger det ved substitusjon i (4.22) at

$$[1 + \beta\alpha\omega_m^2]\, y_m^{n+1} + [-2 + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\alpha\omega_m^2]\, y_m^n + [1 + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma)\alpha\omega_m^2]\, y_m^{n-1} = 0. \quad (4.27)$$

Det kan vises at (4.27) har en løsning på formen

$$y_m^n = C\mu^n, \quad (4.28)$$

der C er en konstant, og at løsningen eksisterer dersom annengradsuttrykket

$$[1 + \beta\alpha\omega_m^2]\, \mu^2 + [-2 + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\alpha\omega_m^2]\, \mu + [1 + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma)\alpha\omega_m^2] \; = 0 \quad (4.29)$$

har røtter $\mu = \{\mu_1, \mu_2\}$. Den numeriske løsningen (4.28) er stabil og *udempet* dersom

$$|\mu_i| = 1, \quad i = 1, 2,$$

eller stabil og (numerisk) *dempet* hvis

$$|\mu_i| < 1, \quad i = 1, 2.$$

Ved å analysere røttene til annengradsuttrykket (4.29) kan det på bakgrunn av dette vises[69] at skjemaet (4.22) er *ubetinget* stabilt i normen $||\cdot||_{\mathcal{H}^1}$ dersom

$$\beta \geq \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \gamma)^2, \quad (4.30)$$

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{2} - \gamma + \beta \geq 0. \quad (4.32)$$

Skjemaer med $\beta \geq 1/4$ og $\gamma = 1/2$ er ubetinget stabile og uten numerisk demping, mens $\gamma > 1/2$ øker den numeriske dempingen med økende lengde på tidsstegene. Høyere frekvenser dempes mest effektivt, og dette kan være gunstig ved spuriøse oscillasjoner, men til gjengjeld reduseres nøyaktigheten[69].

Observerer fra betingelsene at bare skjemaene *c* og *h)* i figur 4.5 er ubetinget stabile. Observerer videre at alle ubetinget stabile skjemaer, samt de fleste betinget stabile, krever løsing av et likningssystem (4.23) for hvert tidssteg. Skjemaer som krever løsing av et likningssystem ved hvert tidssteg kalles *implisitte*. Dersom matrisene M og S er diagonale eller kan diagonaliseres (ved såkalt «lumping»[68][69]), eller β velges lik null og matrisen M er diagonal eller kan diagonaliseres, er η^{n+1} gitt *eksplisitt*, slik at løsing av likningssystemer for hvert tidssteg er unødvendig. Til gjengjeld er slike såkalte eksplisitte skjemaer bare betinget stabile.

Ved løsing av annengradsuttrykket (4.29) kan man fra diskriminanten finne tilleggskravet[69]

$$-\omega_m^2 \Delta t_n^2 [\, 4\beta - (\frac{1}{2} + \gamma)^2 \,] \; < \; 4. \tag{4.33}$$

Dersom kravene (4.30) til ubetinget stabilitet ikke er oppfylt, vil valg av tidssteg som tilfredsstiller (4.33) likevel gi stabile skjemaer.

Elementmetoden resulterer ofte i likningssystemer av en størrelsesorden som gjør det lite hensiktsmessig å beregne egenverdiene direkte fra den karakteristiske likningen (4.26). Det finnes iterative numeriske metoder som kan finne den største, eller *dominante*, globale egenverdien ω_M [1], men det kan også vises[29] at den største globale egenverdien alltid er mindre enn den største lokale egenverdien til elementmatrisene. Et konservativt estimat av ω_M kan med andre ord finnes fra den karakteristiske likningen anvendt på de reduserte elementmatrisene til elementene i de tettest diskretiserte delene av beregningsgitteret.

CFL-betingelsen

Skjemaet gitt ved parameterparet *b)* i tabell (4.25), $\gamma = 1/2$ og $\beta = 0$, kan sees å samsvare med det klassiske eksplisitte *sentrerte* differanseskjemaet, forutsatt at M-matrisen er diagonal eller kan diagonaliseres. Det kan vises[43] at dette skjemaet er stabilt dersom

$$\Delta t_n \leq \frac{h}{c}, \tag{4.34}$$

og denne ulikheten referes ofte til som *CFL*-betingelsen, etter *C*ourant, *F*riedrich og *L*ewy. Betingelsen kan også uttrykkes ved

$$\frac{h}{\Delta t_n} \geq c, \tag{4.35}$$

som sier at skjemaets bølgehastighet $h/\Delta t_n$ må være minst like stor som den fysiske bølgehastigheten c. Svært mange betinget stabile trestegs differanseskjemaer må tilfredsstille CFL-betingelsen for å være stabile. I tillegg kan det vises[43] at eksakt tilfredsstillelse av betingelsen gir minst dispersjon og derved størst nøyaktighet ved modellering av bølgelikningen med disse skjemaene. Betinget stabile skjemaer vil sjelden kunne tilfredsstille betingelsen eksakt, slik at denne nøyaktigheten i praksis er uoppnåelig.

4.7.4 Nøyaktighet

Stabilitetsanalysen i avsnitt 4.7.3 kan samtidig sees som en viktig del av analysen av numeriske amplitudefeil, ettersom ustabiliteteter forårsaker de største amplitudefeilene ved numerisk løsing av bølgelikningen. Tilsvarende kan *numerisk dispersjon*, nærmere gjennomgått i 6.5.2, sees som en form for fasefeil. Fra analysene omkring plane harmoniske bølger i

avsnitt 6.3 og i kapittel 2, kan det sees at amplitude- og fasefeil typisk er mest kritiske ved løsing av den lineære bølgelikningen.

For å kunne avgjøre hvor godt en numerisk løsning approksimerer en analytisk løsning til det samme problemet, er det hensiktsmessig å måle «avstanden» mellom de to løsningene i en passende diskret *funksjonsnorm*. La $U_h(x)$ være en diskretisert én-dimensjonal funksjon, definert i punktene $x_i = ih, i = 1, \ldots, n$, der $n > 0$ er et heltall. Kan da definere de diskrete $\mathcal{L}^p$-normene ved[43]

$$||U_h||_p = (h \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

der $p \geq 1$. Normene kjennetegnes ved egenskapene

$$\begin{array}{ll} i) & ||U_h||_p = 0 \Rightarrow U_h = 0 \\ ii) & ||U_h||_p \geq 0 \\ iii) & ||\alpha U_h||_p = |\alpha| ||U_h||_p \\ iv) & ||U_h + V_h||_p \leq ||U_h||_p + ||V_h||_p, \end{array}$$

for alle $\alpha \in \mathcal{R}$ og $U_h, V_h \in \mathcal{R}^n$. Spesielt er 1-, 2- og ∞-normene mye brukt, gitt ved

$$\begin{array}{lcl} ||U_h||_1 & = & h \sum_{i=1}^{n} |u_i| \\ ||U_h||_2 & = & (h \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ ||U_h||_\infty & = & \max_i |u_i|. \end{array} \tag{4.36}$$

Et (strengt) krav til en numerisk metode kan være at den numeriske løsningen $U_h(x,t)$ konvergerer mot den tilsvarende løsningen $U(x,t)$ av det analytiske problemet når $h, \Delta t \rightarrow 0$. Hvorvidt dette kravet er oppfylt kan måles i en passende diskret $\mathcal{L}^p$-norm ved

$$|| \ U(\cdot, t) - U_h(\cdot, t) \ ||_p \ \rightarrow \ 0 \text{ når } h, \ \Delta t \ \rightarrow \ 0, \tag{4.37}$$

for enhver gitt $t \geq 0$.

Semidiskretiseringen beskrevet i 4.4 forventes å gi en nøyaktighet av $\mathcal{O}(h^2)$ i rommet. Samtidig skal en tidsdiskretisering som beskrevet tidligere i denne seksjonen, på formen

$$\xi_{2\Delta} = \eta^{n-1}\varphi_{n-1} + \eta^n \varphi_n + \eta^{n+1}\varphi_{n+1},$$

forventes å gi en nøyaktighet av $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ i tiden dersom $\xi_{2\Delta}$ er symmetrisk om t_n. Dette gjelder samtlige skjemaer med $\gamma = 1/2$.

Generelt krever skjemaer med $\mathcal{O}(h^2)$ i rommet og mindre enn $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ i tiden at $c\Delta t$ velges betraktelig mindre enn h for å oppnå ønsket nøyaktighet. For betinget stabile skjemaer er stabilitetsbetingelsene med andre ord ikke alltid den begrensende faktor, og skjemaer med andreordens nøyaktighet i tid og rom kan ofte presses helt opp mot stabilitetsgrensen, med tilhørende redusert prosesseringstid. I 6.5.1 gis praktiske stabilitetstester av skjemaene i tabell (4.25).

Kapittel 5

Implementasjon

Simuleringene i denne oppgaven er utført ved hjelp av egne implementasjoner inne i *FRONTSIM*, en programpakke utviklet av Technical Software Consultants A/S (TSC). FRONTSIM er utviklet for simulering av kompressibel væske- og gassflyt i to- og tredimensjonale heterogene oljereservoarer.

5.1 FRONTSIM

En FRONTSIM-simulering tar utgangspunkt i en rekke gitte data om f.eks. beregningsgitter og geologi, lest inn fra en fil. For hvert tidssteg løses så en trykklikning, der metningen fra forrige tidssteg er kjent, fulgt av beregning av hastighetsfelt og andre trykkavhengige parametre. Metningslikningen løses til slutt ved hjelp av en såkalt frontfølgingsteknikk (*front tracking*), se figur 5.1. Under løsingen av metningslikningen er trykket kjent, og metoden refereres til som en *IMPES-metode*, der IMPES står for Implisitt Trykk (Pressure), Eksplisitt Metning (Saturation). Metningslikningen er en ulineær konserveringslov, som under gitte betingelser kan utvikle singulariteter i form av bratte fronter der deriverte ikke eksisterer. Frontene, som svarer til skarpe overganger mellom ulike faser (ofte kalt *sjokk*), følges langs strømlinjer beregnet fra trykkløsningen. Resultatet er en typisk såkalt *Buckley-Leverett* metningsprofil uten numerisk dispersjon.

Trykket approksimeres med lineære testfunksjoner, og likningen løses over et beregningsgitter med blokkstruktur, der hver enkelt blokk er delt inn i trekanter (2D) eller tetraedre (3D) som vist i figur 4.1.

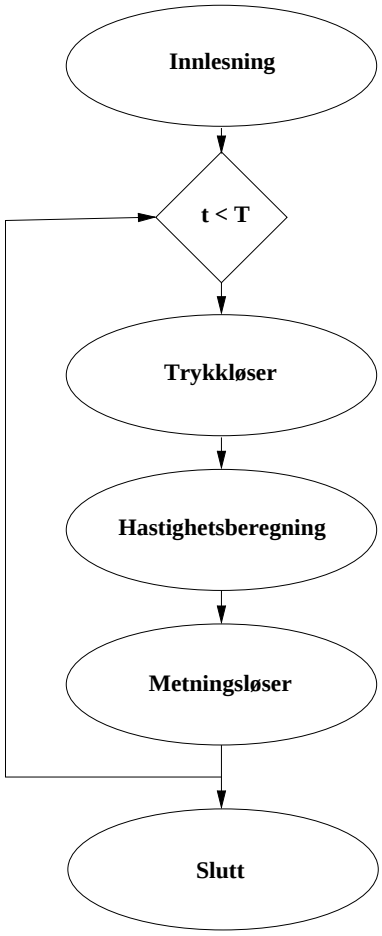
5.1.1 Likningsløser

Det «glisne» lineære likningssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, fra assembleringen av den diskretiserte trykklikningen, løses iterativt ved bruk av konjugerte gradienters metode (CG) hvis $\mathbf{A}$ er symmetrisk og positivt definitt, eller den stabiliserende CGSTAB ved symmetrisk $\mathbf{A}$-matrise. I begge tilfeller prekondisjoneres likningssystemet ved en MILU (Modified Incomplete LU) dekomposisjon.

Prekondisjonering

For å øke effektiviteten *prekondisjoneres* likningssystemet. Det vil si at istedet for

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$



Figur 5.1: Enkelt flytdiagram for en simulering i FRONTSIM. For hvert tidssteg løses trykklikningen, hastighetsfeltet beregnes og til slutt løses metningslikningen på basis av kjent trykk.

løser FRONTSIM det ekvivalente systemet

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b},$$

der $\mathbf{M}$ er en ikke-singulær prekondisjoneringsmatrise, konstruert slik at likningsløseren konvergerer raskere for systemet med koeffisientmatrisen $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ enn for den opprinnelige matrisen $\mathbf{A}$. Dersom $\mathbf{M} = \mathbf{A}$ blir identitetsmatrisen koeffisientmatrise, og algoritmen konvergerer etter en iterasjon. Prekondisjoneringsmatrisen $\mathbf{M}$ må være en god approksimasjon til $\mathbf{A}$, slik at $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ blir en god approksimasjon til identitetsmatrisen. $\mathbf{M}$ bør i tillegg være «billig» å lagre, dvs. at den ikke bør kreve så veldig mye mer plass enn $\mathbf{A}$. Prekondisjonering øker regnearbeidet pr. iterasjon, men reduserer systemets spektrum av egenverdier, også kalt *spektralradien*, og man sier at $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ er bedre *kondisjonert* enn $\mathbf{A}$. Antallet iterasjoner for å finne en tilstrekkelig nøyaktig løsning reduseres som regel drastisk, slik at en meget god netto effektivisering oppnås.

5.2 Implementasjon i FRONTSIM

FRONTSIM er under kontinuerlig utvikling, både når det gjelder struktur og diskretiseringsmetode. Implementasjonene i denne oppgaven ble gjort i en versjon der kildekoden var *C/C++*-basert, med kall til en rekke ulike *FORTRAN*-rutiner. Trykkløser-biten vist i figur 5.1 er delt i en assembleringsdel og en likningsløserdel, og hoveddelen av programmeringen til denne oppgaven bestod i å skrive et sett med nye C-baserte assembleringsrutiner inne i trykkløseren.

For assembleringen antas et 27-punkts beregningsmolekyl, men ettersom likningssystemene i denne oppgaven blir symmetriske, er det nok å lagre 14 bånd (13 bi-diagonaler og en hoved-diagonal).

Selve assembleringsrutinen består av en ytre løkke over alle blokker, og en indre løkke over de seks tetraeder-elementene i hver blokk. Hvert tetraeder assembleres i henhold til likningene (4.23) og (4.24), og koeffisientene summeres inn i den globale venstresiden $\mathbf{A}$ og høyresiden $\mathbf{b}$. Etter assembleringen settes Dirichlet-betingelsene på en slik måte at symmetrien bevares. Til slutt gis det globale likningssystemet som parametre til en iterativ likningsløser, som løser for vektoren $\mathbf{U}$ slik at $\mathbf{AU} = \mathbf{b}$.

5.3 Pre- og Postprosessering

Til FRONTSIM hører det også med pre- og postprosesseringsverktøy. Ettersom filen som dataene leses inn fra er på ASCII-format og med en oversiktlig struktur, ble dataene til simuleringene i de fleste tilfeller skrevet eksplisitt inn i denne filen. Bare ved byggingen av komplekse beregningsgitter (se f.eks. seksjon 7.1) ble preprosessoren benyttet.

Postprosesseringen ble i all hovedsak utført i programpakken MATLAB, som hadde gode rutiner for visualisering av data. Rutiner for å skrive ut data på MATLAB-format, samt for prosessering og visualisering i MATLAB, ble skrevet i forbindelse med oppgaven. Enkeltbilder fra suksessive tidssteg kunne benyttes til å lage animasjoner av løsningene, som igjen ved hjelp av passende rutiner kunne lagres MPEG-komprimert.

Kapittel 6

Verifikasjon

Akustiske trykkfluktuasjoner i tredimensjonale volumer er generelt krevende å modellere matematisk, ikke bare fordi mediets og randens egenskaper varierer, men også fordi geometriene og kildenes drivende funksjoner kan være meget komplekse. Eksakte løsninger finnes i litteraturen[4][40][54], men stort sett bare for enkle geometrier med uniforme akustiske egenskaper.

Foregående kapitler la grunnlaget for utviklingen av et program basert på en full diskretisering av den akustiske bølgelikningen for tre romdimensjoner og tid. Programmet skal kunne modellere luftvolumer med komplisert geometri, avgrenset av fullstendig reflekterende randflater. Et vilkårlig antall kilder med komplisert geometri og aperiodiske, også diskontinuerlige, drivende funksjoner skal kunne anvendes.

Klassiske løsninger på problemstillinger knyttet til akustiske volumer eller kanaler utgjør et godt grunnlag for å fastslå den numeriske modellens nøyaktighet. Evnen til å forutsi reelle fysiske fenomener og egenskaper ved lyd og lydbølger er derimot ikke uten videre enkel å kvantifisere. Begrenset korrelasjon ved sammenlikning med målinger kan i mange tilfeller tenkes å uttrykke den analytiske modellens begrensninger, noe som er utenfor denne oppgavens definisjonsområde. Det er likevel hensiktsmessig å skille mellom begrensninger som har sitt utspring i den forholdsvis enkle analytiske modellen definert i seksjon 4.2, og numeriske begrensninger.

Programmet ble først anvendt til løsing av klassiske analytiske problemer, for å undersøke i hviken grad den numeriske modellen var konsistent relativt til den analytiske. Enkelte mer komplekse akustiske fenomener, som *diffraksjon* og *interferens*, ble også modellert numerisk, og sammenholdt med de tilsvarende klassiske kvalitative beskrivelsene i kapittel 2. Benyttet et ubetinget stabilt og numerisk *udempet* skjema, gitt ved parametrene $\gamma = 1/2$ og $\beta = 1/4$, i den første delen av dette kapittelet. Parameterparet refereres til som *h)* i tabell 4.25 i seksjon 4.7.2. Kapittelet avsluttes med en seksjon der ulike skjemaers numeriske egenskaper sammenliknes med hensyn på feil knyttet til diskretiseringen. Ulike Newmark-skjemaer gitt ved parameterkombinasjonene *a) - h)*, og enkelte varianter av disse, anvendes her på en tilnærmet én-dimensjonal bølgefront i en kanal.

Dersom ikke annet er nevnt, er problemene løst over et rektangulært domene («kanal») med lengde $1.0m$ i x-retning, delt i 128 identiske, likesidete blokker, som igjen består av 6 tetraedre. Domenet er to blokker bredt og to blokker høyt, tilsvarende $2 \cdot 1/128m$. Ni kildenoder danner hele den ene «kortveggen» i kanalen, ved $x = 0$, og utgjør derved en *plankilde* som genererer plane bølger langs x-aksen i kanalen. Tidsstegene er konsekvent valgt slik at den «numeriske hastigheten» $h/\Delta t = c$, tilsvarende CFL-betingelsen (4.35) –

igjen dersom ikke annet er oppgitt.

Samtlige figurer som fremstiller numeriske løsninger av bølgelikningen er MATLAB-visualiserte data fra det FRONTSIM-baserte programmet beskrevet i kapittel 5. *Totaltrykket* fremkommer som flatehøyde i de fleste figurer, og utgjør summen av det akustiske trykket og referansetrykket, som er satt til $1bar$.

6.1 Bølgelikningen — generell løsning

Velges koordinatsystemet slik at en plan trykkbølge (se seksjon 2.1 og over) propagerer langs x-aksen, f.eks. som her i en smal kanal eller et rør, reduseres bølgelikningen (4.1) til

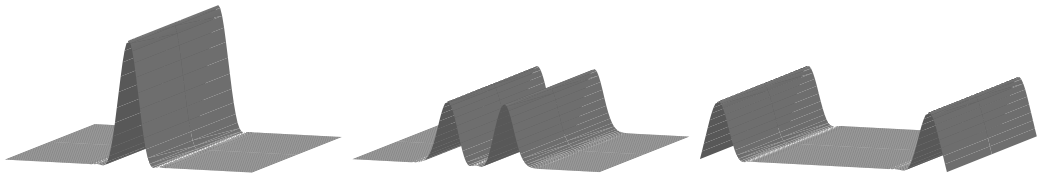
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,, \tag{6.1}$$

der $p = p(x,t)$.

Den generelle, én-dimensjonale løsningen til bølgelikningen med hensyn på trykket utgjør en sum av to termer[4][40]

$$p = p_1(ct - x) + p_2(ct + x), \tag{6.2}$$

der p_1 og p_2 er to vilkårlige, to ganger deriverbare funksjoner. Fra denne løsningen kan det observeres at lydtrykket i ethvert punkt x kan deles i to komponenter som i seg selv er løsninger — en bølge i x-retning, $p_1(ct - x)$, og en bølge i $-x$-retning, $p_2(ct + x)$. Videre skal begge bølgene propagere med uendret form, og bare adderes enkelt til andre bølger ved superposisjon (se også seksjon 2.2). Disse kvalitative egenskapene kan sammenholdes

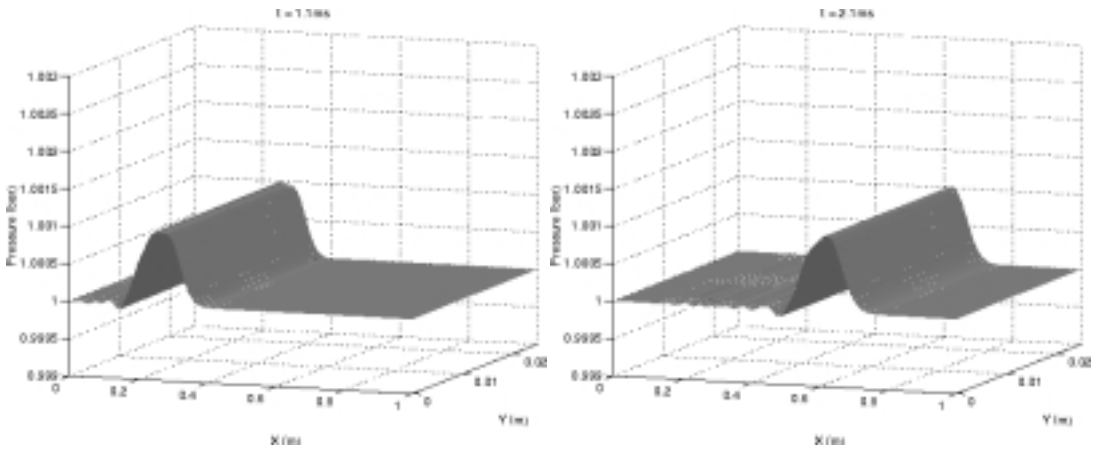


Figur 6.1: «Generell» løsning for trykkbølger i en smal kanal, løst numerisk ved suksessive tidspunkter fra venstre mot høyre.

med figur 6.1, som viser en numerisk løsning med utgangspunkt i en sentrert initiell perturbasjon som propagerer i både x- og $-x$-retning med tilnærmet uendret form. Kildens drivende funksjon er én positiv halvperiode av en sinus-funksjon. Initielt kan bølgene sees å være addert ved superposisjon, som resulterer i dobbel amplitude. Kvalitative betraktninger tyder med andre ord på at løsningen er rimelig. Mer presise feilanalyser vil bli gitt i senere eksempler.

6.1.1 Fasehastighet

Anta at det akustiske trykket i en lang kanal ved tidspunktet $t_1 > 0$ er gitt ved løsningen $p_1(ct_1 - x)$, som vist i figur 6.2. Ved et senere tidspunkt t_2 vil løsningen da være gitt ved $p_1(ct_2 - x)$, tilsvarende vist i figur 6.2. Lydtrykket $p_1(ct_1 - x_1)$ i punktet x_1 ved $t = t_1$ skal



Figur 6.2: Trykkbølge i x-retning ved tidspunkt $t_1 = 11ms$ (venstre) og $t_2 = 21ms$ (høyre).

da kunne gjenfinnes ved x_2 når $t = t_2$, slik at

$$ct_1 - x_1 = ct_2 - x_2,$$

og har da flyttet seg en avstand

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

i x-retning. Ettersom $p_1(ct_1 - x)$ kunne vært en hvilken som helst trykk-distribusjon i kanalen, betyr det at enhver annen distribusjon vil bevege seg i x-retning med samme hastighet. En funksjon $p_1(ct - x)$ kalles derfor en *bølge* som beveger seg i x-retning, og hastigheten c kalles *fasehastigheten*. Tilsvarende kan det vises at $p_2(ct + x)$ representerer en bølge som beveger seg i $-x$-retning med fasehastighet c. I den numeriske modellen er fasehastigheten satt til $c = 344m/s$, og figur 6.2 viser at bølgetoppen beveger seg omtrent $0.34m$ på $10ms$.

6.2 Initialverdier og randbetingelser

Funksjonene $p_1(ct - x)$ og $p_2(ct + x)$ er gitt ved *initialverdiene* og *randbetingelsene* i problemet, som i denne oppgaven ble spesifisert i seksjon 4.2. Der fastsettes initialverdiene i samtlige numeriske løsninger til å være lik en konstant, her kalt p_{REF}, over hele domenet. Funksjonenes form defineres deretter ved en gitt sekvens av *Dirichlet*-betingelser for trykket i en eller flere *kildenoder*, for hvert tidssteg gjennom hele simuleringen. I disse nodene vil trykket med andre ord til enhver tid være satt til en forhåndsbestemt verdi.

Trykkdistribusjonene p_1 og p_2 vil, dersom de genereres med en periodisk funksjon i kildenodene, propagere gjennom domenet som periodiske trykksvingninger med samme frekvens som den drivende funksjonen. Andre egenskaper, som for eksempel amplituden, vil være bestemt av randbetingelsene og av hvor kildenodene befinner seg i volumet.

6.2.1 Refleksjoner på randen

Benytter i denne oppgaven utelukkende fullstendig reflekterende rand, gitt i (4.2), som med hensyn på trykket kan uttrykkes ved

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0,$$

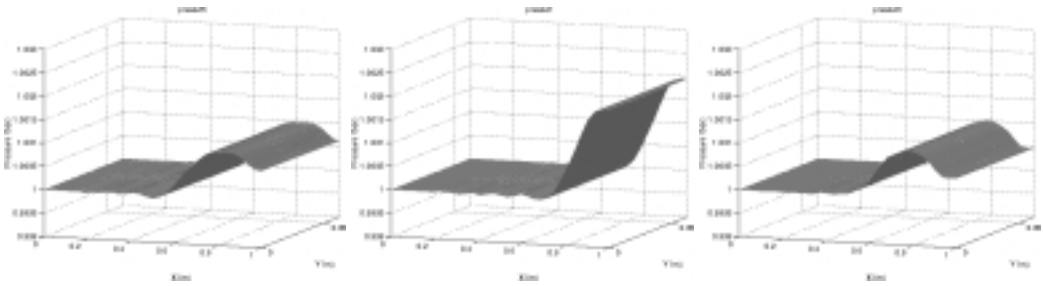
der $\vec{n}$ er den utadrettede normalvektoren på randen. I enden av en kanal med lengde L kan en slik *Neumann*-betingelse uttrykkes som

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)_{x=L} + \left(\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)_{x=L} = 0,$$

og det kan vises[40] at en slik betingelse innebærer at $p_1 = p_2$ i $x = L$. Ved innsetting i (6.2) fås

$$p(x,t) = p_1(ct - x) + p_1(ct + x), \tag{6.3}$$

som gjelder for ethvert punkt i kanalen. Det kan sees at en refleksjon fra en fullstendig reflekterende flate kan betraktes som en prosess der en bølge som beveger seg i x-retning ikke passerer randen, men i stedet reflekteres over i en bølge av samme form som beveger seg i $-x$-retning, som antydet i figur 6.3. Observerer dessuten en tilnærmet dobling av amplituden ved randflaten i refleksjonsøyeblikket, og ser at dette stemmer med (6.3) og prinsippet om summasjon ved superposisjon.

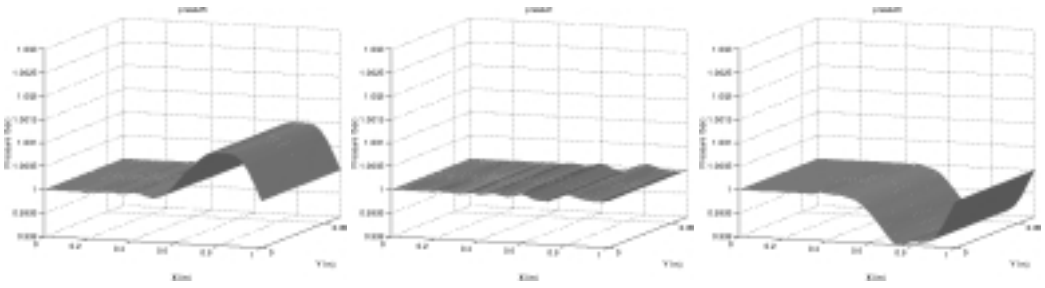


Figur 6.3: Refleksjonsprosessen ved en fullstendig reflekterende flate ved suksessive tidspunkter. Bølgen beveger seg først fra venstre mot høyre, reflekteres, og beveger seg så fra høyre mot venstre.

I kildenodene er betingelsene litt spesielle, ettersom summen av $p_1(ct - x)$ og $p_2(ct + x)$ i disse punktene til enhver tid vil være lik verdien gitt ved Dirichlet-betingelsene. De to funksjonene vil derfor stadig ha samme form, men må ha motsatt fortegn[40], og

$$p(x,t) = p_1(ct - x) - p_1(ct + x) \tag{6.4}$$

i ethvert punkt i kanalen. Prosessen kan i dette tilfellet betraktes som en der en bølge som beveger seg i x-retning ikke passerer randen, men i stedet reflekteres over i en bølge av samme, men inverterte, form som beveger seg i $-x$-retning, som antydet i figur 6.4. Observerer dessuten en tilnærmet kansellering ved randflaten i refleksjonsøyeblikket, og ser at dette også stemmer med (6.4) og prinsippet om summasjon ved superposisjon.



Figur 6.4: Refleksjonsprosessen ved en flate basert på kildenoder ved suksessive tidspunkter. Bølgen beveger seg først fra venstre mot høyre, reflekteres, og beveger seg så fra høyre mot venstre.

Kommentar

En løsning som beskrevet her er strengt tatt ikke helt reell dersom kilden er tenkt å skulle være et stempel eller en annen form for mekanisk *transduser*, og viser en begrensning ved den enkle analytiske kildenodemodellen slik den er realisert her. Modellproblemet, definert i seksjon 4.2 med utgangspunkt i den homogene bølgelikningen, kunne vært utvidet til et *inhomogent* problem ved å innføre et ledd $f(t)$ slik at $\partial U/\partial \vec{n} \neq 0$ på randen. Systemets totale energi ville da ikke lenger være bevart (se seksjon 4.4), men det ville åpne for mer avanserte randbetingelser som også kunne modellere energitransport (fluks).

Innenfor den *homogene* problemstillingen kunne begrensningene i en del tilfeller vært omgått dersom Dirichlet-betingelsen kunne «slås av» etter dannelsen av en tidsbegrenset bølge, men dette var ikke uten videre mulig i datafilformatet i den her anvendte versjonen av FRONTSIM. Et annet alternativ kunne vært å modellere partikkelhastighet fremfor trykk, ettersom partikkelhastigheten normalt på en fullstendig reflekterende flate er null[4][40]. Alle randflater og kilder kunne i et slikt tilfelle vært gitt Dirichlet-betingelser, med bare kildenodene ulik null. Endelig kan «kilden» også betraktes som en åpen ende (se seksjon 2.3.2 og figur 2.4) som munner ut i et stort volum der trykket endrer seg i tiden som gitt ved den drivende funksjonen.

6.3 Harmoniske plane bølger

Den analytisk sett enkleste formen for svingninger i en smal kanal er resultat av en såkalt *harmonisk* drivende funksjon i en plankilde i den ene enden av kanalen. Plane bølger gir, som beskrevet i seksjon 2.1, nyttige modellforenklinger ved analytiske studier av lyd og lydbølger. Videre kan en periodisk funksjon ifølge teorien om Fourier-rekker representeres som en lineær sum av komplekse eksponensialfunksjoner på formen

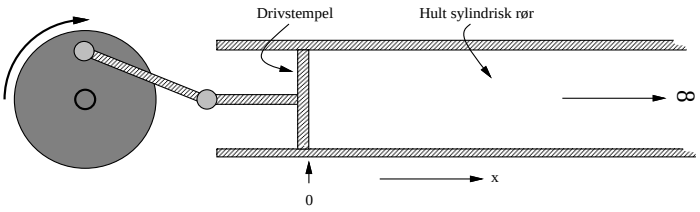
$$\xi_m(t) = \phi_m e^{j\omega_m t},$$

der $\omega_m = 2\pi f_m$, f_m er funksjonens m-te frekvenskomponent og ϕ_m er en tilhørende kompleks konstant. En enkelt komponent i en slik lineær sum kalles en *harmonisk* funksjon, og den m-te komponenten kalles også av og til for den m-te harmoniske. Ettersom bølger teoretisk sett propagerer uten endringer i formen, kan man i ved matematiske analyser ofte

nøye seg med å ta hensyn til harmoniske løsninger med sinusoidal tidsavhengighet i hvert punkt i rommet, og samme vinkelfrekvenser ω_m som kilden.

6.3.1 Uendelig kanal

Antar en kanal eller et rør med uendelig utstrekning i x-retning fra $x = 0$, der en plankilde, f.eks. et stempel (se figur 6.5), har en kompleks, harmonisk drivende funksjon som



Figur 6.5: Rør eller kanal med rigide sidevegger og uendelig utstrekning i x-retning, drevet av stempel med vinkelfrekvens ω i $x = 0$.

definerer randbetingelsen

$$p(0,t) = Ae^{j\omega t}$$

der A er en kompleks konstant. Antakelsene tilsier at løsningen utelukkende vil bestå av bølger som beveger seg i x-retning,

$$p(x,t) = p_1(ct - x), \tag{6.5}$$

og disse to uttrykkene gir tilsammen

$$p_1(ct) = A\, e^{j\,k(ct)},$$

der *bølgetallet* k er definert ved

$$k = \frac{\omega}{c}. \tag{6.6}$$

Løsningen for alle x må da være gitt ved

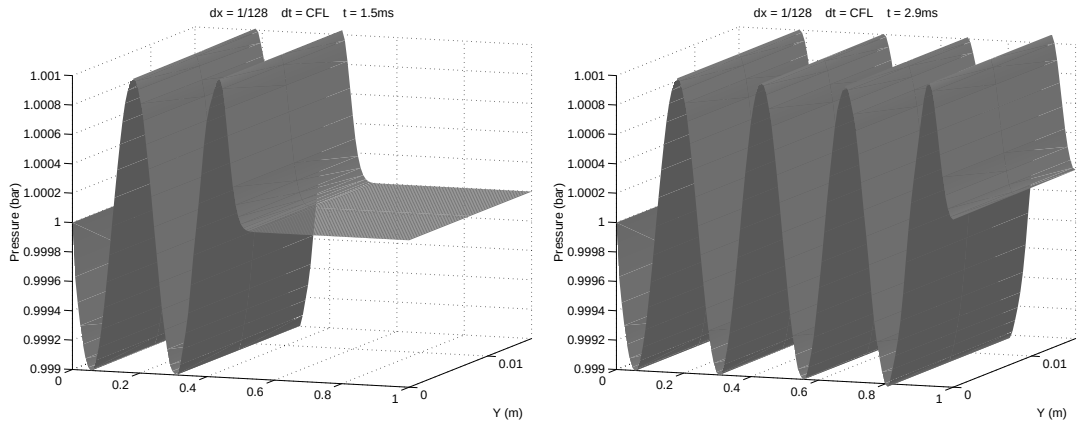
$$p(x,t) = A\, e^{j\,(\omega t - kx)}, \tag{6.7}$$

og den faktiske trykkamplituden er gitt ved den *reelle* delen av (6.7),

$$p(x,t) = A\cos(\omega t - kx). \tag{6.8}$$

Figur 6.6 viser en numerisk approksimasjon til den resulterende harmoniske bølgen, løst ved to ulike tidspunkter. Den numeriske løsningen er generert over et *endelig* domene og over et tilsvarende *endelig* tidsintervall, men bør innenfor dette uansett tilnærme den analytiske løsningen (6.8).

Partiklene i kanalen utfører enkle, harmoniske longtudinale svingninger rundt likevektspunktet med frekvens $f = \omega/2\pi$ og periode $1/f$, og trykkfordelingen i kanalen beskriver



Figur 6.6: Harmonisk trykkbølge i x-retning ved tidspunkt $t_1 = 1.5ms$ (venstre) og $t_2 = 2.9ms$ (høyre).

en sinusoidal funksjon med amplitude $|A|$. Ved et gitt tidspunkt er bølgens form en funksjon med hensyn på x, og når x øker eller minker med et intervall λ slik at $k\lambda = 2\pi$, endres verken trykket eller den deriverte av trykket. Intervallet λ kalles *bølgelengden*, og

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Bølgeformen beveger seg en bølgelengde i x-retning i et tidsintervall lik én periode. Frekvens og bølgelengde er derfor relatert til fasehastigheten ved

$$c = f\lambda,$$

som er en grunnleggende likning ved all bølgebevegelse.

Numerisk løsning og noen mål for diskretiseringsfeilen

Skrev i seksjon 4.7.4 om diskrete *funksjonsnormer*, og om hvordan de kan være nyttige som mål for hvor godt en numerisk løsning approksimerer den tilsvarende analytiske løsningen. Mer detaljerte undersøkelser av årsaker og virkninger relatert til ulike typer diskretiseringsfeil finnes i seksjon 6.5. Skal her først og fremst gi et eksempel på måling av «avstanden» mellom den numeriske løsningen $U_h(x,t)$ og den tilsvarende analytiske løsningen $U(x,t)$ av et problem, uttrykt i en diskret $\mathcal{L}^p$-norm ved

$$|| \, U(\,\cdot\,,t) - U_h(\,\cdot\,,t) \, ||_p, \tag{6.9}$$

for en eller flere gitte $t \geq 0$, og $p \geq 1$. Mest brukt er 1-, 2- og ∞-normene, som beskrives i seksjon 4.7.4.

Modellering av uendelige domener er ikke trivielt. Har istedet benyttet et domene som var tilstrekkelig langt til at bølgene fikk propagere uten å reflekteres i tidsintervallet $[0, T]$, der $T > 0$ er svingningenes periode. Løste bølgelikningen over en $L_x = 1m$ lang, smal kanal delt i henholdsvis $N = 8, 32$ og 128 blokker av elementer med karakteristisk størrelse h. Kanalens høyde og bredde tilsvarte én blokk. Valgte tidssteg Δt som tilfredsstilte

CFL-betingelsen (4.34), og satte det totale antallet tidssteg T lik N, slik at bølgen i alle tre tilfeller propagerte frem til $x = L$. Kildenodene, gitt ved Dirichlet-betingelser som ble variert sinusoidalt med periode T, dannet randflaten ved $x = 0$.

Den eksakte amplituden til bølgekomponenten (6.7) skal i nodepunktet $\alpha h, \alpha = 0, 1, \ldots, N$, og tidspunktet $n\Delta t, n = 0, 1, \ldots, n_T$, være gitt ved

$$p(\alpha h, n\Delta t) = A\cos(\omega n\Delta t - k\alpha h), \tag{6.10}$$

tilsvarende (6.8). Vet at den eksakte løsningen ikke har dispersjon, slik at $k = \omega/c$ (se seksjon 6.5.2), og har at $\omega = 2\pi/T$ der T er én periode. Ettersom én periode i dette eksempelet er gitt ved $T = n_T\Delta t$, og tidsstegene er valgt slik at $\Delta t = h/c$, kan (6.10) etter innsetting omformes til

$$p(\alpha, n) = A\cos\left(\frac{2\pi}{n_T}(n - \alpha)\right), \tag{6.11}$$

med $n_T = 8, 32$ eller 128. Beregnet den numeriske feilen $p - p_\Delta$ i matematikkpakken MATLAB, og de resulterende feilflatene er vist til venstre i figur 6.7, med samme skalering som i figur 6.6. Høyre side av figur 6.7 viser trykkprofilen langs x-aksen av henholdsvis p, p_Δ og $p - p_\Delta$, der p er beregnet fra (6.11) og p_Δ er den numeriske løsningen som beskrevet over.

Ettersom trykket i de numeriske beregningene initielt er lik referansetrykket p_{REF} overalt, og så settes i svingninger, vil den første aperiodiske bølgefronten inneholde høyfrekvente komponenter. Disse sees som små oscillasjoner i feilen $p - p_\Delta$, og avtar etterhvert.

Bemerker spesielt at den numeriske løsningen er faseforskjøvet relativt til den eksakte, og at forskyvningen minker med økende diskretiserings-tetthet. Fenomenet analyseres nærmere i seksjon 6.5.2.

Beregnet til slutt «avstanden» mellom p og p_Δ i 1-, 2- og ∞-normen ved hjelp av MATLAB, og fikk

n_T	$\|\| p - p_\Delta \|\|_1$	$\|\| p - p_\Delta \|\|_2$	$\|\| p - p_\Delta \|\|_\infty$
8	44.25	52.92	89.28
32	11.33	13.13	24.34
128	2.87	3.26	7.18

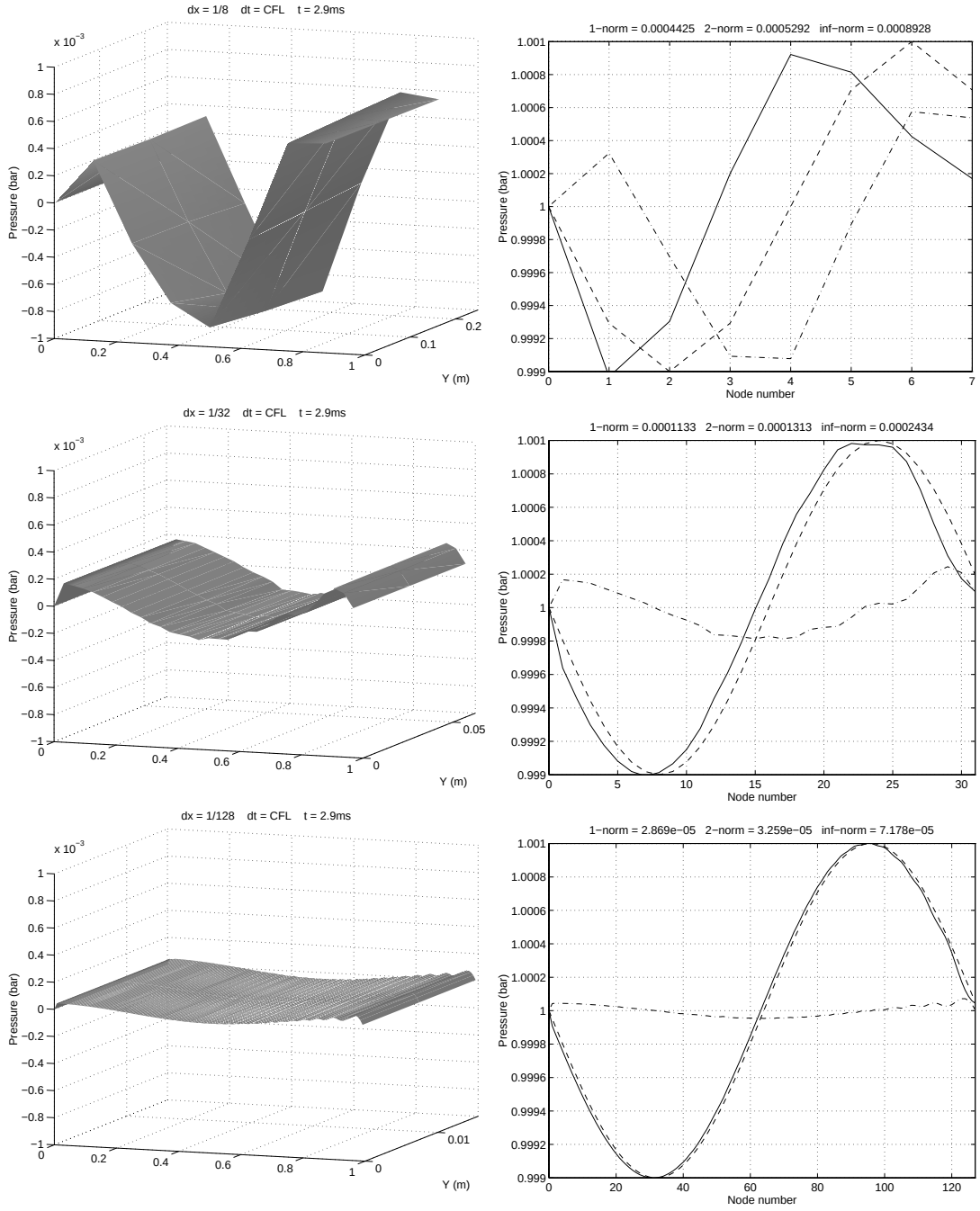
$\times 10^{-5}$.

Den numeriske feilen kan av dette sees å være av $\mathcal{O}(h, \Delta t)$, og dette er en orden mindre enn forventet fra antakelsene i seksjon 4.7.4. Det er grunn til å tro at dette kan ha sammenheng med initialbetingelsene, som starter med en konstant verdi over hele domenet, samt nøyaktigheten i genereringen av startvektorene, som beskrevet i kommentaren i slutten av seksjon 4.7.1.

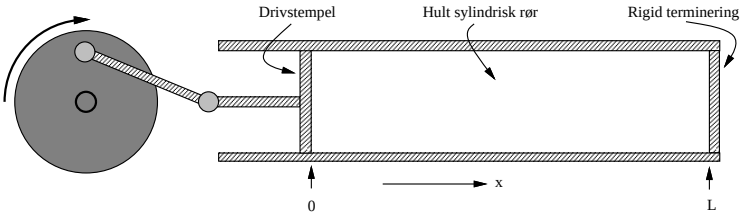
6.3.2 Endelig kanal

Forløpet i en kanal av *endelig* lengde er betraktelig mer komplisert enn i den tilsvarende uendelige kanalen i forrige avsnitt. Bølgen som reflekteres fra den blokkerte, fullstendig reflekterende enden av kanalen (se figur 6.8) vil interferere med bølgen som beveger seg mot den blokkerte enden, og reflekteres deretter igjen fra kilde-enden. Dette initielle forløpet følges av en tilstand kalt *steady state*-tilstanden, der løsningene kan uttrykkes i form av to harmoniske bølger som beveger seg i motsatt retning,

$$y(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}, \tag{6.12}$$



Figur 6.7: Øverste rad viser diskretiseringsfeilen ved 8 noder/bølgelengde, og midterste og nederste rad tilsvarende for henholdsvis 32 og 128 noder/bølgelengde. Venstre kolonne er feilflatene over hele domenet, mens høyre kolonne angir trykkprofiler langs x-aksen av det eksakte trykket p (stiplet), det numerisk beregnede trykket p_Δ (heltrukken), og feilen $p - p_\Delta$ (strek-prikk). For sammenlikningens skyld er referansenivået for feilen i høyre hevet til referansetrykket $p_{REF} = 1bar$.



Figur 6.8: Rør eller kanal med rigide sidevegger og rigid, fullstendig reflekterende terminering, drevet av stempel med vinkelfrekvens ω.

der y kan være trykk eller partikkelhastighet, og de komplekse konstantene A og B defineres ved randbetingelsene.

Partikkelhastighet

Ettersom randbetingelsene i kildenodene i denne oppgaven ikke kan regnes som fysisk reelle ved *steady state* modellering av en transduser (stempel) med hensyn på trykk (se seksjon 6.2.1), er det i modellen fra figur 6.8 mest naturlig å modellere med hensyn på *partikkelhastighet*. Det kan vises (se seksjon 3.4 og Beranek[4]) at partikkelhastigheten også tilfredsstiller bølgelikningen (4.1). Lydfeltet i en kanal eller et rør er rent reaktivt (se seksjon 2.1.3), slik at partikkelhastigheten er 90° faseforskjøvet i forhold til trykket, som vist i figur 2.2. Løsningen vil derfor være identisk med løsningen for en kanal som er *åpen* i begge ender og drives av en sinusoidal *trykk*endring i den ene enden fra volumet utenfor. Søker løsninger på formen (6.12) med $y = u$, definerer en u_0 lik det vibrerende stempelets RMS[1] hastighet ved $x = 0$, og definerer L lik røret eller kanalens lengde. Randbetingelsene er da gitt ved $u(0,t) = \sqrt{2}u_0 e^{j\omega t}$ ved $x = 0$, slik at

$$A + B = u_0$$

i (6.12), og gitt ved

$$Ae^{-jkL} + Be^{jkL} = 0$$

ved $x = L$, ettersom partikkelhastigheten der er null. Konstantene i uttrykket tilsvarende (6.12) med hensyn på hastighet er da gitt ved[4]

$$A = \frac{u_0 e^{jkL}}{2j\sin(kL)}$$

og

$$B = \frac{u_0 e^{-jkL}}{-2j\sin(kL)},$$

slik at

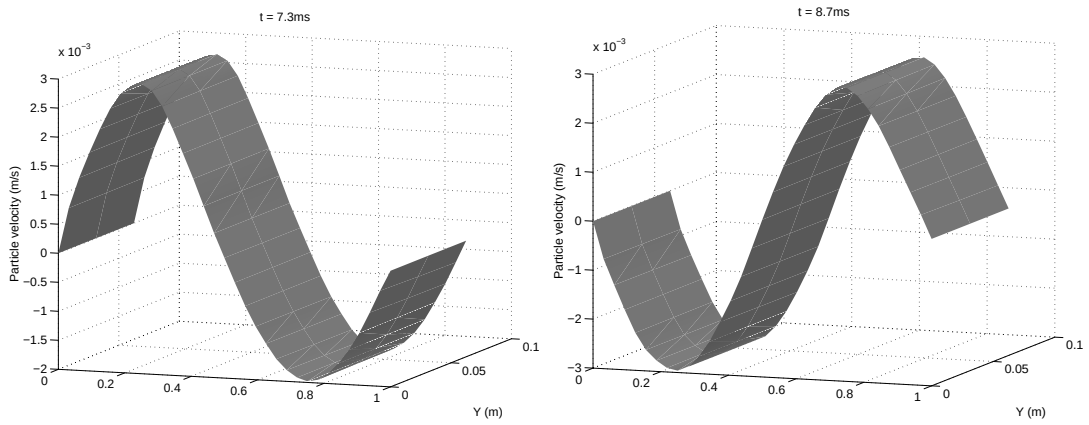
$$u(x,t) = \sqrt{2}u_0 e^{j\omega t}\frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \tag{6.13}$$

[1] *RMS* = *R*oot *M*ean *S*quare, som definert i 2.1.3.

eller

$$u^{RMS} = u_0^{RMS} \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}, \tag{6.14}$$

der både u_0^{RMS} og u^{RMS} er komplekse RMS tidsmidlede verdier. Bemerker at x og ct ikke opptrer som sum eller differanse i argumentet til eksponensialfunksjonen i (6.13). Bølgen beveger seg altså ikke i noen retning, og kalles derfor en *stående* bølge (se seksjon 2.3). Ettersom partikkelhastigheten her er 90° faseforskjøvet i forhold til trykket, som beskrevet over, vil likning (6.13) gi bølgeformer som vist i figur 2.4, forutsatt at betegnelsen «lukket» i figuren byttes ut med «åpent», og omvendt. Den midterste figuren ($n = 2$) på nedre rad («Åpent – Åpent») kan da sammenholdes med figur 6.9, som viser en elementmetodeløsning med hensyn på partikkelhastighet ved to forskjellige tidspunkter. Partikkelhastigheten i figuren er ikke amplitudemessig korrekt skalert relativt til løsningen for trykk i neste avsnitt.



Figur 6.9: Stående partikkelhastighetsbølge løst numerisk ved tidspunkt $t_1 = 7.3ms$ (venstre) og $t_2 = 8.7ms$ (høyre). Bølgen vipper frem og tilbake mellom de to tilstandene. Assymmetrien i venstre bølge skyldes at den stående bølgen ennå ikke var fullt «etablert» ved det valgte tidspunktet.

Modellering av stående bølger viste seg generelt å kreve lange kjøringer for å gi rimelig stabile resultater. Figuren for $t = 7.3ms$ har således ikke helt symmetrisk $\pm$amplitude, ettersom den er hentet fra et tidlig tidspunkt. Bølgeformen sees sees ellers å være rimelig sinusoidal, tilsvarende uttrykkene (6.13) og (6.14).

Trykk

Lydtrykket i kanalen kan finnes fra hastigheten ved hjelp av bevegelseslikningen (3.6), som i *steady state* og én dimensjon kan uttrykkes

$$p = -j\omega\rho_0 \int u \, dx. \tag{6.15}$$

Integrerte (3.6) med hensyn på x, slik at integrasjonskonstanten i (6.15) må være uavhengig av x. Konstanten representerer i praksis likevektstrykket i hele kanalen[4], og kan av hen-

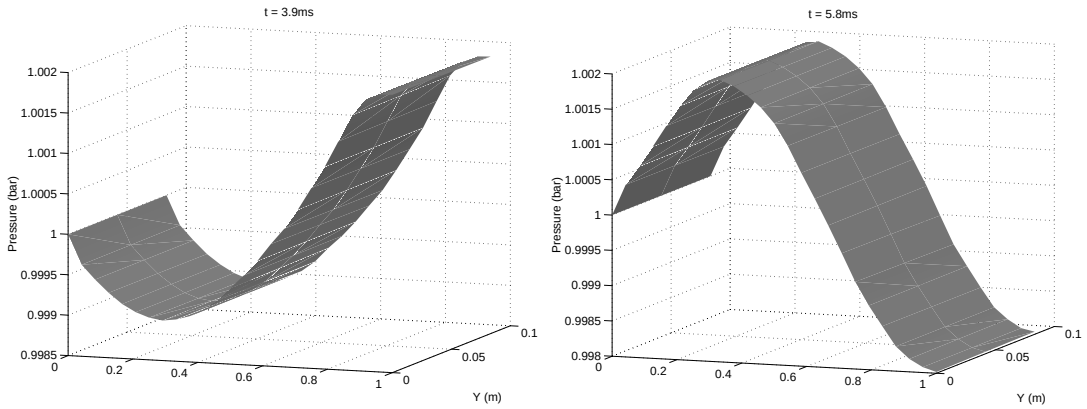
syn til tidligere trykkløsninger i denne oppgaven settes lik 1.0. Ser likevel bort fra konstanten i alle beregninger, ettersom det er netto trykkendringer rundt likevekt som er definert som *akustisk* trykk (se kapittel 3). Integrasjon av (6.15), etter å ha satt inn for u fra (6.13), gir[4]

$$p(x,t) = -j\rho_0 c\sqrt{2}u_0 e^{j\omega t}\frac{\cos(k(L-x))}{\sin(kL)} \tag{6.16}$$

eller tilsvarende

$$p^{RMS} = -j\rho_0 c u_0^{RMS}\frac{\cos(k(L-x))}{\sin(kL)}, \tag{6.17}$$

der både u_0^{RMS} og p^{RMS} er komplekse RMS tidsmidlede verdier. Likning (6.16) gir løsninger som kan gjenfinnes i figur 2.4, og den numeriske løsningen i figur 6.10, som viser en elementmetodeløsning med hensyn på trykk ved to forskjellige tidspunkter, kan sammenholdes med midterste figur («Åpent – Lukket») i høyre kolonne ($n = 3$). Det kan



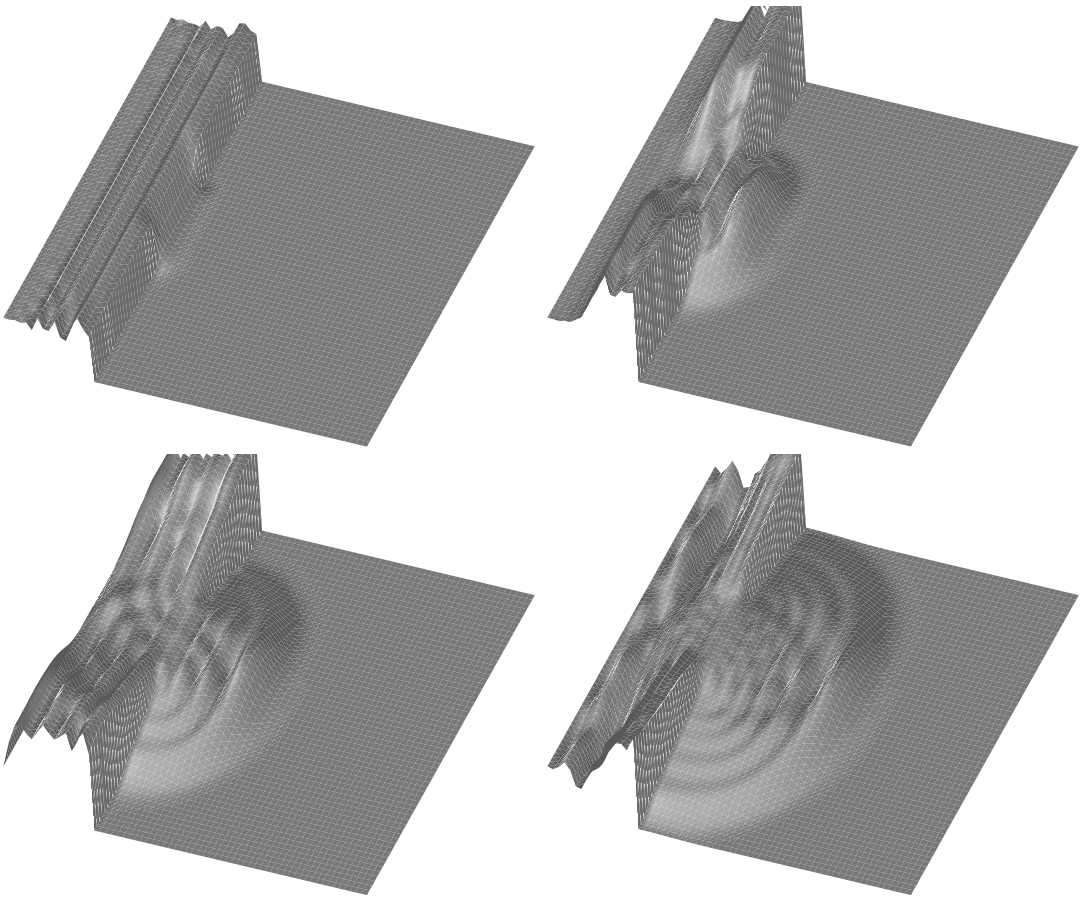
Figur 6.10: Stående trykkbølge i rør som er åpent i én ende løst numerisk ved tidspunkt $t_1 = 7.3ms$ (venstre) og $t_2 = 8.7ms$ (høyre). Bølgen vipper frem og tilbake mellom de to tilstandene.

observeres at det akustiske trykket ved $x = L = 1m$ har eksakt dobbel amplitude relativt til den drivende funksjonens «peak»-amplitude på $1mbar$. Dette stemmer igjen med superposisjonsprinsippet, og kan sammenholdes med resultatet i figur 6.3.

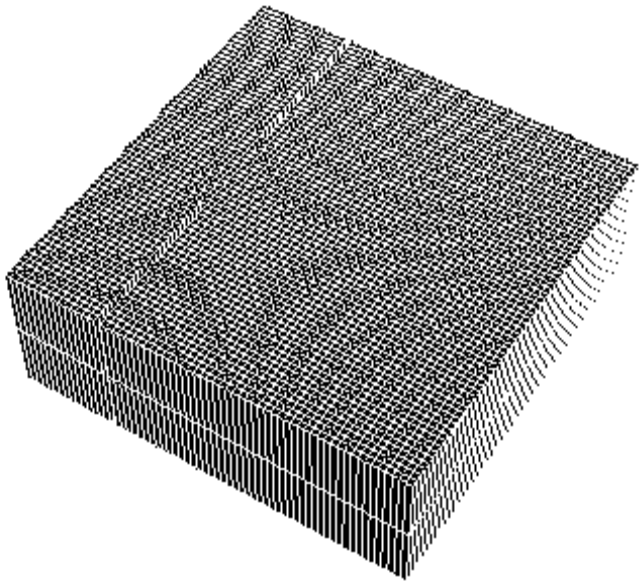
6.3.3 Delvis blokkert kanal

Diffraksjon er et fenomen som enklest beskrives kvalitativt ved det såkalte *Huygens' prinsipp* (se seksjon 2.2.3). Prinsippet gir en viss forståelse av hvordan lydbølger avbøyes og spres ved passering av en delbarriere som vist i figur 2.3C. En todimensjonal elementmetodemodellering av fenomenet er vist i figur 6.11.

Drivende funksjon ved denne simuleringen var en såkalt «step»-funksjon, definert ved (6.24). Domenet var $1 \times 1m$, delt i 64×64 likesidete blokker á 6 tetraedre. Kilden var også her en såkalt *plankilde*, definert ved Dirichlet-betingelser i alle noder som utgjør randflaten ved $x = 0$. Beregningsgitteret er vist i figur 6.12. Barrieren ble modellert ved at alle lokalnoder tilhørende to smale, vertikale seksjoner ble dekoplet fra beregningsgitteret. Randen ble deretter justert slik at barrierene ble en del av den.



Figur 6.11: Diffraksjon rundt en spalte i en blokkerende, tynn baffel (ikke synlig), ved tidspunkter $t = 0.73ms,\ 1.09ms,\ 1.45ms$ og $1.82ms$ (fra venstre, øverst).



Figur 6.12: Beregningsgitteret for modellering av diffraksjon. Barrieren kan såvist sees i venstre del av gitteret, i form av to meget smale vertikale seksjoner av blokker som er fjernet.

Observerer oscillasjoner som resultat av refleksjoner mellom barrieren og kilden. Sfæriske bølger kan sees å diffraktere (se seksjon 2.2.3) utover fra spaltens kanter og inn i barrierenes akustiske «skygger», og dette stemmer med Huygens' prinsipp, beskrevet i seksjon 2.2.

6.3.4 Rektangulært volum

Anta et rektangulært volum med dimensjoner L_x, L_y og L_z, som vist i figur 6.13 og beskrevet i seksjon 2.3.3. Volumet kan representere en enkel modell av et rom, en sal eller et hvilket som helst annet rektangulært volum med få eller ingen åpninger og rigide vegger, slik at $\partial U/\partial \vec{n} = 0$ ved alle randflater. Viste i seksjon 4.4 at da er energien bevart i volumet, slik at de tilhørende løsningene av bølgelikningen er stående bølger, gitt ved[40]

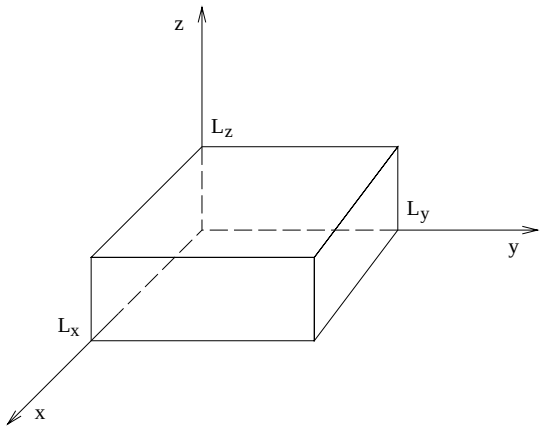
$$\mathbf{p}_{lmn} = \mathbf{A}_{lmn} \cos k_{xl} x \cos k_{ym} y \cos k_{zn} z \; e^{j\omega t}, \tag{6.18}$$

der komponentene til $\vec{k}$ er

$$\begin{aligned} k_{xl} &= l\pi L_x\,, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \\ k_{ym} &= m\pi L_y\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \\ k_{zn} &= n\pi L_z\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

De tillatte resonansfrekvensene er derfor *kvantisert* til

$$\omega_{lmn} = c\sqrt{\left(\frac{l\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2}, \tag{6.19}$$



Figur 6.13: Rektangulært volum av dimensjon L_x, L_y og L_z.

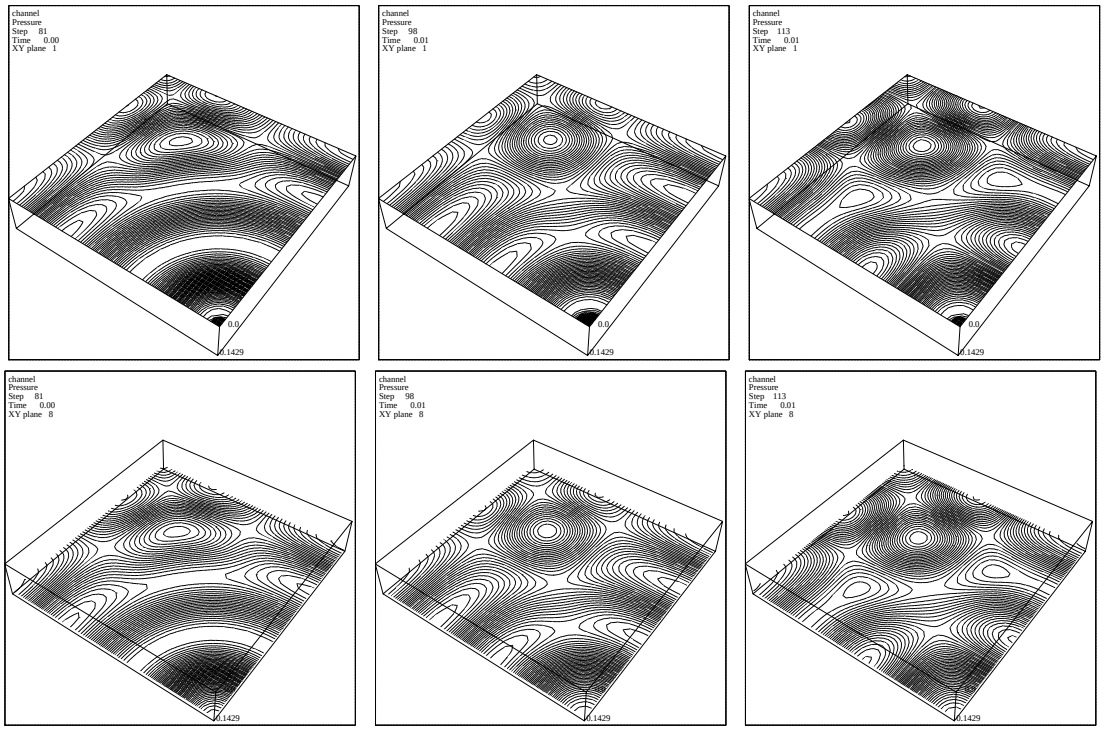
som er tilsvarende gitt for $f = \omega/2\pi$ i seksjon 2.3.3. Hver *egenfunksjon* (6.18) har sin egen karakteristiske *egenfrekvens* (6.19), spesifisert ved de ordnede heltallene l, m og n. Egenfunksjonene kan dekomponeres til propagerende plane harmoniske bølger. Dersom løsningene (6.18) representeres på kompleks eksponensialform og ekspanderes til en sum av produkter, kan det vises[40] at

$$\mathbf{p}_{lmn} = \frac{1}{8}\mathbf{A}_{lmn} \sum_{\pm} e^{j(\omega t \pm k_{xl} x \pm k_{ym} y \pm k_{zn} z)}, \tag{6.20}$$

der summasjonen er over alle permutasjoner av pluss- og minus-tegn, som skissert i seksjon 2.3.3. Hver av disse åtte termene representerer en plan bølge som forplanter seg i en retning gitt ved dens propagasjonsvektor $\vec{k}_{lmn}$, som projisert på koordinataksene er $\pm k_{xl}$, $\pm k_{ym}$ og $\pm k_{zn}$. Løsningen kan med andre ord sees som en superposisjon av åtte propagerende bølger, en inn i hver kvadrant, med forplantningsretning låst ved randbetingelsene. Den koherente kombinasjonen av disse bølgene, som hver forplanter seg vinkelrett på koordinataksene, danner den tre-dimensjonale stående bølgen gitt ved uttrykket (6.18).

I akseretningene vil mønstrene av stående bølger som beskrevet i (6.18) i noen grad kunne sammenholdes med løsningene for rør eller kanaler som er lukket i begge ender, vist i figur 2.4. Volumer som er åpne eller delvis åpne vil gi løsninger som på tilsvarende vis kan sammenholdes med de respektive én-dimensjonale mønstrene. Begrensningene i den analytiske kildenodemodellen, omtalt i seksjon 6.2.1, medførte at løsningen (6.18) ikke kunne approksimeres direkte. Valgte istedet en tilnærming der kildenoden i fysisk forstand kan betraktes som en tenkt åpning mot et langt større volum der trykket varierer med tiden. Langs akseretningene vil derfor de resulterende løsningene istedet være sammenliknbare med midterste rad («Åpent – Lukket») i figur 2.4.

Antydet i et foregående avsnitt at stående bølger krever forholdsvis lange simuleringer. Dette har sammenheng med at bølgene må forplantes en rekke ganger frem og tilbake gjennom hele domenet for å danne stabile mønstre som beskrevet ovenfor. For å begrense prosesseringstiden har volumet i figur 6.14 derfor bare 8 blokker i z-retning, samt at figuren først og fremst viser *dannelsen* av et mønster av stående bølger. Denne dannelsen sees i det kvadratiske xy-planet ved at de sfæriske harmoniske bølgene fra kilden etterhvert bidrar



Figur 6.14: Kotekurver med hensyn på trykk viser dannelsen av stående bølger i et volum, for tre ulike tidspunkter $t = 4.2ms$ (første kolonne i figuren), $t = 5.1ms$ (andre kolonne) og $t = 5.9ms$ (tredje kolonne), og øvre og nedre lag (hhv. øvre og nedre rad i figuren) av noder i det tre-dimensjonale beregningsgitteret. Volumet var delt i $56 \times 56 \times 8$ likesidete blokker. Kildenoden var i $(0, 0, L_z)$ (nærmeste, øvre hjørne i figurene). Figurene er hentet fra FRONTSIMs post-prosessor.

til å vedlikeholde et stabilt mønster med komponenter vinkelrett på koordinataksene, som beskrevet over. Figuren viser kotekurver i to ulike xy-snitt, henholdsvis øvre og nedre lag av noder i beregningsgitteret. Snitt parallelt med z-aksen er ikke vist, ettersom den stående bølgen i z-retning var svært enkel, og gav lite interessante mønstre. Komponenten svarte til den grunnharmoniske ($n = 1$), midt i venstre kolonne i figur 2.4, som kan sees å være en kvart bølgelengde. Trykket i øvre nodelag vil derfor være 90° faseforskjøvet i forhold til nedre lag ved en fullt utviklet stående bølge.

6.4 Harmoniske sfæriske og sylindriske bølger

Den generelle kulesymmetriske løsningen om origo for bølgelikningen med hensyn på trykk er i *sfæriske* koordinater gitt ved[40]

$$p(r,t) = \frac{1}{r} f_1(ct - r) + \frac{1}{r} f_2(ct + r), \tag{6.21}$$

der r er radien, og den første termen representerer en sfærisk bølge som divergerer fra en punktkilde i origo med hastighet c, mens den andre representerer en bølge som konvergerer mot origo. Divergerende sfæriske bølger kan, som plane bølger, skrives som en sum av harmoniske bølgekomponenter. En slik komponent kan på kompleks form representeres ved

$$p(r,t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}, \tag{6.22}$$

der A igjen er en kompleks konstant. Ved passende valg av starttidspunkt kan A også være en rent reell konstant uten tap av generalitet, og da vil A/r være bølgens trykkamplitude. Trykkamplituden i en udempet sfærisk bølge er altså ikke en konstant, som i en udempet plan bølge, men avtar inverst med avstanden fra kilden. Den faktiske trykkamplituden er den *reelle* delen av (6.22), gitt ved

$$p(r,t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr). \tag{6.23}$$

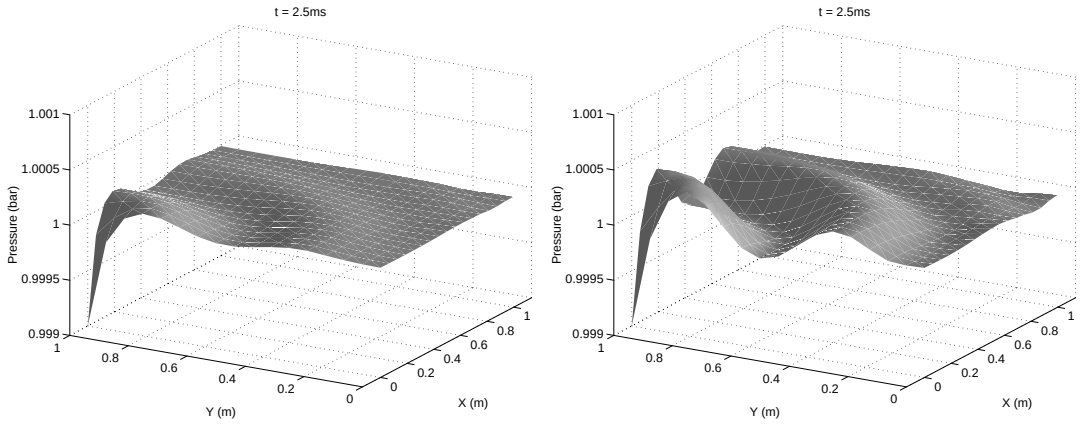
En god numerisk approksimasjon til en løsning på denne formen forutsetter kildenoder fordelt over et kuleskall med radius $r = 1$, og et slikt beregningsgitter lot seg ikke definere med tilstrekkelig nøyaktighet i FRONTSIMs pre-prosessor. Valgte i stedet å gjøre forsøk med én enkelt node som punktkilde, styrt ved en Dirichletbetingelse som i foregående seksjoner. Den resulterende løsningen ville da ikke ha noen direkte fysisk analog, men kunne eventuelt betraktes som en form for matematisk-numerisk abstraksjon. Feltet rundt kilden, heretter referert til som en *numerisk* punktkilde, kan likevel vises å ha egenskaper som korresponderer med de analytiske løsningene beskrevet over.

Til venstre i figur 6.15 vises trykket som flatehøyde over et xy-snitt gjennom kildenoden, fra en numerisk løsning over én kvadrant av den komplette sfæren. Domenet var i dette tilfellet en $1 \times 1 \times 1m$ kube, delt i 16 likesidete blokker i hver akseretning, med kilden i hjørnet $(0, 1, 0)$. Valgte et tidspunkt ($T = 2.5ms$) slik at bølgen propagerte frem til randen uten å reflekteres. Svingningenes amplitude ser ut til å falle inverst med økende radius fra den numeriske kilden.

I sylindriske koordinater, som ofte benyttes ved beskrivelsen av et felt rundt en såkalt *linjekilde* skal trykket avta inverst med *kvadratroten* av radien[54]. En linjekilde er en kilde med uendelig utstrekning i én romdimensjon. Tilsvarende begrensninger gjorde seg gjeldende ved definering av beregningsgitteret rundt linjekilden som rundt punktkilden. Valgte

av samme årsak å gjøre forsøk med en vertikal rad med noder som en form for *numerisk* linjekilde, styrt ved en Dirichletbetingelse.

En elementmetodeløsning er vist til høyre i figur 6.15. Den valgte linjekilde-modellen skal ha uendelig utstrekning i z-retning, og ettersom løsningen utviser radiell symmetri om denne aksen, viser figuren én kvadrant av et plan slik at $z =$ konstant, som over. Domenet var som for sfæriske koordinater (over), men med kilden i $(0, 1, z_i),\ i = 1, \ldots, 17$, dvs. alle noder i z-retning over $(0, 1)$ i xy-planet.



Figur 6.15: En kvadrant fra et xy-snitt gjennom numeriske approksimasjoner til de harmoniske trykksvingningene omkring henholdsvis en punktkilde (venstre) og en linjekilde (høyre). Flatehøyde angir trykk.

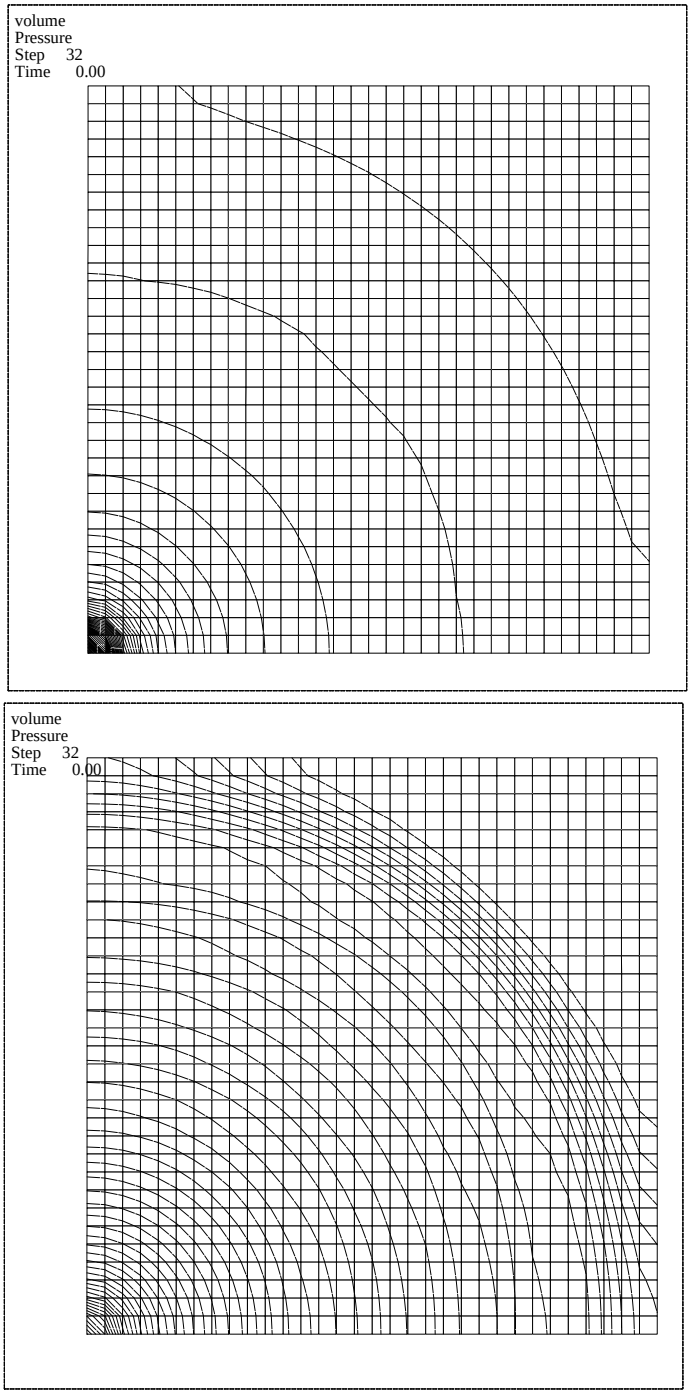
Svingningenes amplitude sees av begge figurene å avta inverst med økende radius, men med høyere rate rundt punktkilden enn rundt linjekilden, og dette tyder på en viss grad av konsistens med den analytiske modellen, som beskrevet over.

En vurdering av modellenes eventuelle relevans bør også inneholde en undersøkelse av den radielle symmetrien i de numeriske løsningene. Post-prosessoren til FRONTSIM kan, som beskrevet over, vise kotekurver for løsningene. Ved å la en såkalt *step*-funksjon (se seksjon 6.5) bestemme verdiene for et akustiske trykket i kildenodene og la bølgen propagere frem til motstående rand, vil tettheten av kotene samtidig gi et inntrykk av det karakteristiske trykkfallet omkring kilden.

Fremgangsmåten ved genereringen av de resulterende løsningene vist i figur 6.16 var forøvrig som i de to eksemplene over, men med høyere tetthet i beregningsgitteret (økt til 32 blokker/meter i alle relevante akseretninger). Ser av figuren at det radielle trykkfallet rundt den numeriske punktkilden initielt er betraktelig brattere enn rundt den numeriske linjekilden, for så å avta. Dette er igjen rimelig ut fra de tilsvarende analytiske modellene. Linjekilde-løsningen utviser tiltakende bratthet i et lite intervall omkring radien svarende til sidekantenes lengde i beregningsgitteret, men dette er resultat av step-funksjonens initielle bratte bølgefront.

Punktkildens tilstøtende sideflater på det kubiske løsningsdomenet har kotedistribusjon som vist øverst i figur 6.16. Begge figurene tyder på radiell symmetri som forventet ut fra de analytiske løsningene.

Foregående løsninger ble bare beregnet over en kvadrant av det fullstendige, aksesymmetriske domenet omkring kilden, av hensyn til prosesseringstiden og lagringsbehov.



Figur 6.16: Det radielle trykkfallet rundt henholdsvis en numerisk punktkilde (øverst) og en numerisk linjekilde (nederst). Kilden ble styrt ved en *step*-funksjon med amplitude $A = 1mbar$. Figuren viser trykket rundt kilden etter at bølgefronten har propagert frem til randen (32 tidssteg).

Linjekilder gir bølgefronter med sylindersymmetri, og krever således ikke fullstendige tredimensjonale domener. Kunne derfor bygge et tilnærmet to-dimensjonalt beregningsgitter med *sentrert* numerisk linjekilde som en endelig kontroll på symmetrien i løsningene. Tilsvarende radiell nøyaktighet som i foregående løsninger forutsatte et gitter med 64×64 blokker i xy-planet. Gitteret hadde bare to blokker i z-retning, som er minimum for den tre-dimensjonale likningsløseren i FRONTSIM. Øvrige betingelser var som for løsningen i figur 6.16. Figur 6.17 og 6.18 viser den resulterende løsningen, henholdsvis med og uten beregningsgitteret.

Figurene viser at trykket i løsningen faller sylinder-symmetrisk om den numeriske kilden. Samtidig kan det observeres at bølgefrontens fasehastighet er noe høyere langs en diagonal fra nedre venstre til øvre høyre hjørne i figurene. Dette er en numerisk feil som har sammenheng med beregningsgitterets struktur. Figur 4.1 viser at hver blokk i gitteret er delt i seks tetraeder-elementer, på en slik måte at forbindelsene mellom blokknodene danner en hoveddiagonal. Denne noe sterkere diagonale koplingen mellom nodene i gitteret resulterer i en numerisk transporthastighet som er svakt asymmetrisk.

6.4.1 Interferens

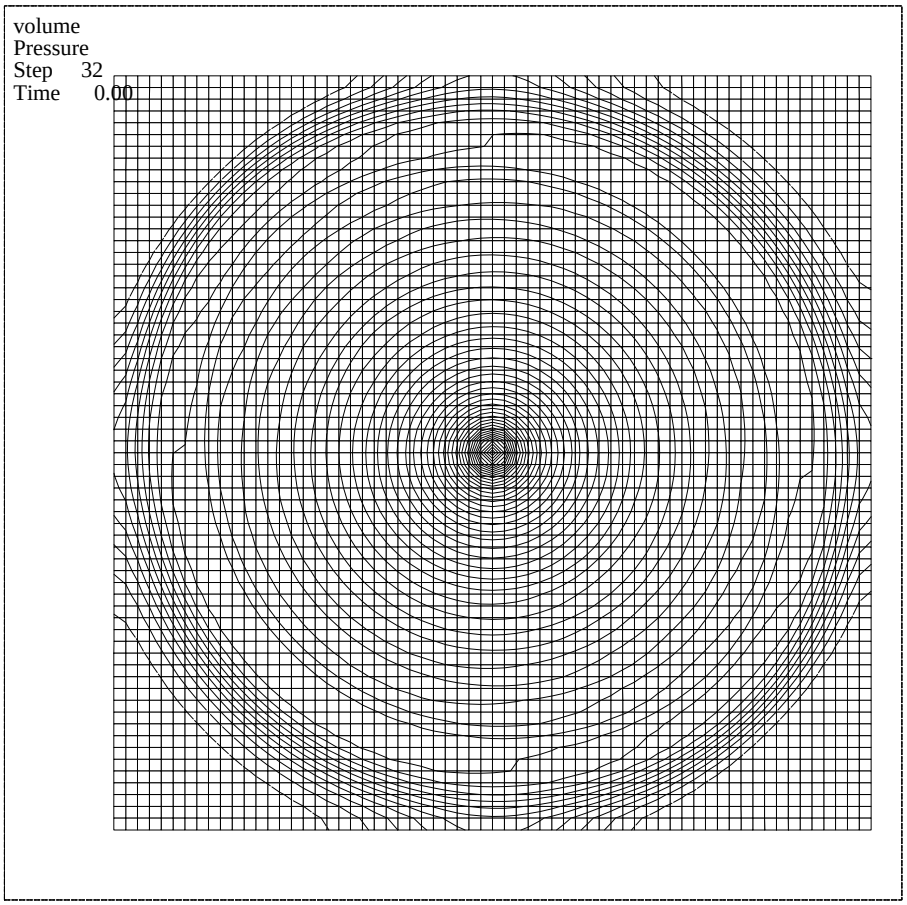
Interferens er også et fenomen som enklest beskrives kvalitativt ved prinsippet om superposisjon (se seksjon 2.2.6). To bølgefronter på samme sted til samme tid vil interferere *konstruktivt* dersom de er i fase, slik at den summerte bølgens amplitude øker. En todimensjonal elementmetodemodellering av fenomenet er vist i figur 6.19, og resultatet ser ut til å være konsistent med teorien. Drivende funksjon i de to numeriske linjekildene var én positiv halvperiode av en sinus-funksjon, og de små oscillasjonene som følger hver bølge er resultat av numeriske unøyaktigheter, som beskrevet i neste seksjon.

6.5 Numeriske unøyaktigheter

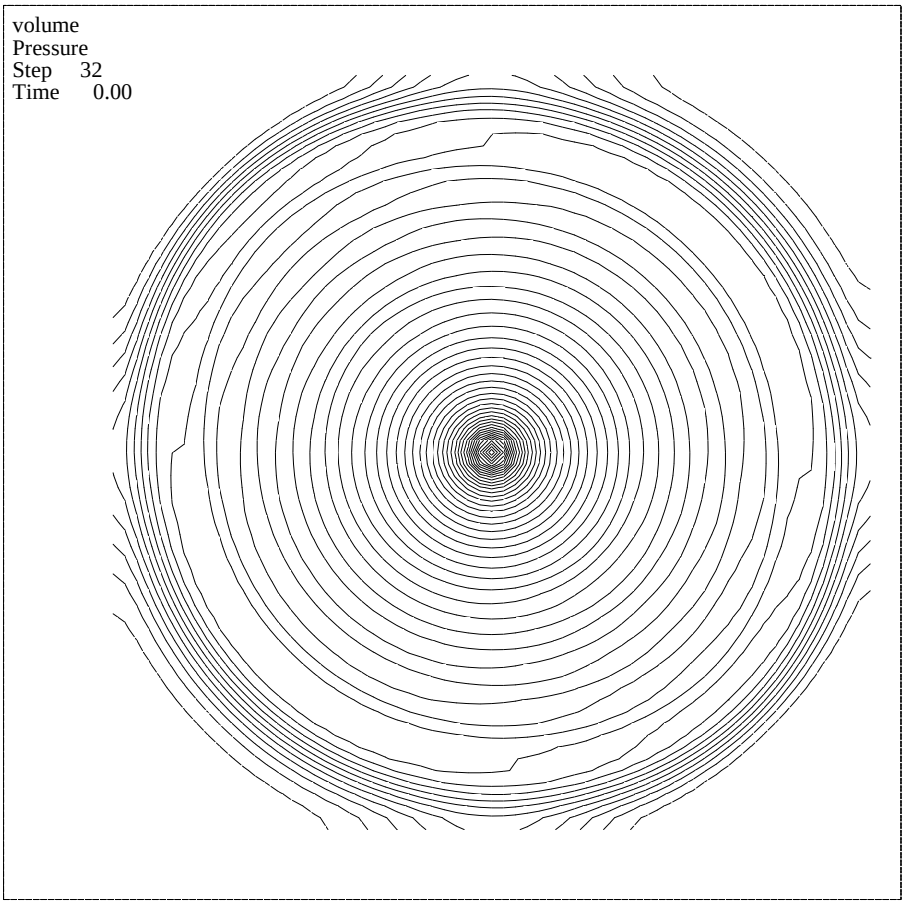
Numeriske metoder for løsing av partielle differensiallikninger introduserer karakteristiske feil forbundet med diskretiseringen i rom og tid. Disse feilene kan ikke alltid beregnes matematisk, spesielt ikke ved meget kompliserte problemstillinger. Den lineære bølgelikningen med konstante koeffisienter burde gi relativt forutsigelige numeriske løsninger, men ettersom denne oppgaven er tenk å skulle danne grunnlaget for videre arbeide med mer avanserte bølgeproblemer der teorien er svakere, er vekten bevisst lagt på analyse av resultater fra praktisk testing. En systematisk uttesting kan gi et brukbart grunnlag for å vurdere metodenes nøyaktighet[43], og valg av parametre kan i mange tilfeller gjøres på grunnlag av en tilsvarende systematisk analyse av testresultatene.

Har i foregående seksjoner vist et sett med numeriske løsninger som korrelerer bra med de tilsvarende analytiske, innenfor rammene av de opprinnelige krav som ble stilt i seksjon 4.2. Kvalitative rimelighetsvurderinger tyder på at løsningene også er konsistente ved mer kompliserte problemstillinger, uten at dette likevel kan ansees som bevist.

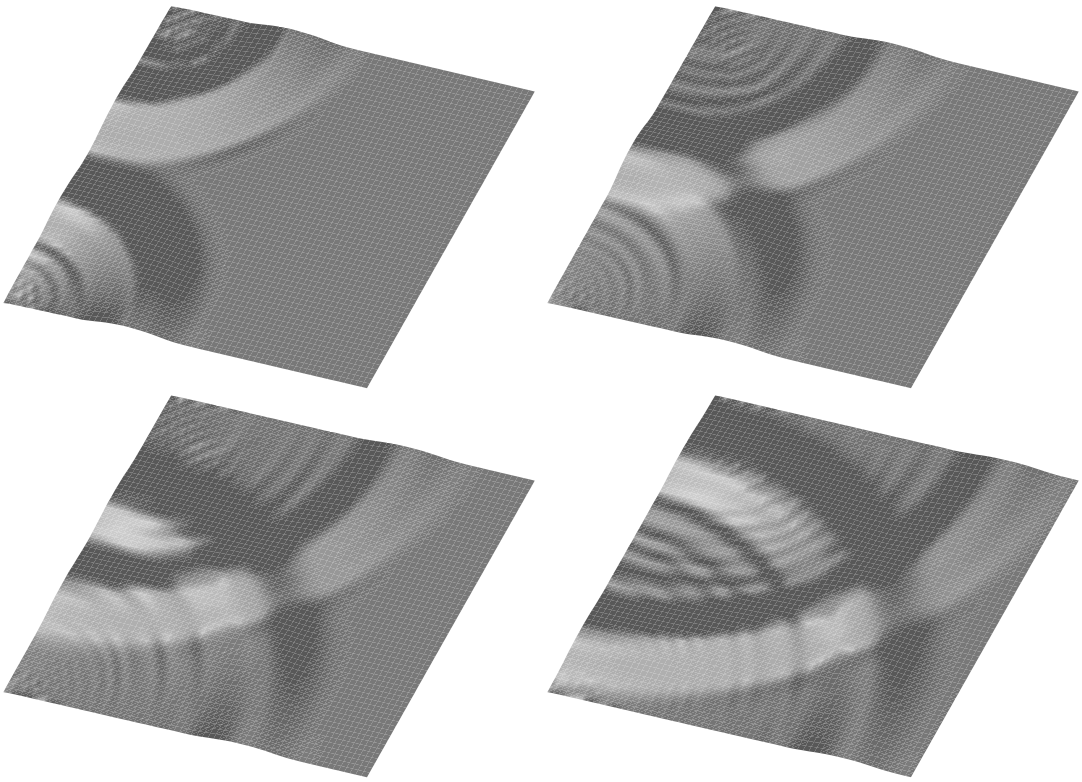
Det kan vises[4][40] at en vilkårlig bølgeform som er en løsning av den lineære bølgelikningen kan karakteriseres fullstendig ved komponentenes *amplitude* og *fase*. Eventuelle unøyaktigheter relatert til disse to parametrene vil derfor være mest viktig å kartlegge ved numerisk modellering av bølgeforplantning. Fastslo i seksjon 4.7.4 at amplitudeavvik i en korrekt implementert numerisk metode først og fremst kan knyttes til metodens *stabilitet*, og at fasefeil tilsvarende er nært forbundet med *numerisk dispersjon*.



Figur 6.17: Det radielle trykkfallet rundt en numerisk linjekilde, med beregningsgitter. Kilden ble styrt ved en *step*-funksjon med amplitude $A = 1mbar$. Figuren viser trykket rundt kilden etter at bølgefronten har propagert frem til randen (32 tidssteg).



Figur 6.18: Det radielle trykkfallet rundt en numerisk linjekilde, uten beregningsgitter. Øvrige betingelser som i foregående figur.



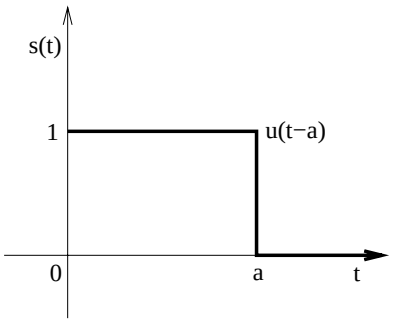
Figur 6.19: Interferens mellom enkle bølgefronter fra to numeriske linjekilder. Tidssekvens fra øvre venstre hjørne.

Foruten beregningsnettets variable finhet i tid og rom, kjennetegnes skjemaet (4.22) ved to parametre γ og β som kan justeres. Det store antallet mulige kombinasjoner tilsier at rommet av utførbare tester må avgrenses, og parameterparene *a) - h)* i tabell (4.25) dannet hensiktsmessige «koordinater» langs tenkte γ- og β-akser i det nevnte testrommet. Tilsvarende betraktninger lå til grunn ved valget av den klassiske *CFL*-betingelsen (4.34) som referansepunkt ved valg av tidssteg Δt relativt til det semidiskretiserte problemets typiske elementstørrelse h.

Klassen av drivende funksjoner er i denne oppgaven tenkt å kunne bestå av aperiodiske, også diskontinuerlige, funksjoner, selv om disse strengt tatt ikke er i Hilbertrommet $\mathcal{H}^1$. Dette stiller ikke bare svært store krav til den numeriske metodens stabilitet, men også til dens evne til å bevare bølgekomponentenes relative fase. Et eksempel på en diskontinuerlig funksjon er den såkalte *step*- eller trinnfunksjonen, gitt ved

$$\begin{aligned} u(t-a) &= 1, \quad t \leq a, \\ &= 0, \quad t > a, \end{aligned} \tag{6.24}$$

og vist i figur 6.20 (den beskrevne funksjonen er mer presist en invertert enhets-step-funksjon, tidsforskjøvet til a). Det kan vises[42] at responsen $\alpha(t)$ fra et lineært system ved



Figur 6.20: Enhets step-funksjon, invertert og tidsforskjøvet til a.

en step-eksitasjon $u(t)$, kalt step-responsen, gir en fullstendig tidsdomene-karakterisering av systemet, og er tilstrekkelig til å bestemme systemets respons $r(t)$ overfor enhver annen eksitasjon $e(t)$. Dette uttrykkes ved det såkalte *Duhamel superposisjons-integralet*[42], gitt ved

$$r(t) = e(0+)\alpha(t) + \int_{0+}^{t} e_t(\tau)\alpha(t-\tau)d\tau, \tag{6.25}$$

der $e_t(t)$ er den tidsderiverte av eksitasjonen $e(t)$, og $e(0+)$ er verdien av $e(t)$ ved $t = 0+$.

6.5.1 Stabilitet

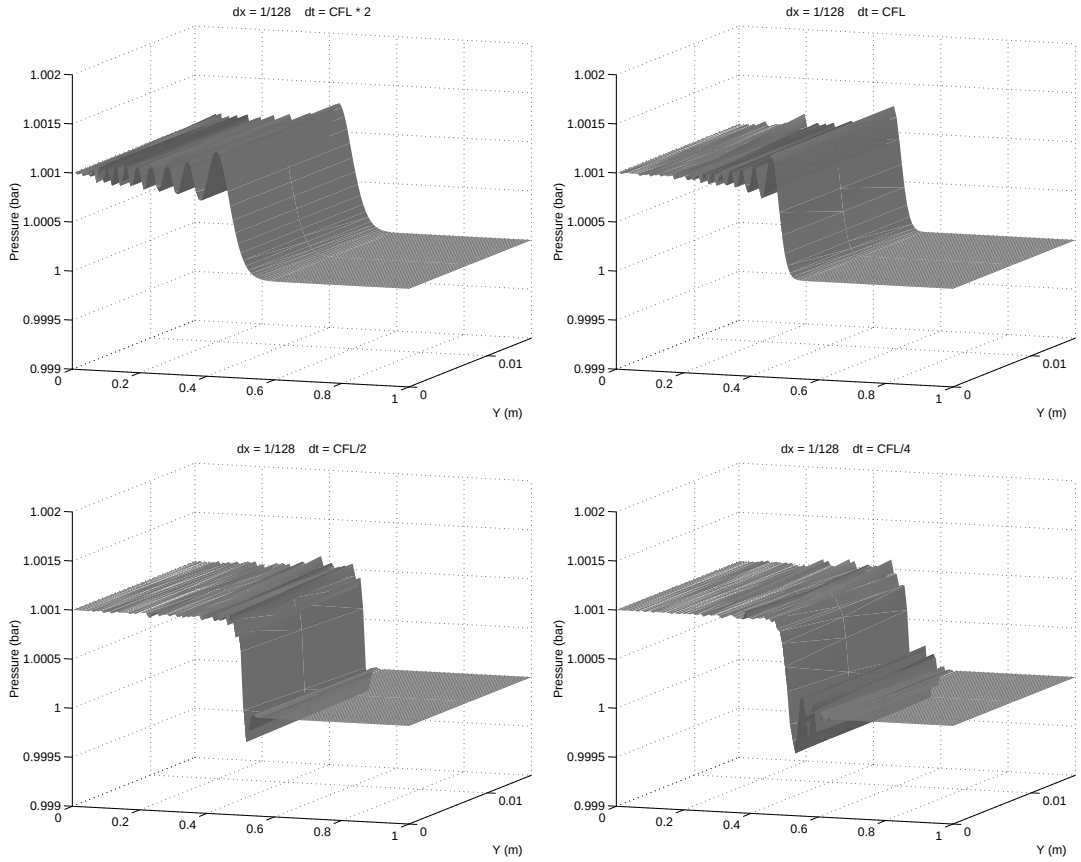
Viste i seksjon 4.7.3 at det parameterstyrte Newmarks skjema (4.22) er *ubetinget* stabilt i normen $||\cdot||_{\mathcal{H}^1}$ dersom visse krav (4.30) til parametrene γ og β er tilfredsstilt, og oppgav at bare parameterparene *c)* og *h)* i (4.25) tilfredsstilte disse kravene. Viste samtidig at skjemaet også i noen tilfeller kunne utvise stabilitet selv om γ og β ikke tilfredsstilte de ovennevnte kravene, forutsatt at tidsstegene var små nok i forhold til bølgelengdene som

skulle representeres. Ubetinget stabilitet kan i praksis være en stor fordel dersom romdiskretiseringen er irregulær, f.eks. med små lokale fortettinger. Tidsstegene kan da velges ut fra eventuelle krav til prosesseringstid og den ønskede nøyaktigheten ved fortettingene.

Skal her vise noen resultater fra uttestingen av stabiliteten til de ulike skjemaene, og kort kommentere eventuelle andre egenskaper.

Ubetinget stabile skjemaer

Av de oppgitte parameterparene *c)* og *h)* er det bare *h)* som i utgangspunktet skal gi et skjema uten numerisk demping. Ser av figur 6.21 at *h)* resulterer i et skjema som i det valgte

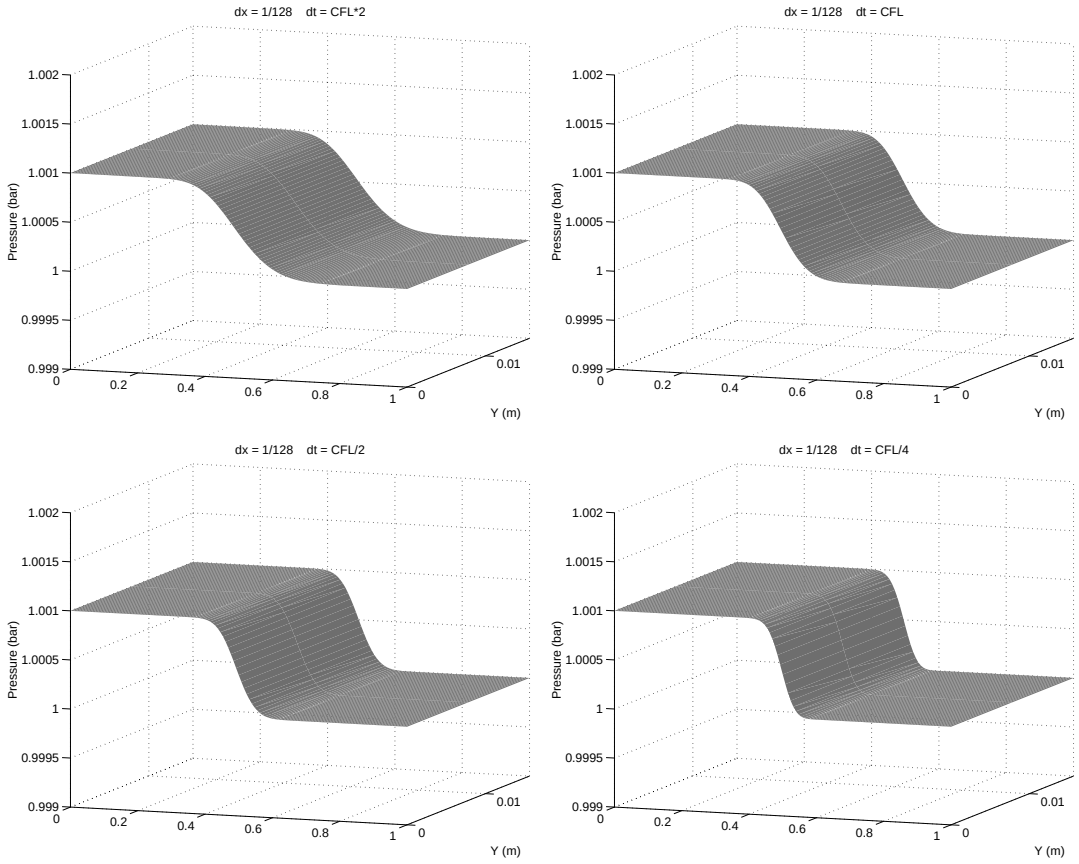


Figur 6.21: Step-responsen til Newmark-skjemaet basert på parametrene *h)*, gitt ved $\gamma = 1/2$ og $\beta = 1/4$. Gitt en Δt_{CFL} som tilfredsstiller *CFL*-betingelsen, svarer de benyttede tidsstegene til henholdsvis $\Delta t_{CFL} \cdot 2$ (øverst til venstre), Δt_{CFL} (øverst til høyre), $\Delta t_{CFL}/2$ (nederst til venstre), $\Delta t_{CFL}/4$ (nederst til høyre).

eksempelet gir en bratt bølgefront, fulgt av eksponensielt avtakende høyfrekvente oscillasjoner når tidsstegene oppfyller *CFL*-betingelsen. Oscillasjonene har en initiell amplitude av størrelsesorden $1/3$ av step-eksitasjonens totale amplitude rett etter fronten, og dør så forholdsvis fort ut. Når tidsstegenes lengde *dobles* blir fronten slakere, samt at oscillasjonene får større amplitude og lengre tidskonstant. *Halveres* derimot tidsstegene, får løsningen

en brattere front og betraktelig redusert amplitude på oscillasjonene etter fronten, selv om varigheten tilsynelatende ikke reduseres. Oscillasjonenes frekvens øker og får mer karakter av støy, og det oppstår i tillegg et ekstra utsving *før* den bratte bølgefronten. Reduseres tidsstegene ytterligere, til fjerdeparten av *CFL*-tidssteget, skjer det svært liten endring verken i bølgefrontens bratthet eller i den påfølgende støyen. I stedet økes oversvingets amplitude foran fronten til $1/3$ av step-eksitasjonens totale amplitude, og oversvinget innledes av et par oscillasjoner.

De beskrevne resultatene kan tolkes slik at tidsstegene bør tilfredsstille *CFL*-betingelsen eller være noe kortere, ned mot halvparten, for å oppnå størst nøyaktighet. Blir tidsstegene for lange opptrer oscillasjonene *etter* bølgefronten, og blir de for korte opptrer de *foran*.

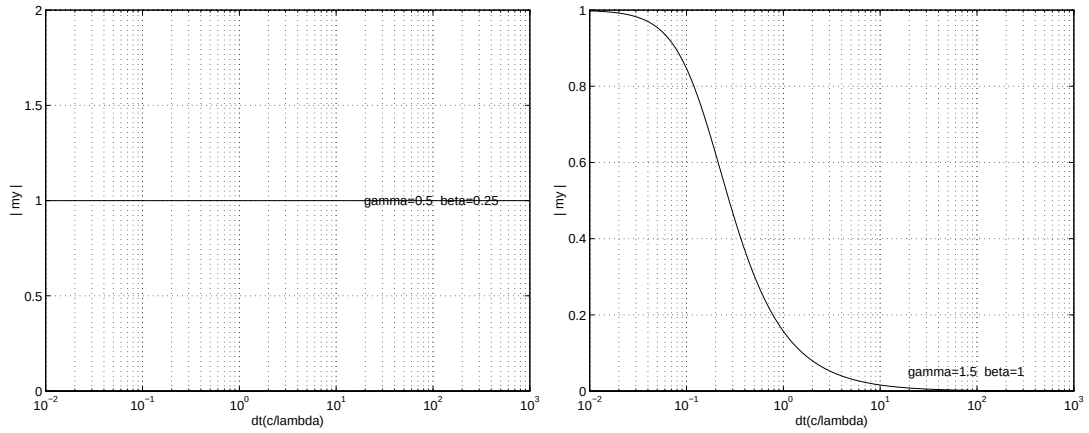


Figur 6.22: Step-responsen til Newmark-skjemaet basert på parametrene *c)*, gitt ved $\gamma = 3/2$ og $\beta = 1$. Gitt en Δt_{CFL} som tilfredsstiller *CFL*-betingelsen, svarer de benyttede tidsstegene til henholdsvis $\Delta t_{CFL} \cdot 2$ (øverst til venstre), Δt_{CFL} (øverst til høyre), $\Delta t_{CFL}/2$ (nederst til venstre), $\Delta t_{CFL}/4$ (nederst til høyre).

Skjemaet basert på parametrene *c)* kjennetegnes i figur 6.22 av kraftig numerisk demping. Figuren viser ingen tegn til oscillasjoner, og bølgefronten blir tilsynelatende proporsjonalt brattere med kortere tidssteg. Uansett er fronten betraktelig slakere enn det tilsvarende resultatet i 6.21, gitt ved parametrene *h)*.

En grafisk fremstilling av bølgekomponentenes relative amplitude $|\mu|$ for henholdsvis

h) og *c)* er gitt i figur 6.23. Den logaritmiske x-aksen i figurene uttrykker forholdet mellom avstanden $c_m \cdot \Delta t$ en bølgekomponent m tilbakelegger i løpet av tidsintervallet Δt, og bølgelengden λ_m til den samme komponenten. For en gitt Δt kan man se av figuren til høyre at skjemaet gitt ved *c)* demper korte bølgelengder. For eksempel multipliseres amplituden til komponenter med bølgelengde på $9 \cdot c_m \Delta t$ med en faktor på ca. 0.6 ved hvert tidssteg. Kan også tolke høyre figur slik at man ved bruk av skjema basert på *c)* må velge meget korte tidssteg, f.eks. av størrelsesorden $10^{-1} \cdot \lambda_m / c_m$, for å bevare bølgekomponenter av betydning[69]. Grafen til venstre i figur 6.23 viser til sammenlikning at skjemaet basert på parameterparet *h)* ikke demper noen bølgekomponenter uansett tidssteg.



Figur 6.23: Variasjon av bølgekomponentenes relative amplitude $|\mu|$ med $c_m \Delta t / \lambda_m$ for skjemaene basert på henholdsvis *h)* (venstre) og *c)* (høyre). Ser at *c)* utviser kraftig demping av bølgelengder kortere enn ca. $10 \cdot c_m \Delta t$, mens *h)* er uten numerisk demping.

Betinget stabile skjemaer

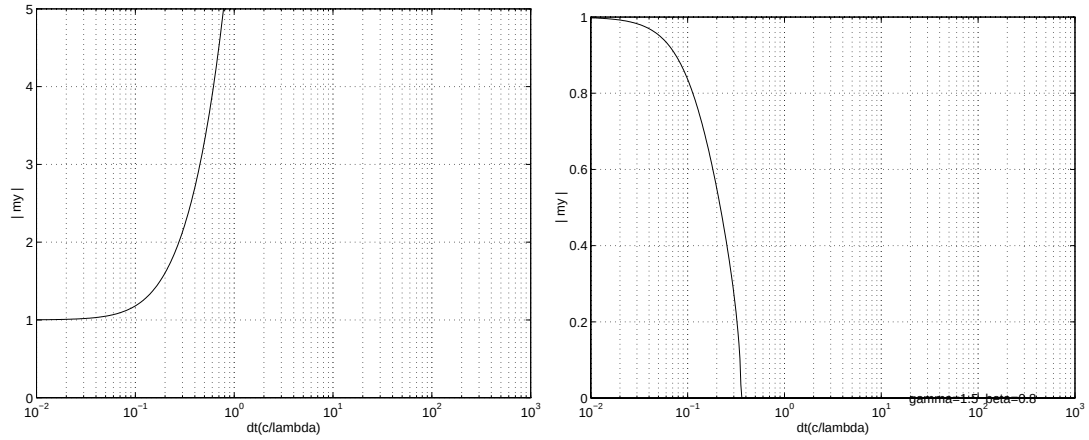
Betinget stabile skjemaer kjennetegnes ved at de stiller krav til det relative forholdet mellom beregningsnettets finhet i tid og rom for ikke å forstørre diskretiseringsfeil i initalbetingelsene med tiden. For typiske sentrerte trestegs differanse-skjemaer er dette kravet gitt ved den såkalte *CFL*-betingelsen (4.34). Viste en relatert stabilitetsbetingelse i (4.33) for trestegs skjemaer som også kan utvise demping.

Samtlige skjemaer anvendt i denne oppgaven krever løsing av likningssystemer ved hvert tidssteg, og kalles derfor *implisitte*, som beskrevet i seksjon 4.7.3. Til sammenlikning er løsningen ved såkalte *eksplisitte* skjemaer i hvert tidssteg gitt direkte fra de foregående, og dette gjør skjemaene meget effektive. Til gjengjeld er eksplisitte skjemaer alltid betinget stabile.

FRONTSIMs likningsløser er svært effektiv, og implisitte skjemaer med ubetinget stabilitet kan gi en rekke fordeler, som beskrevet ovenfor. Hensikten med å teste de følgende betinget stabile skjemaene var å undersøke om disse kunne by andre gunstige egenskaper, spesielt med hensyn på nøyaktighet.

Grafen til venstre i figur 6.24 viser at tidsstegene må være *svært* korte i forhold til bølgelengdene som skal representeres for å oppnå en stabil løsning med et skjema basert på

parametrene gitt i *a)* i tabellen (4.25). Det ble derfor ikke funnet hensiktsmessig å presentere løsninger basert på dette skjemaet.



Figur 6.24: Variasjon av bølgekomponentenes relative amplitude $|\mu|$ med $c_m \Delta t / \lambda_m$ for skjemaer basert på parametrene *a)* (venstre) og *e)* (høyre). Ser at *a)* medfører løsninger der alle komponenter med bølgelengde kortere enn ca. $100 \cdot c_m \Delta t$ vil vokse med hvert tidssteg. Til sammenlikning gir *e)* løsninger der komponenter med bølgelengde kortere enn ca. $7 \cdot c_m \Delta t$ undertrykkes fullstendig fra første tidssteg.

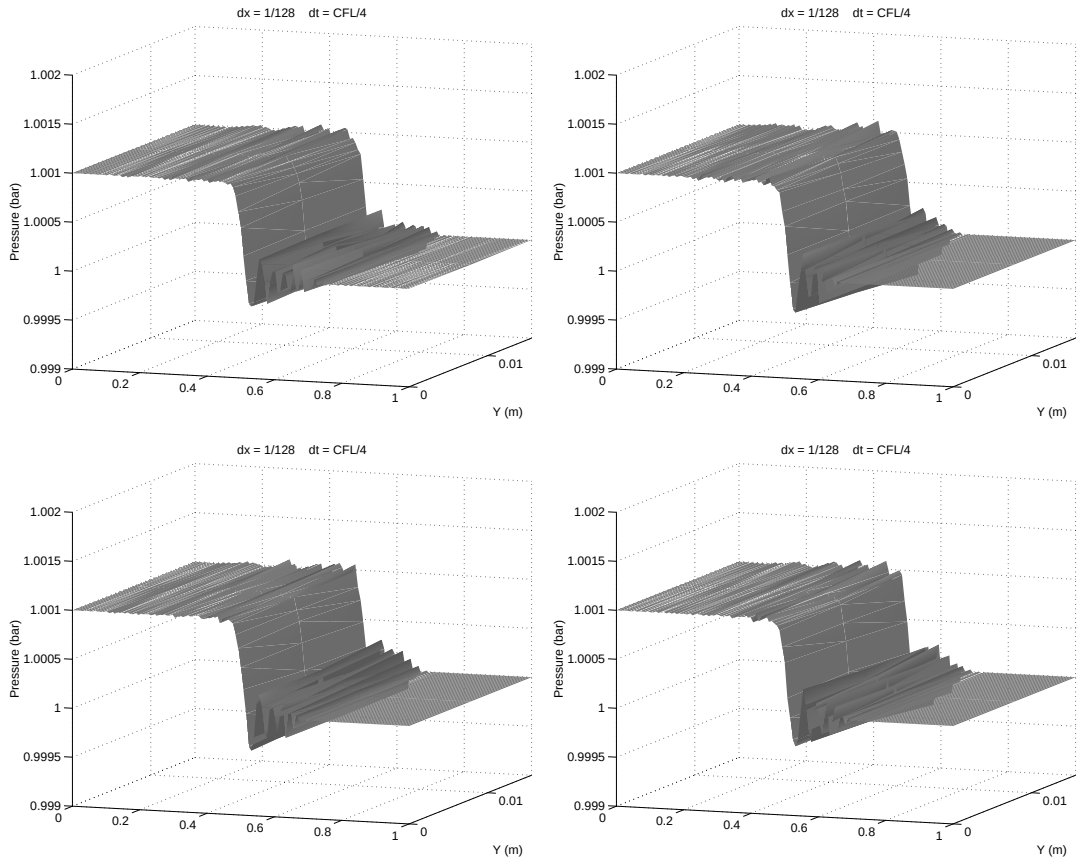
Øverst til venstre i figur 6.25 vises en løsning basert på skjemaet definert ved parameterparet *b)*. Skjemaet er bare betinget stabilt, men gir likevel bølgekomponentenes relative amplitude $|\mu|$ konstant lik 1 i en grafisk fremstilling som over, ettersom det er uten demping. Løsningen ble ustabil ved tidssteg som tilsvarte omkring 0.3 ganger *CFL*-tidssteget.

Bortsett fra det *a)*-baserte skjemaet, viste *d)* svakest stabilitetsegenskaper. Skjemaet er ikke dempende, dvs. gir $|\mu|$ konstant lik 1, og gav en løsning svært likt *h)* ved tidssteg tilsvarende $1/4$ av *CFL*-betingelsens (se øverst til høyre i figur 6.25). Det var ikke mulig å få stabile løsninger med lengre tidssteg.

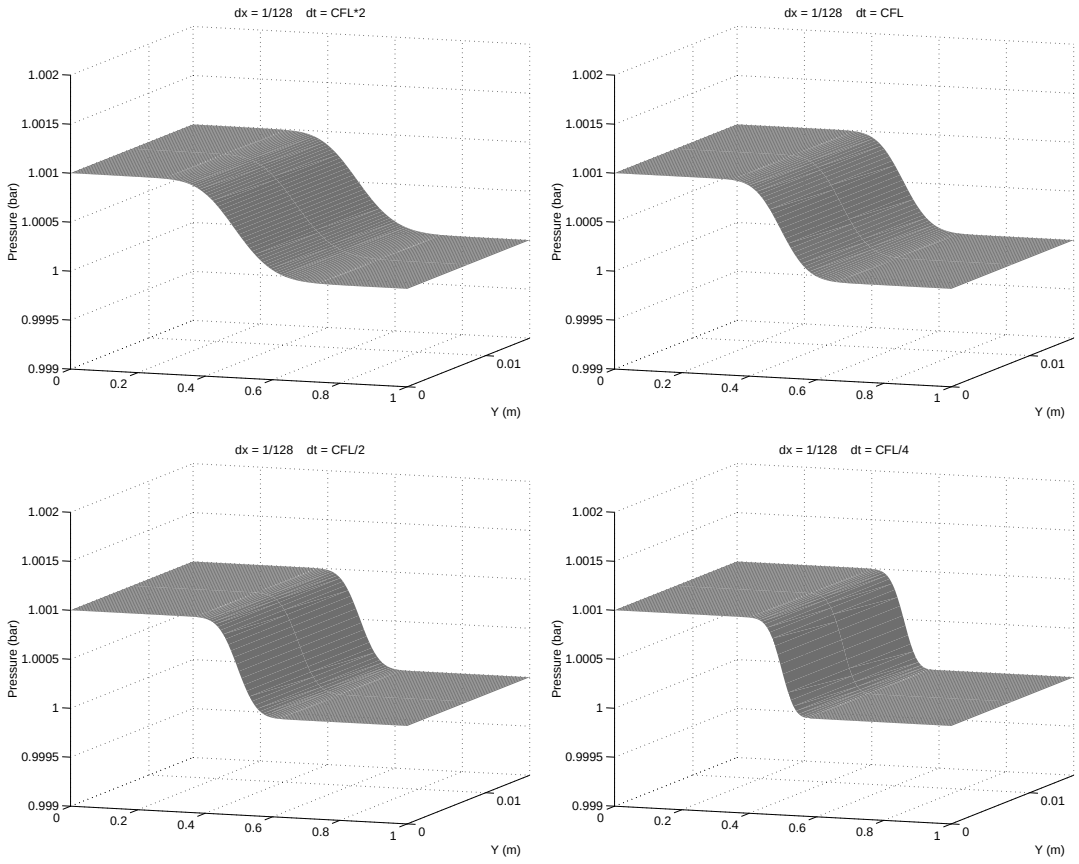
Til tross for at parametrene *e)* skulle gitt et betinget stabilt skjema ut fra kravene (4.30), gav det konsekvent stabile løsninger ved uttesting, også ved *meget* lange tidssteg. Resultatene ved de lengste avprøvede tidsstegene er ikke vist i figuren 6.26, men gav suksessivt slakere bølgefront. De viste resultatene er tilsynelatende identiske med *c)*, men grafen til høyre i figur 6.24 viser en langt kraftigere demping av komponenter med bølgelengde kortere enn ca. $9 \cdot c_m \Delta t$. Komponenter med bølgelengde kortere enn ca. $7 \cdot c_m \Delta t$ undertrykkes fullstendig fra første tidssteg, og nærmere analyse av diskriminanten (4.33) viser at skjemaet først blir ustabilt for bølgelengder kortere enn ca. $2.5 \cdot c_m \Delta t$. Dette er årsaken til skjemaets gode stabilitetsegenskaper.

Oscillasjonene etter bølgefronten i løsningen fra skjemaet gitt ved *f)*-parametrene, vist nederst til venstre i figur 6.25, er identiske med *h)* ved tilsvarende tidssteg. Til gjengjeld innledes fronten av flere oscillasjoner over et lengre tidsintervall, men med samme maksimale amplitude som i *h)*. Stabiliteten og dempingen var som for *b)* og *g)*.

Det siste betinget stabile skjemaet gav en løsning som vist nederst til høyre i figur 6.25, og tok utgangspunkt i parametrene *g)*. Oscillasjonene etter bølgefronten var som i *d)*, mens



Figur 6.25: Step-responsen til fire betinget stabile sentrerte Newmark-skjemaer ved tidssteg tilsvarende $\Delta t_{CFL}/4$: *b)*, med parametre $\gamma = 1/2$ og $\beta = 0$ (øverst til venstre), *d)*, med parametre $\gamma = 1/2$ og $\beta = 1/6$ (øverst til høyre), *f)*, med parametre $\gamma = 1/2$ og $\beta = 1/10$ (nederst til venstre) og *g)*, med parametre $\gamma = 1/2$ og $\beta = 1/12$ (nederst til høyre).



Figur 6.26: Step-responsen til Newmark-skjemaet basert på parametrene *e)*, gitt ved $\gamma = 3/2$ og $\beta = 4/5$. Gitt en Δt_{CFL} som tilfredsstiller *CFL*-betingelsen, svarer de benyttede tidsstegene til henholdsvis $\Delta t_{CFL} \cdot 2$ (øverst til venstre), Δt_{CFL} (øverst til høyre), $\Delta t_{CFL}/2$ (nederst til venstre), $\Delta t_{CFL}/4$ (nederst til høyre).

fronten innledes med fler og mer komplekse oscillasjoner enn *h)*, men med samme maksimalamplitude. Løsningen var generelt meget lik *f)*, med samme stabilitet.

Med unntak av problemer som krever ekstrem demping av høye frekvenser som i *e)*, kan det her ikke sees å være særlige fordeler ved betinget stabile skjemaer. Kunne disse vært uttrykt og løst eksplisitt ville det kunne ha gitt en effektivitetsgevinst, men som de står her krever de kortere tidssteg enn hva som ser ut til å være effektivitets- og nøyaktighetsmessig optimalt. Videre undersøkelser er derfor basert på ubetinget stabile skjemaer.

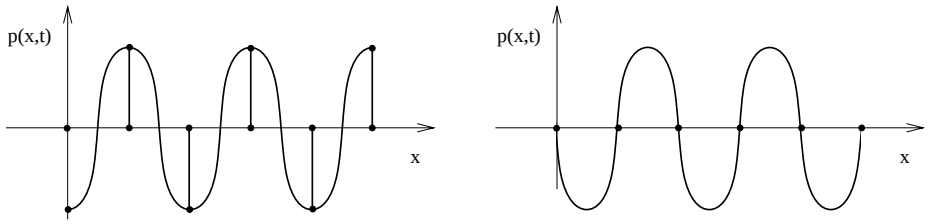
6.5.2 Dispersjon

Innsetting av (6.7) i bølgelikningen (6.1) gir

$$\omega = kc \,, \tag{6.26}$$

som kalles *dispersjonsrelasjonen*. Denne relasjonen uttrykker, sammen med (6.6), at ω og k er relatert ved en konstant, c, i løsningen (6.5). Den analytiske forplantningshastigheten er med andre ord uavhengig av bølgelengden. I tillegg er ω i det analytiske tilfellet en reell størrelse, slik at ingen bølgekomponenter vokser eller dempes. En slik kvalitativ oppførsel kan bare tilnærmelsesvis oppfylles når problemet løses numerisk, men kjennskap til feilkildene kan være et godt utgangspunkt for å gjøre tilnærmelsen så god som mulig.

Høyfrekvente bølgekomponenter er vanskeligst å behandle numerisk. Diskretiseringsfeilen ved høyere frekvenser vil typisk være større fordi de harmoniske bølgekomponentene skal representeres ved bruk av færre nodepunkter. Et ekstremt eksempel for beregningsgitter med lineær interpolasjon er en komponent med bølgelengde $2h$, som vist i figur 6.27. En liten faseforskyvning medfører at komponenten approksimeres med for lav amplitude. Dette introduserer en form for numerisk «støy»ved de høyeste frekvensene, og støyen fremtrer som små, mer eller mindre tilfeldige transienter rundt høyfrekvente bølgekomponenter. Dette kan observeres i samtlige figurer av diskontinuerlige funksjoner i denne oppgaven.



Figur 6.27: Frekvenskomponenter med bølgelengde $2h$ er de mest høyfrekvente som kan approksimeres ved lineær interpolasjon, men kan introdusere feil også ved korte tidssteg. De to diskretiserte komponentene er vist faseforskjøvet 90^0, tilsvarende $1/2h$. Komponenten til høyre vil ikke gi bidrag i nodene.

I tillegg til den høyfrekvente støyen opptrer også et fenomen av mer systematisk karakter. Etter diskretisering vil en én-dimensjonal bølgekomponent som (6.7) typisk være på formen

$$p_h^n = Ae^{j(\omega_\Delta n\Delta t - k_\alpha h)},$$

der h er elementenes karakteristiske størrelse og Δt er tidsstegenes lengde, og innsetting i den fullt diskretiserte bølgelikningen gir, dersom γ og β antas gitt, en *numerisk* dispersjonsrelasjon

$$\omega_\Delta = \omega_\Delta(k, h, \Delta t). \tag{6.27}$$

Generelt er ω_Δ kompleks, og det kan vises[43] fra (6.27) at diskretiserte bølgekomponenter propagerer med *ulik hastighet* avhengig av forholdet mellom bølgelengden, elementstørrelsen og tidsstegene.

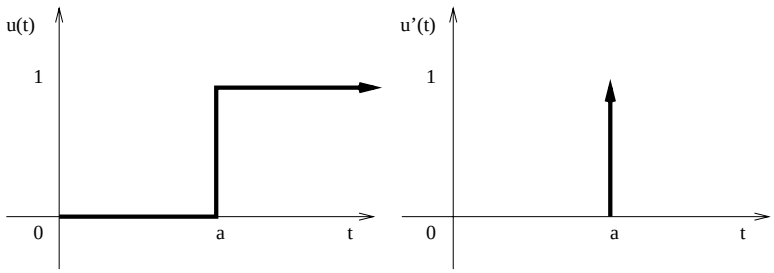
Et alternativt mål på et skjemas nøyaktighet kan i stedet for trunkeringsfeilen være $\omega_e = \omega - \omega_\Delta$. Sentrerte trestegs differanseskjemaer vil generelt ha en feil ω_e av orden $\mathcal{O}(h^2, \Delta t^2)$, og størst feil for korte bølger. Velges $c\Delta t \ll 1$ og $kh \ll 1$ er dispersjonen svært liten, og dersom den «numeriske hastigheten» $h/\Delta t = c$ for den fullt diskretiserte utgaven av bølgelikningen (6.1), vil $\omega_\Delta = \omega$. Ofte kan ikke denne *CFL*-betingelsen tilfredsstilles eksakt, f.eks. ved irregulær diskretisering. For å sikre stabilitet må da $h/\Delta t < c$, og det kan vises[43] fra (6.27) at en bølgeform da vil forvrenges etterhvert som den forplanter seg gjennom domenet, og mest for høye frekvenser.

Impulser og dispersjon

Har i det følgende valgt å benytte en drivende funksjon som er særdeles vanskelig å approksimere med en begrenset sum av testfunksjoner, og som i enda sterkere grad enn stepfunksjonen får frem feil og unøyaktigheter. Det kan vises[42] at step-funksjonens tidsderiverte er en *impuls*-funksjon, eller

$$u'(t) = \delta(t - a), \tag{6.28}$$

vist grafisk i figur 6.28. Den viktigste egenskapen til impulsfunksjonen (6.28) er uttrykt



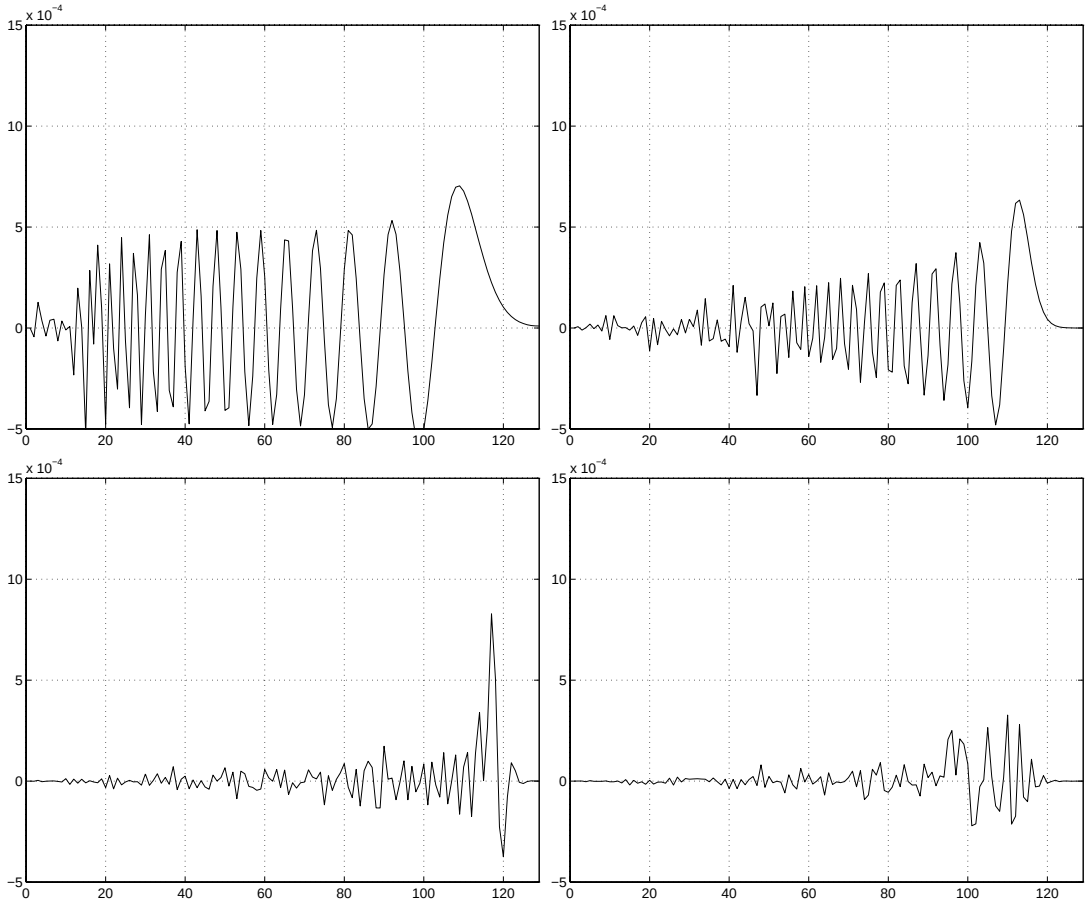
Figur 6.28: Impulsfunksjonen (høyre) som tidsderivert av stepfunksjonen (venstre).

ved

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t - T)\,dt = f(T),$$

for en vilkårlig integrerbar funksjon f(t), og $\delta(t - T) = 0$ for alle $t \neq T$. Funksjonens egenskaper gjør den til et godt utgangspunkt for analytiske studier av ulike testfunksjoners egenskaper i tid og rom, men i denne oppgaven vil den først og fremst anvendes som drivende funksjon ved kvalitative undersøkelser av numeriske unøyaktigheter ved ulike ubetinget stabile skjemaer.

Figur 6.29 viser dispersjonen til Newmark-skjemaet gitt ved parametrene *h)* ved ulike valg av tidssteg. Den beste approksimasjonen av impulsen sees i dette eksempelet å oppnås når $\Delta t = \Delta t_{CFL}/2$, der Δt_{CFL} tilfredsstiller *CFL*-betingelsen. Lengre tidssteg medfører at korte bølgelengder får lavere forplantningshastighet enn lange bølgelengder, og denne *numeriske dispersjonen* øker med tidsstegens lengde. Kortere tidssteg enn $\Delta t_{CFL}/2$ medfører at korte bølgelengder forplantes raskere enn lange, og dispersjonen øker med kortere tidssteg. De tidligere nevnte kortvarige høyfrekvente transientene rundt korte bølgekom-

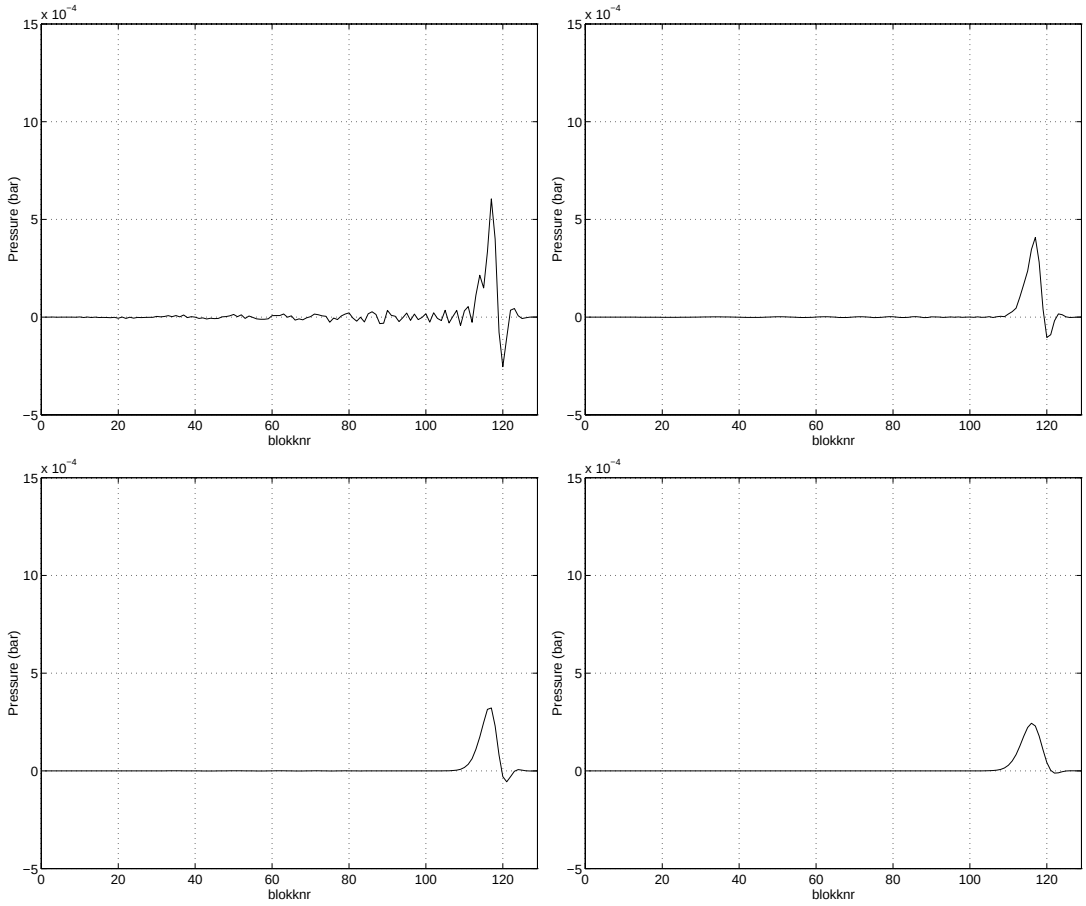


Figur 6.29: Impuls-responsen til Newmark-skjemaet basert på parametrene *h)*, gitt ved $\gamma = 1/2$ og $\beta = 1/4$. Skalaen på x-aksen er blokknummer fra $0 - 128$ langs kanalen, og y-aksen er skalert for akustisk trykk i bar. Gitt en Δt_{CFL} som tilfredsstiller *CFL*-betingelsen, svarer de benyttede tidsstegene til henholdsvis $\Delta t_{CFL} \cdot 2$ (øverst til venstre), Δt_{CFL} (øverst til høyre), $\Delta t_{CFL}/2$ (nederst til venstre), $\Delta t_{CFL}/4$ (nederst til høyre). Sistnevnte er trukket noe «tilbake i tid» for å få med høyfrekvente oscillasjoner foran.

ponenter kan tydelig sees i figur 6.29, i form av irregulære mønstre der tettheten av korte bølger er størst.

Impulser og demping

Newmark-skjemaet gitt ved parametrene *h)* i 4.25 skal i utgangspunktet være uten numerisk demping, ettersom $\gamma = 1/2$. En eventuell økning av verdien for γ skal øke den numeriske dempingen med økende lengde på tidsstegene, som beskrevet i seksjon 4.7.3. Tok utgangspunkt i skjema *h)* og økte γ trinnvis for å forsøke å minimere oscillasjonene og støyen som kan observeres omkring impulsene i figur 6.29. Parameteren β ble endret tilsvarende, for å tilfredsstille kravene (4.30) til ubetinget stabilitet. Den drivende funksjonen var en impuls (figur 6.28), og resultatet er vist i figur 6.30. Resultatene tyder på at nøyak-



Figur 6.30: Impuls-responsen til dempede, men ubetinget stabile Newmark-skjemaer, basert på parametrene $\gamma = 0.51$ og $\beta = 0.255$ (øverst til venstre), $\gamma = 0.53$ og $\beta = 0.2652$ (øverst til høyre), $\gamma = 0.55$ og $\beta = 0.2756$ (nederst til venstre), $\gamma = 0.60$ og $\beta = 0.3025$ (nederst til høyre). Gitt en Δt_{CFL} som tilfredsstiller *CFL*-betingelsen, svarer de benyttede tidsstegene til $\Delta t_{CFL}/2$, og løsningene er vist etter 230 tidssteg.

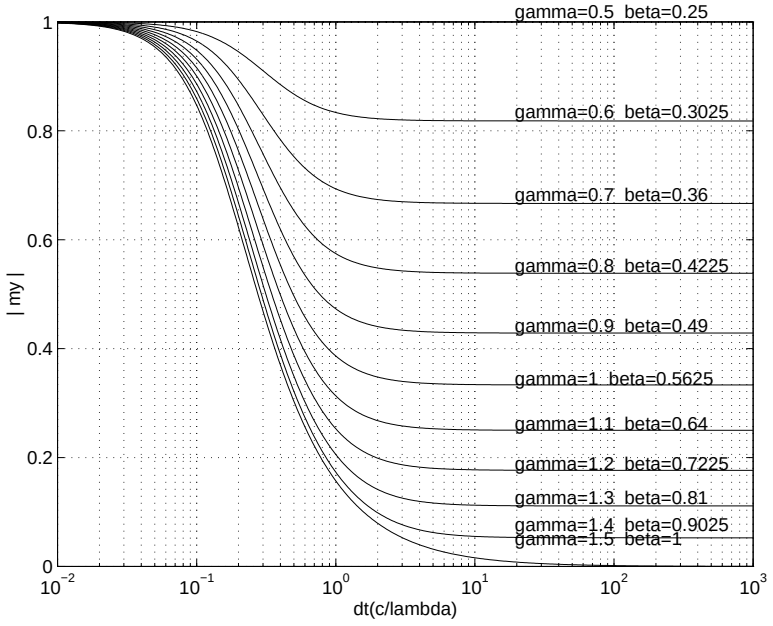
tighet ved approksimering av impulser krever forsiktig omgang med numerisk demping. Den initielle pulsen hadde en amplitude på 1×10^{-3}, eller 10×10^{-4} for å bruke figurens amplitudeskala. Ved tidssteg tilsvarende $\Delta t_{CFL}/2$ kan det sees av nedre venstre løsning i figur 6.29 at et skjema uten numerisk demping gir en viss reduksjon i impulsens amplitude etter 230 tidssteg, hovedsakelig på grunn av litt dispersjon. Til sammenlikning utviser

de tilsvarende løsningene i figur 6.30 betraktelig større demping av høyfrekvente komponenter, og derved dempes også impulsen. Ser dessuten at bølgefronten «smøres utover» litt for hvert tidssteg, avhengig av de valgte parametrene.

Graden av demping kan i Newmarks metode tilpasses problemet, og en verdi for γ er ikke nødvendigvis optimal for alle kombinasjoner av tidssteg, elementstørrelse og drivende funksjon. Figur 6.31 viser dempingen av høyfrekvente oscillasjoner ved $\gamma \in [0.25, 1.0]$, og figur 6.32 viser mer detaljert dempingen ved $\gamma \in [0.5, 0.6]$, med β i begge tilfeller gitt ved

$$\beta = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)^2,$$

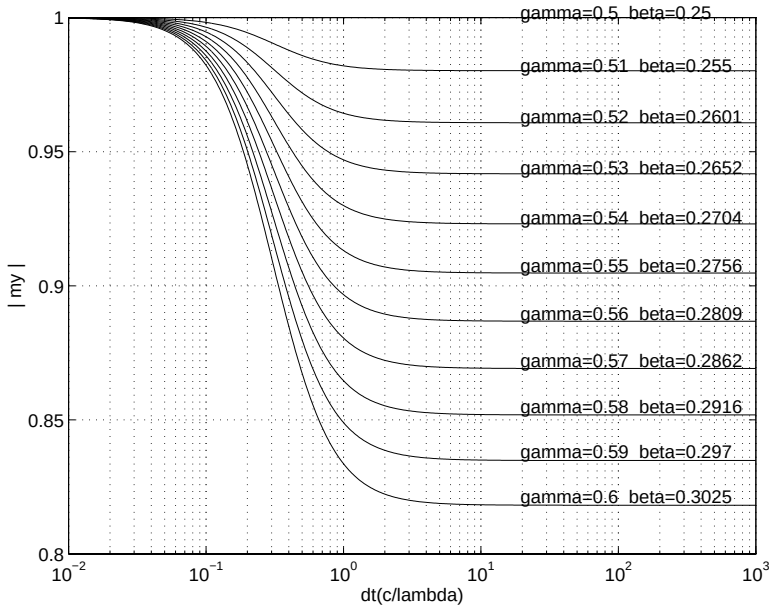
slik at kravene (4.30) til ubetinget stabilitet er oppfylt. I de viste eksemplene kan demping-



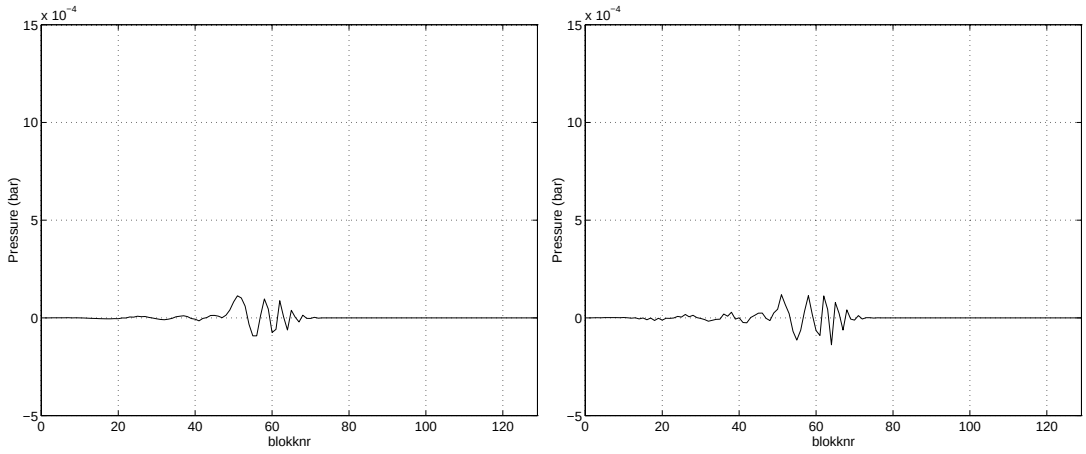
Figur 6.31: Variasjon av bølgekomponentenes relative amplitude $|\mu|$ med $c_m \Delta t / \lambda_m$ for $\gamma \in [0.25, 1.0]$.

en av komponentene sees å være en ulineær funksjon av bølgelengden for et gitt tidssteg, og fremtrer i figurene 6.31 og 6.32 som en «terskling» der γ og tilhørende β definerer terskelens asymptotiske «bratthet» og maksimum med hensyn på demping. Ettersom løsningen multipliseres med en faktor gitt ved $|\mu|$ for hvert tidssteg, vil hver frekvenskomponent dempes eksponensielt med den tilhørende $|\mu|$.

Zienkewics[69] nevner at skjemaer med numerisk dempingskarakteristikk som vist i figur 6.31 og 6.32 ofte kombineres med meget korte tidssteg, i størrelsesorden $c_m \Delta t / \lambda_m = 10^{-1}$, for å minimere dempingen av relevante bølgelengder. Dette krever riktignok svært mange tidssteg og derved tidkrevende simuleringer, men kan være aktuelt for løsninger med forholdsvis lange bølgelengder. Et eksempel på en slik teknikk anvendt på en impulsapproksimasjon er vist i figur 6.33. Dette og foregående eksempler viser at svært korte tidssteg resulterer i kraftig dispersjon, og teknikken gir derfor ikke gode resultater ved approksimasjon av bredspektrede, sammensatte bølgeløsninger.



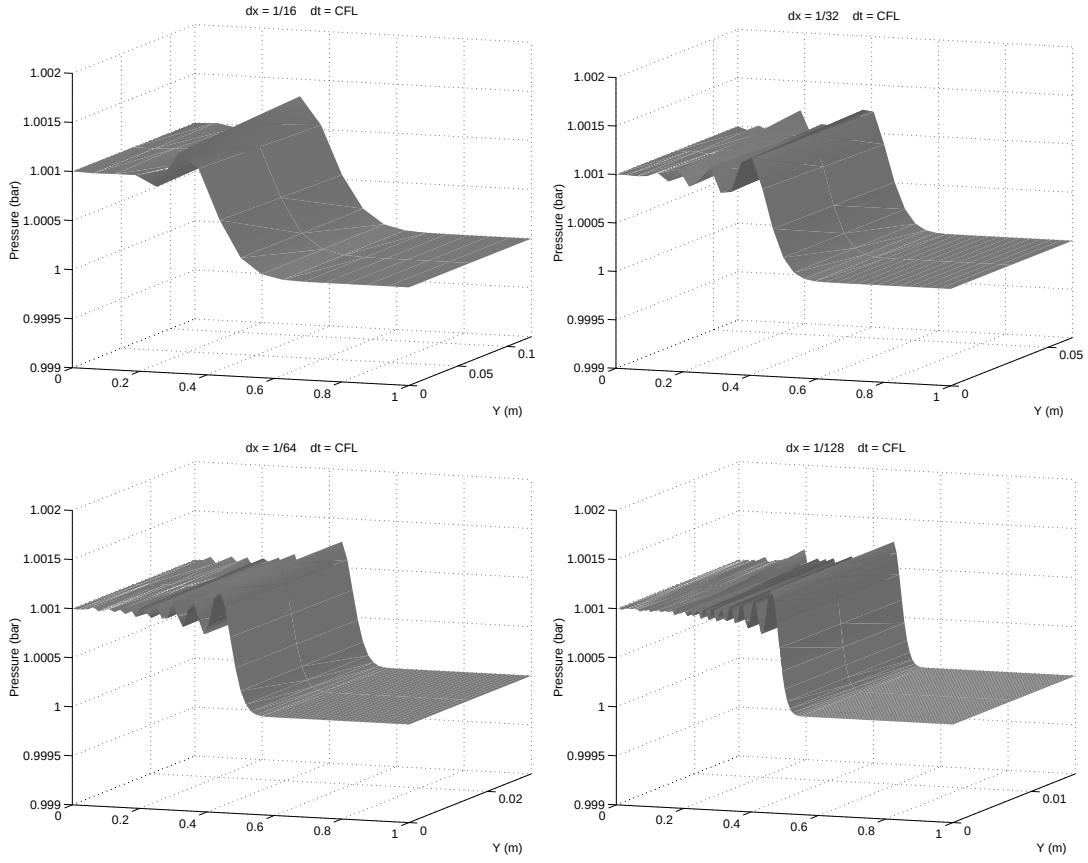
Figur 6.32: Variasjon av bølgekomponentenes relative amplitude $|\mu|$ med $c_m \Delta t/\lambda_m$ for $\gamma \in [0.5, 0.6]$. Merk forskjellen i skalering fra figuren over.



Figur 6.33: Impuls-responsen til et dempet, men ubetinget stabilt Newmark-skjema basert på parametrene $\gamma = 0.6$ og $\beta = 0.3025$, med tidssteg tilsvarende $\Delta t_{CFL}/10$ etter 500 tidssteg (venstre), og $\Delta t_{CFL}/20$ etter 1000 tidssteg (høyre).

6.5.3 Konvergens

Prinsippet om skalerbarhet i akustikken[54] sier at det for et hvert lineært akustisk system kan konstrueres et nytt lineært system av en annen størrelsesorden med tilsvarende egenskaper, forutsatt at lydens bølgelengde endres proporsjonalt med skaleringen. De fleste akustiske problemene i denne oppgaven er løst over et domene med karakteristisk størrelse på $1m$, men er fullt skalerbare. En samtidig forfining av beregningsgitteret i tid og rom kan derfor også betraktes som en relativ oppskalering av det akustiske domenet, med tilhørende oppskalering av frekvenskomponentenes bølgelengder. Fra seksjon 6.5, og spesielt avsnitt 6.5.2, kan det sees at dette vil øke nøyaktigheten, særlig ved approksimering av høyfrekvente bølgekomponenter. Dette sees også av bølgefronten i figur 6.34, som blir brattere ved finere beregningsgitter. Oscillasjonene bak bølgefronten, i det foregående vist å være resultat av numerisk dispersjon, blir også mer høyfrekvente.



Figur 6.34: Step-responsen til Newmark-skjemaet basert på parametrene *h)*, uten numerisk demping, med finere og finere beregningsgitter, og tilsvarende tidssteg Δt_{CFL} som tilfredsstiller *CFL*-betingelsen. Domenet er $1m$ langt i x-retning, diskretisert ved elementmetoden. Elementene er tetraedre gruppert i likesidete blokker, med dimensjon $h = 1/16m$ (øverst til venstre), $h = 1/32m$ (øverst til høyre), $h = 1/64m$ (nederst til venstre) og $h = 1/128m$ (nederst til høyre).

Kapittel 7

Testeksempel

Den numeriske metoden beskrevet i denne oppgaven er meget fleksibel, og kan tilpasses også svært avanserte problemstillinger. Komplekse geometrier er tidkrevende å diskretisere manuelt, og FRONTSIM (se seksjon 5.1) har et hjelpeverktøy i form av en preprosessor der beregningsgitteret kan bygges opp interaktivt. Spesifiserer da først x-, y- og z-dimensjonene til et «ytre» rektangulært domene, og oppdelingen i antall blokker i hver akseretning. Deretter kan større seksjoner «fjernes» fra domenet ved *dekopling* av de tilhørende elementenes lokalnoder fra beregningsgitteret, og randen justeres slik at elementene inngår som del av denne.

Elementmetoden tillater irregulære elementer, men har i tidligere kapitler vist at også ubetinget stabile metoder krever at tidsstegene avpasses til elementstørrelsen i det romlige beregningsnettet, for å minimere dispersjonen. Elementstørrelsen bør derfor være mest mulig homogen, med irregulære elementer forbeholdt eventuelle finjusteringer.

7.1 Diskretisering av et komplisert volum

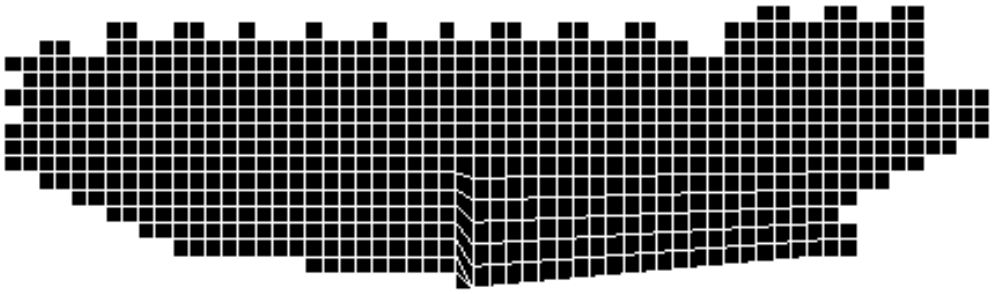
Tok utgangspunkt i et sett arkitekttegninger (se Appendiks 9.2) over Store Sal i Oslo Konserthus for å demonstrere en praktisk anvendelse av den numeriske metoden. Salens interne geometri er irregulær, men symmetrisk om lengdeaksen. Denne symmetrien kunne vært utnyttet dersom simuleringene var korte nok til å unngå spuriøse refleksjoner fra den eventuelle «kunstige» sentrerte randflaten, eller dersom betingelsene på denne randflaten kunne spesifiseres slik at flaten ikke reflekterte (se avsnittet om randbetingelser i seksjon 2.5). Randbetingelsene var i denne modellen gitt ved $\partial p/\partial \vec{n} = 0$, angitt i (4.2), som innebærer fullstendig reflekterende rand. Ønsket dessuten å kunne simulere over lange tidsintervaller, slik at oppbyggingen av stående bølger kunne studeres. Valgte derfor å la beregningsgitteret omfatte hele salens volum.

Største lengde, bredde og høyde i salen var henholdsvis $53.2m \times 45.8m \times 15.3m$. Nærmere undersøkelser av salens geometri viste at den i høy grad var basert på vertikale seksjoner med lengde $0.9m$, og av regularitetshensyn (se over) ble likesidete blokker med sidelengde $h = 0.9m$ funnet å gi en god representasjon. Brutto antall blokker for å omfatte hele volumet var dermed $59 \times 51 \times 17 = 51.153$, tilsvarende 56.160 noder. Blokker av denne størrelsesorden begrenset modelleringen til de tre nederste oktavene[1] av det hørbare spekteret, ettersom diskretiseringsfeilen øker når bølgekomponentene skal representeres med relativt

[1] 1 *oktav* angir et forhold mellom frekvenser på $1:2$.

få nodepunkter, som beskrevet i seksjon 6.5.2. En øvre grense kan f.eks. estimeres ved å ta utgangspunkt i frekvenskomponenter med bølgelengde $\lambda_{min} = 2h$, som er de korteste som kan representeres i beregningsgitteret (se seksjon 6.5.2). Ser av dette at den øvre grensen går ved $f_{max} = c/\lambda_{min} = 191Hz$, dersom fasehastigheten $c = 344m/s$. Et tilsvarende regnestykke viser at en halvering av blokkstørrelsen, med tilhørende $f_{max} = 382Hz$, ville økt brutto antall noder til 428.995, og en ytterligere halvering, med $f_{max} = 764Hz$, ville resultert i brutto $3.352.356$ noder. Valgte en blokkstørrelse på $0.9m$ i dette eksempelet for å holde prosesseringstiden nede (TSC har gjort forsøk med likningssystemer av størrelsesorden 10^6, men slike simuleringer er meget tid- og plasskrevende).

Ved hjelp av preprosessoren til FRONTSIM kunne beregningsgitteret tilpasses salens geometri. «Fjernet»først seksjoner av blokker fra beregningsgitteret interaktivt, slik at simulatoren under kjøringen ville dekople de tilhørende lokalnodene og justere randen, som beskrevet i innledningen til dette kapittelet. Antallet «aktive» blokker ble på den måten redusert til 28.387. Justerte til slutt hellingen på randflaten som tilsvarte det skrå gulvet med seter, kalt «parkett» på tegningene i appendiks 9.2, og interpolerte oppover i gitteret for å bevare regulariteten best mulig. Det resulterende beregningsgitteret kan sees av figurene 7.1, 7.2 og 7.3.



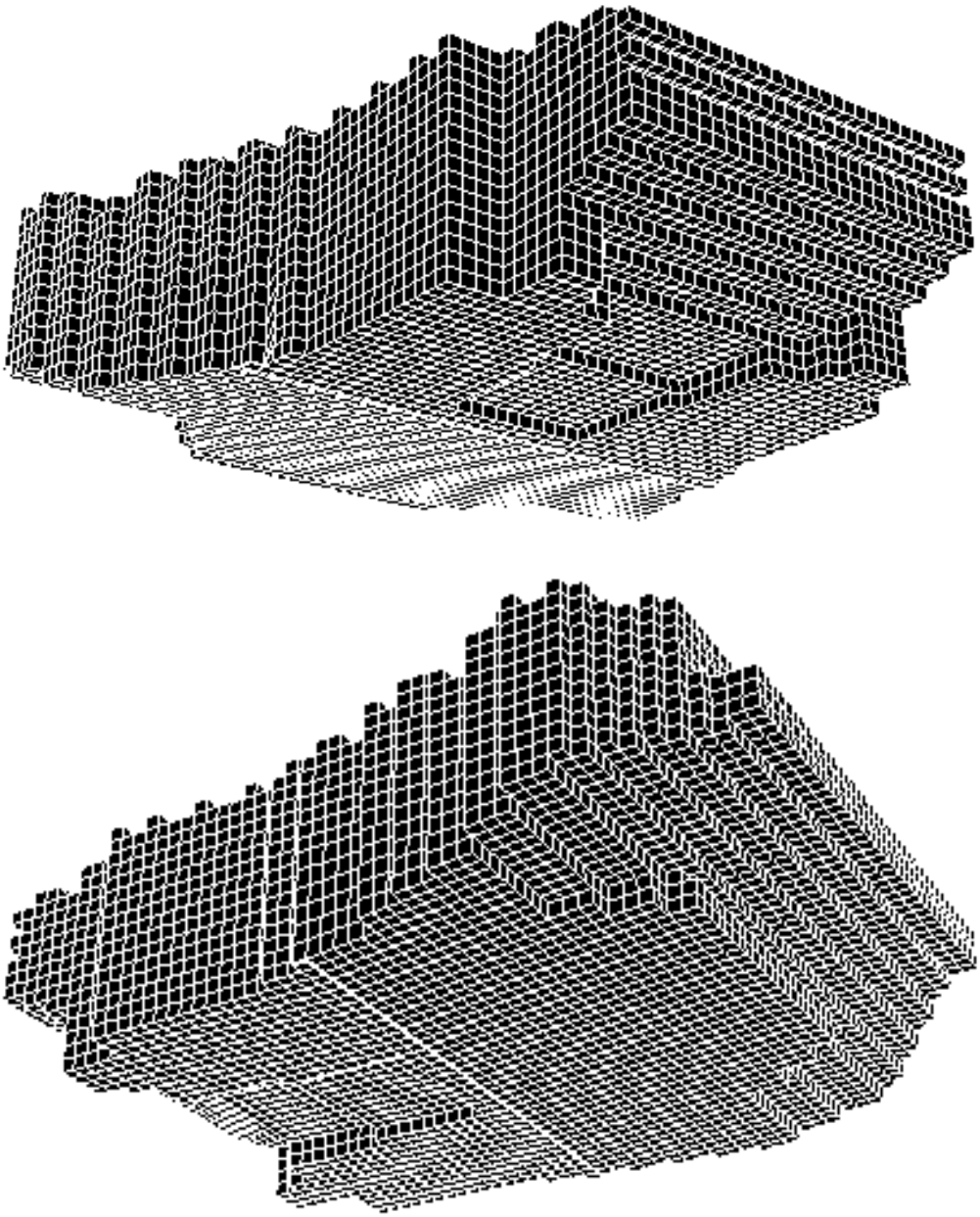
Figur 7.1: Lengdesnitt gjennom midten av beregningsgitteret for Konserthusets Store Sal.

7.2 Resultater og presentasjon

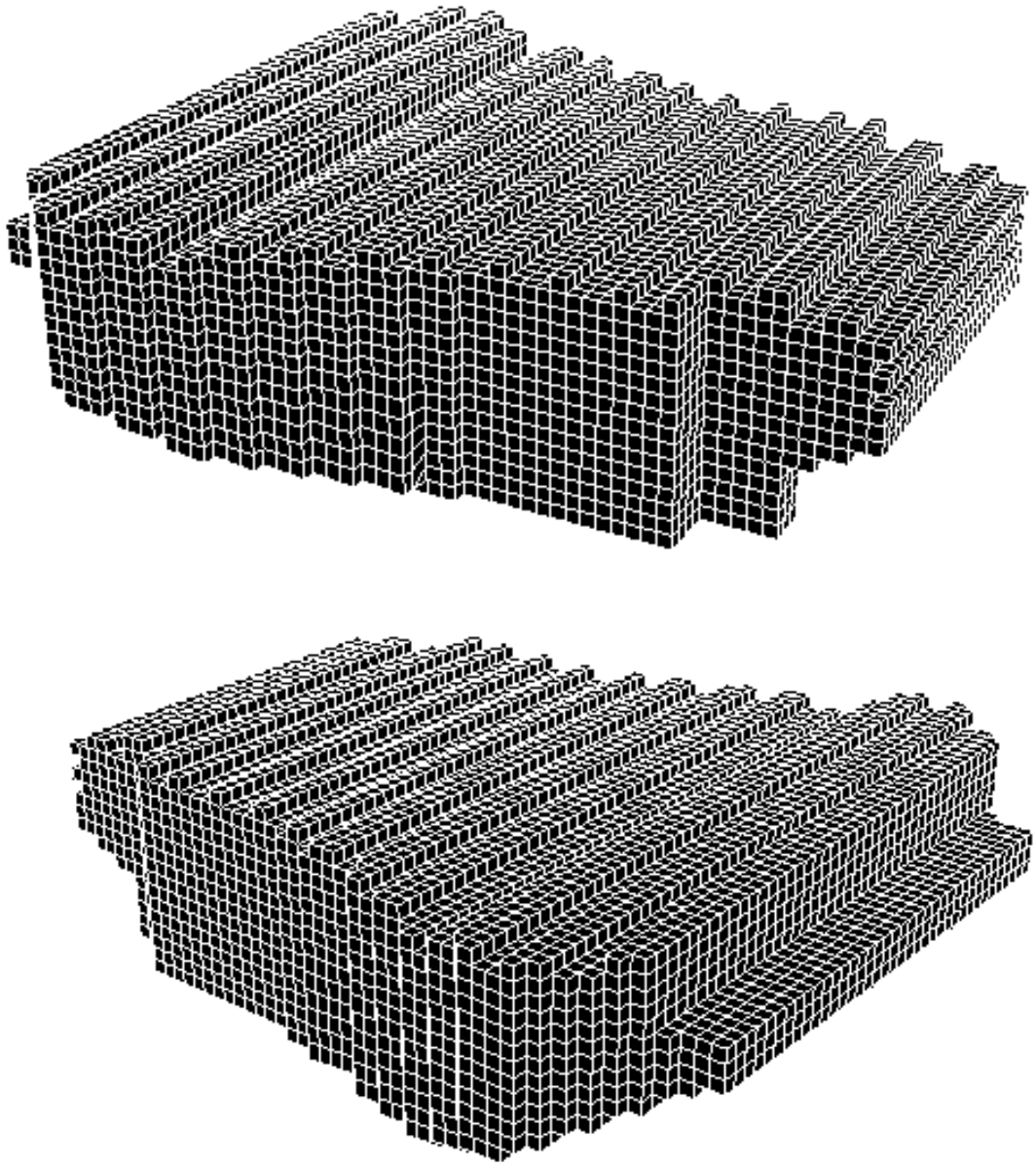
Visualisering av lydtrykksforløp i kompliserte tredimensjonale volumer krever gode verktøy. Har i denne oppgaven i all hovedsak anvendt MATLAB for dette formålet, men verktøyene her har klare begrensninger ved irregulære beregningsgittere med kompilserte render, som i dette eksempelet. Har derfor her valgt å benytte FRONTSIMs postprosessor, som kan plotte beregningsgitteret på blokkform og visualisere trykket over dette. Hele gitteret kan vises, som i figurene 7.2 og 7.3, men man kan også skille ut horisontale eller vertikale seksjoner, som i figur 7.1.

7.2.1 Impuls

Impulsfunksjonen (6.28) som drivende funksjon i en trykkilde gir løsninger som i fysisk forstand best kan sammenliknes med smellet fra f.eks. et pistolskudd. Ved visualiseringer



Figur 7.2: Beregningsgitteret for Konserthusets Store Sal sett nedenfra i ulike vinkler.



Figur 7.3: Beregningsgitteret for Konserthusets Store Sal sett ovenfra i ulike vinkler.

kan dette gi en klart definert og kortvarig bølgefront som kan forstås forholdsvis intuitivt. Det numeriske skjemaet anvendt ved løsing med hensyn på impulser var basert på parametrene $\gamma = 0.53$ og $\beta = 0.2652$, som i løsningen vist øverst til høyre i figur 6.30. Skjemaet kjennetegnes ved svak numerisk demping, og ble valgt for å dempe høyfrekvente oscillasjoner som skyldes numerisk dispersjon og støy. Gitt en Δt_{CFL} som tilfredsstiller *CFL*-betingelsen, svarte de valgte tidsstegene til $\Delta t_{CFL}/2$, for å maksimere nøyaktigheten.

Figur 7.4 viser noen resultater fra en simulering basert på en impuls fra en trykkilde, visualisert ved kotekurver over en horisontal seksjon av blokker. Seksjonen er valgt ca. $1.8m$ over gulvplanet, omtrent i hodehøyde for en stående person. Observerer at refleksjonene danner suksessivt mer kompliserte mønstre, og at tolkningen etterhvert blir svært krevende. Refleksjoner fra gulvflater med ulik høyde interfererer med refleksjoner fra de irregulære veggene, og etterhvert også taket. Eventuelle studier forutsetter dermed undersøkelse av en rekke plan og snitt, kombinert med hele volumet, som vist i figurene 7.5 og 7.6. Volumene gir bedre innblikk i trykkfordelingen over flere plan.

Observerer noe høyere fasehastighet langs en diagonal i gitteret i samtlige figurer basert på impulsfunksjonen. Dette er en numerisk feil knyttet til beregningsgitterets struktur, som beskrevet i seksjon 6.4.

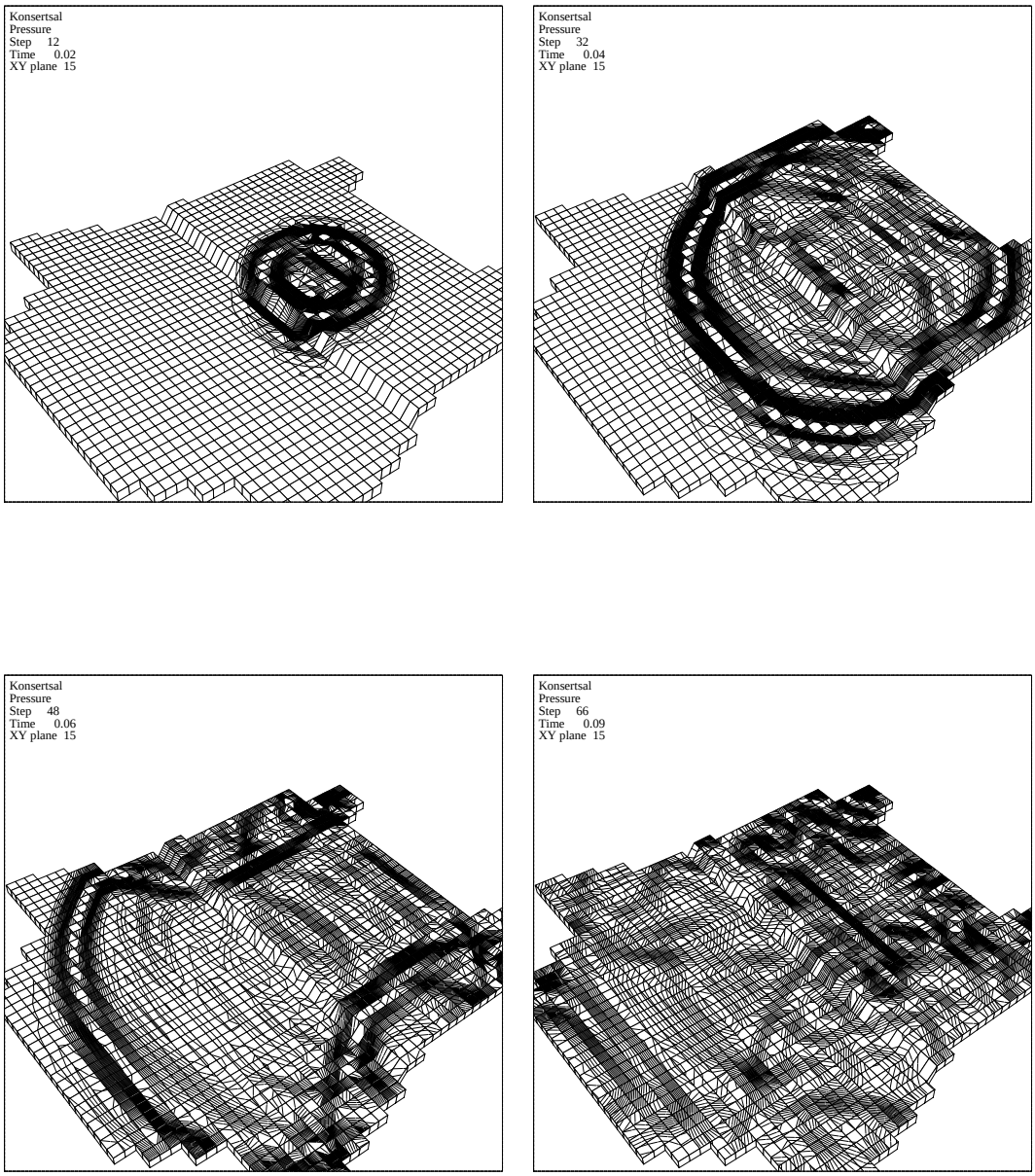
7.2.2 Lavfrekvent sinus

Lavfrekvente sinusoidale funksjoner som drivende funksjon i en trykkilde kan ved passende valg av kildeplassering og frekvens danne mønstre av stående bølger i volumet, som beskrevet i seksjonene 2.3 og 6.3.4. I et stort, irregulært volum som Store Sal vil bare meget lave frekvenser danne gjenkjennelige mønstre.

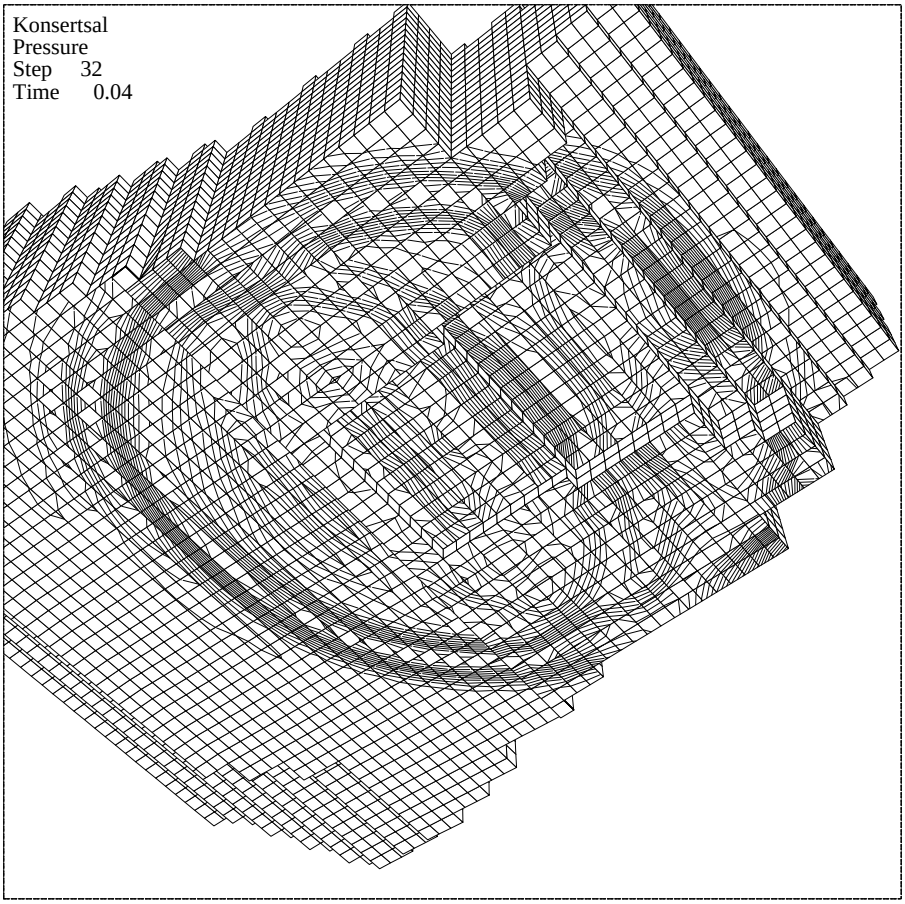
Benyttet igjen en tilnærming der kildenoden i fysisk forstand kan betraktes som en tenkt åpning mot et langt større volum der trykket varierer med tiden. Langs akseretningene vil de resulterende løsningene derfor være sammenliknbare med midterste rad («Åpent – Lukket») i figur 2.4. Valgte med dette utgangspunkt å benytte $11.9Hz$ sinus, som ved en passende kildeplassering på podiet skulle danne enkle mønstre. Frekvensen er under høregrensen, men multipler av denne kan også tenkes å danne mønstre av stående bølger.

Det numeriske skjemaet var som ved impulsløsningene over, men de valgte tidsstegene svarte til Δt_{CFL}, av hensyn til prosesseringstiden for så store simuleringer.

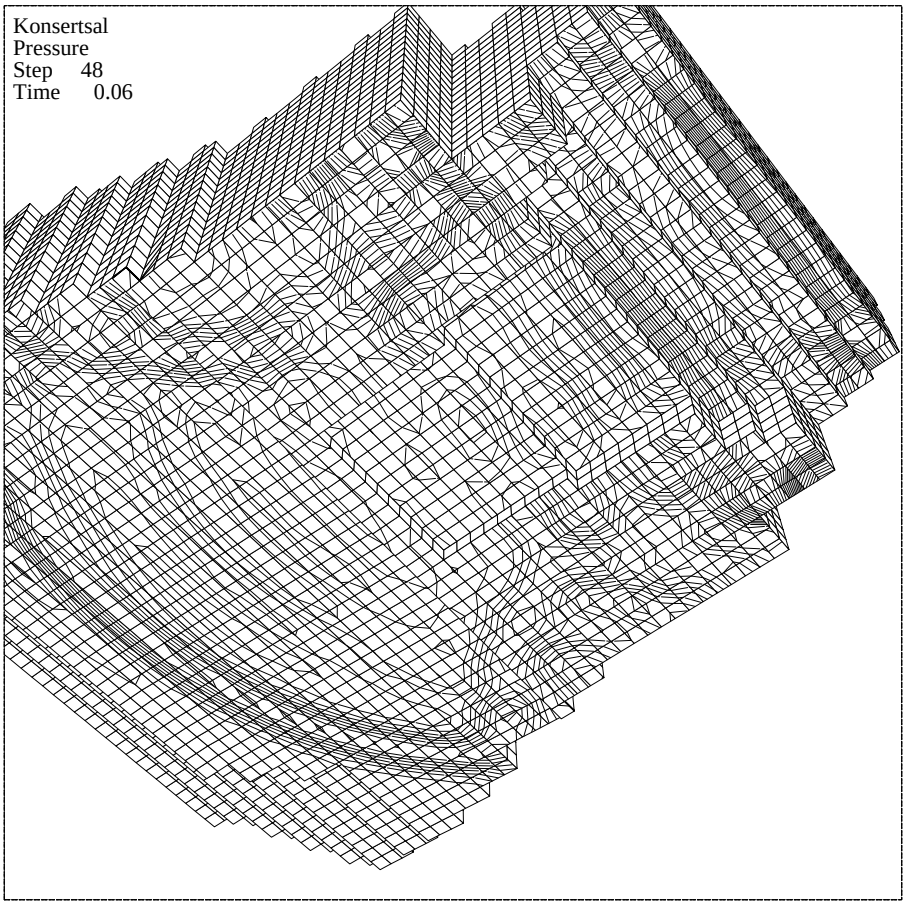
Figurene 7.7 og 7.8 viser suksessivt noen resultater fra en simulering basert på en en $11.9Hz$ sinus fra en 4-noders trykkilde, visualisert ved kotekurver over en horisontal seksjon av blokker. Seksjonen er igjen valgt ca. $1.8m$ over gulvplanet, og tidspunktene i figurene er valgt ut fra henholdsvis amplitudemaksima og -minima for den sinusoidale funksjonen i trykkilden. Kan observere dannelsen av mønstre av stående bølger, der mønstrene etterhvert gjentas periodisk med en frekvens som svarer til den drivende funksjonens. Volumene i figurene 7.9 og 7.10 gir et inntrykk av trykkfordelingen langs tak og gulv i salen, og viser hvordan de lavfrekvente stående bølgene danner tydelige mønstre uansett om volumet er irregulært. Figurene 7.9 og 7.10 kan også vises i farger, der fargene viser trykket i hver blokk, som angitt i en fargeskala på siden av figurene. Fargeutskriftene er vedlagt denne oppgaven.



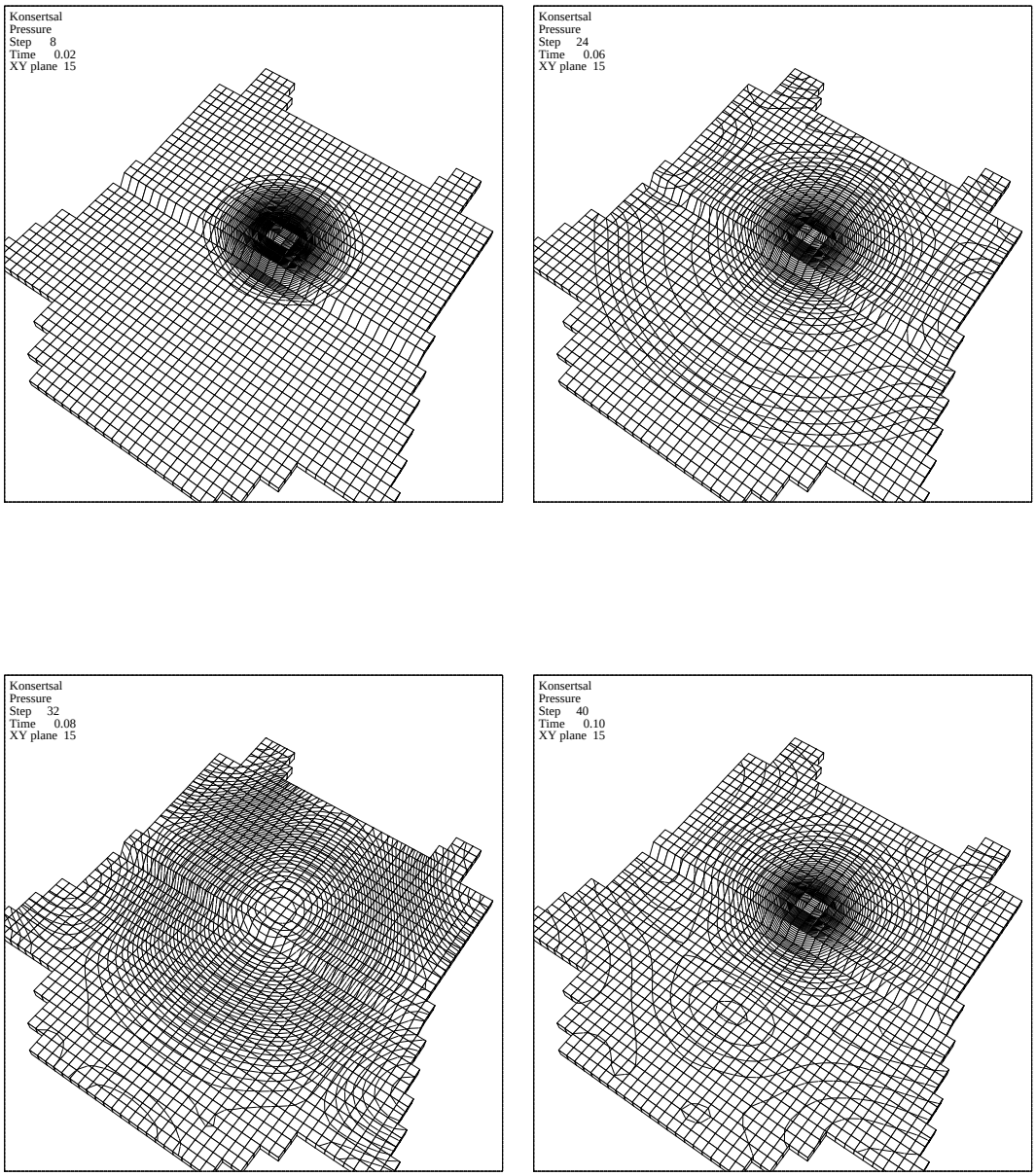
Figur 7.4: Kotekurver for akustisk trykk i et xy-snitt $1.8m$ over gulvet i Konsertsalen. Fire ulike tidspunkter, $t = 15.7ms$, $41.9ms$, $62.8ms$ og $86.3ms$ (fra venstre, øverst), etter en impuls fra en 2-noders trykkilde på podiet.



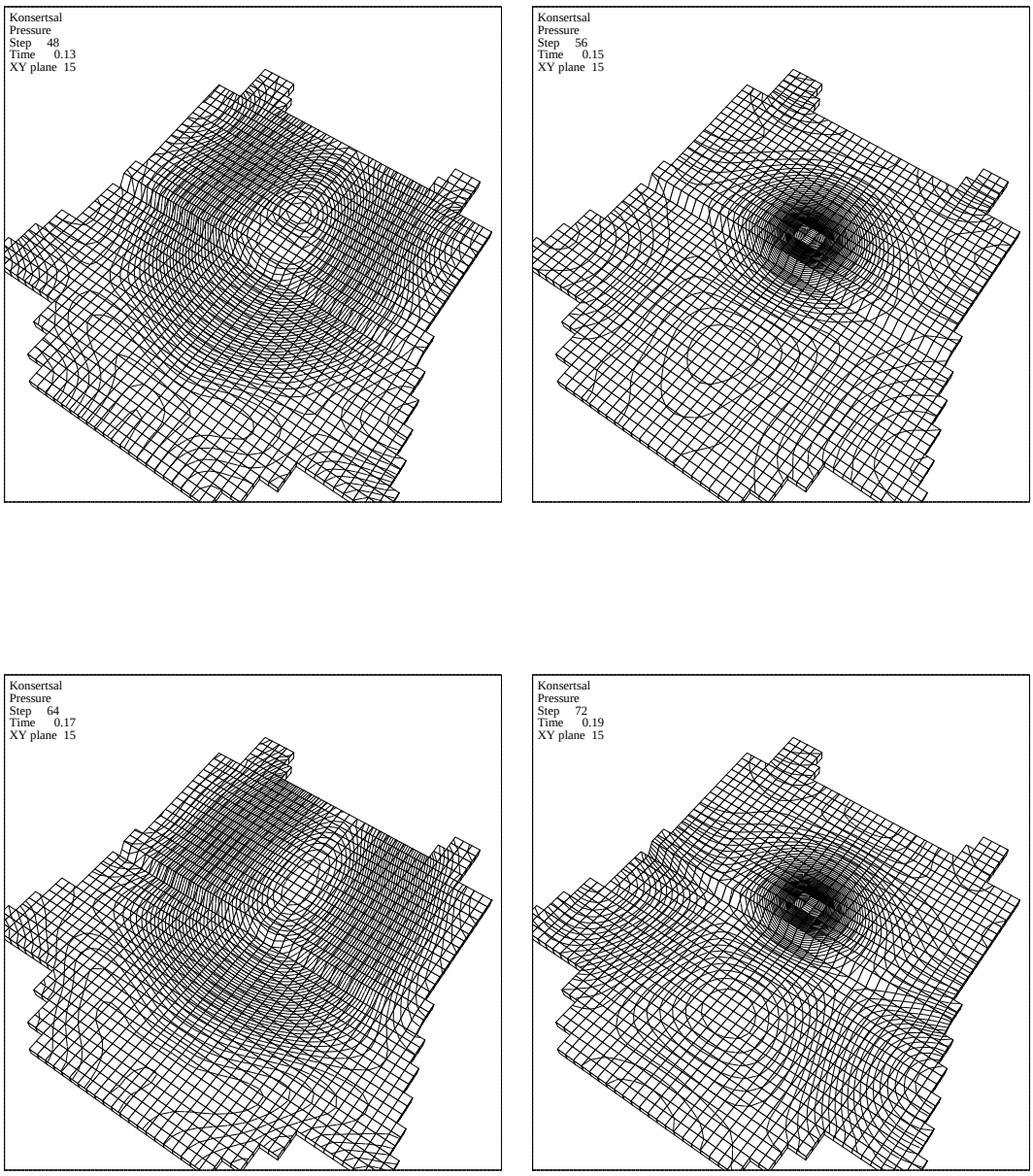
Figur 7.5: Kotekurver for akustisk trykk over gulvet i hele volumet av Konsertsalen, sett fra undersiden. Tidspunkt $t = 41.9ms$ etter en impuls fra en 2-noders trykkilde på podiet.



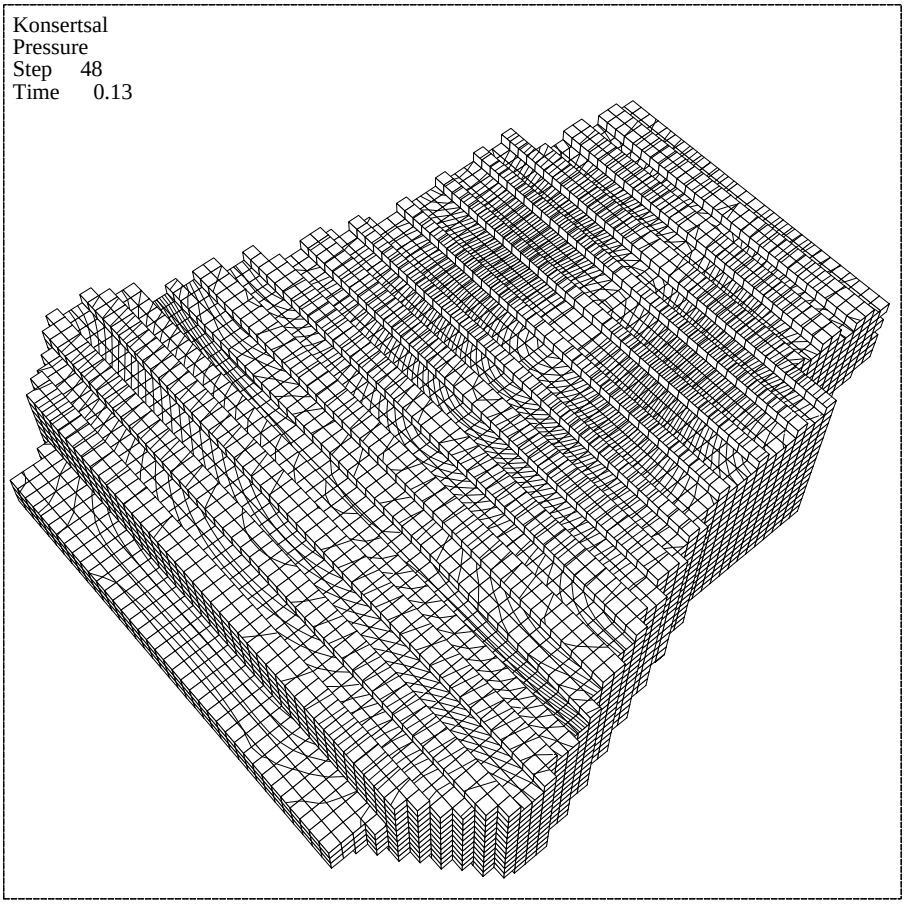
Figur 7.6: Som forrige figur, men i et tidspunkt $t = 62.8ms$ etter impulsen.



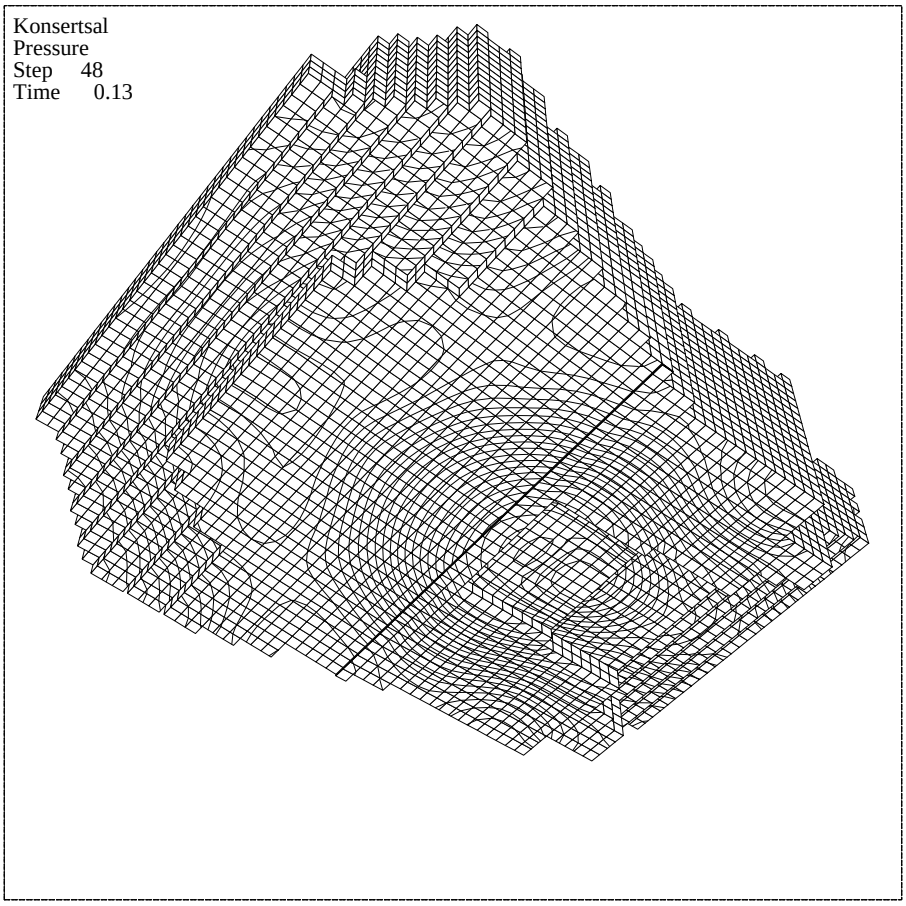
Figur 7.7: Kotekurver for akustisk trykk i et xy-snitt $1.8m$ over gulvet i Konsertsalen. Fire ulike tidspunkter, $t = 20.9ms, 62.8ms, 83.7ms$ og $104.6ms$ (fra venstre, øverst), med $11.9Hz$ sinus fra en 4-noders trykkilde på podiet.



Figur 7.8: Som forrige figur. Fire ulike tidspunkter, $t = 125.6ms$, $146.5ms$, $167.4ms$ og $188.4ms$ (fra venstre, øverst).



Figur 7.9: Kotekurver for akustisk trykk over gulvet i hele volumet av Konsertsalen, sett fra oversiden. Tidspunkt $t = 125.6ms$, med 11.9 Hz sinus fra en 4-noders trykkilde på podiet.



Figur 7.10: Som forrige figur, men sett fra undersiden.

Kapittel 8

Konklusjon

Bølgelikningen har mange potensielle anvendelser, og akustikk utgjør bare en liten del. Likevel er vitenskapen om lyd og lydbølger et omfattende fagfelt, som idag er solid teoretisk fundert. Ulike former for matematisk modellering får bred omtale i litteraturen, men studier av akustiske felter i væsker og gasser ved hjelp av elementmetoder er til nå forholdsvis lite utbredt. Publiserte arbeider er dessuten gjerne basert på akustiske problemstillinger som kan uttrykkes ved tidsinvariante elliptiske differensiallikninger. Denne oppgaven er tenkt å skulle legge et grunnlag for videre arbeid med utgangspunkt i den mer generelle tredimensjonale bølgelikningen, i den hensikt å gi bedre forståelse av akustiske egenskaper og fenomener, også i tidsdomenet.

8.1 Oppsummering

Har vist en rekke numeriske løsninger beregnet ved hjelp av et program som løser en diskretisert, lineær og homogen akustisk bølgelikning over et beregningsgitter som omfatter tre romdimensjoner og tid. Den diskretiserte likningen ble løst over luftvolumer med geometri av varierende kompleksitet, avgrenset av reflekterende randflater. Benyttet enkle numeriske kilder med både periodiske og diskontinuerlige drivende funksjoner.

En systematisk uttesting gav et fornuftig grunnlag for å vurdere metodens nøyaktighet. De numeriske løsningene ble i de fleste tilfeller vist å være rimelig konsistente i forhold til tilsvarende analytiske, og kvalitative rimelighetsvurderinger tyder på at løsningene også er konsistente ved mer kompliserte problemstillinger, uten at dette likevel kan ansees som bevist.

Høyfrekvente bølgekomponenter er mest krevende å behandle numerisk. Diskretiseringsfeilen ved høyere frekvenser vil typisk være større fordi bølgekomponentene skal representeres ved bruk av færre nodepunkter. Forfining av beregningsgitteret i tid og rom kan øke nøyaktigheten, med en orden som avhenger av interpolasjonens orden. I denne oppgaven økte nøyaktigheten i testeksemplene med lavere orden enn teorien skulle tilsi. Dette kan ha sammenheng med de valgte initialbetingelsene, samt simulatorens nøyaktighet ved generering av startvektorene.

Nøyaktighet ved approksimering av diskontinuerlige bølgefunksjoner krever begrenset bruk av numerisk demping, for å unngå at bølgefronten «smøres» utover for hvert tidssteg.

Observerte en noe usymmetrisk numerisk transporthastighet i beregningsgitteret, trolig knyttet til gitterets struktur, som preges av en usymmetrisk diagonal kopling mellom

nodene.

Den valgte metoden for tidsdiskretisering gav implisitte skjemaer med parameterrelatert stabilitet, nøyaktighet og numerisk demping. Transientanalyser, basert på step- og impulsfunksjoner, gav i mange tilfeller en nyttig karakterisering av de ulike skjemaenes egenskaper. Karakteriseringen kunne danne grunnlag for valg av parametre tilpasset en gitt problemstilling.

Resultatene gav ikke grunnlag for å foretrekke betinget stabile skjemaer i implementasjonen relatert til denne oppgaven. En eksplisitt form kunne gitt en effektivitetsgevinst, men testingen av de betinget stabile implisitte skjemaene tydet på at de krevde kortere tidssteg enn effektivitets- og nøyaktighetsmessig optimalt.

Ubetinget stabilitet kan i praksis være en stor fordel dersom rom-diskretiseringen er irregulær, men tidsstegene bør uansett avpasses til elementstørrelsen for å minimere den numeriske dispersjonen. Beregningsgitteret bør av samme årsak være mest mulig homogent, med irregulære elementer forbeholdt nødvendige finjusteringer.

8.2 Videre arbeid

Denne oppgaven har status av å være et forarbeid med hensyn på en eventuell utvidelse av TSCs programpakke, slik at den også kan omfatte modellering av akustiske problemstillinger. Implementasjonene relatert til denne oppgaven ble således basert på et minimum av globale endringer i pakken, og tok utgangspunkt i allerede eksisterende pre- og postprosesseringsverktøy. Nyere versjoner legger vilkårene bedre til rette for mer avansert modellering, men eventuelle spesielt tilpassede applikasjoner kan utvide mulighetene ytterligere.

I særdeleshet bør det nevnes at dagens versjon av simulatoren tillater flere variable i hvert nodepunkt. Dette innebærer at bølgelikningen kan løses som et system av førsteordens likninger, eventuelt basert direkte på bevegelses- og kontinuitetslikningene, slik at kjente stabile og nøyaktige metoder kan anvendes. Løsninger basert på et slikt system kunne gitt både trykket og hastighetsvektoren i alle nodepunkter, og derved kunne også *intensitet* og akustisk *impedans* visualiseres.

En simulator basert på en eventuell diskretisering av en *inhomogen* bølgelikning ville gjort det mulig å modellere *energitransport*, og hadde derved åpnet for mer avanserte kilder og randbetingelser, inklusive *absorpsjon*.

Det kan til slutt nevnes at det kunne vært hensiktsmessig å tillate visualisering av løsningenes amplitude uttrykt i *desibel* (dB), som er mye anvendt i akustikken. Eventuelle sammenlikninger med reelle måleresultater, ofte gitt i desibel, vil kunne danne bedre grunnlag for vurderinger vedrørende metodens fysiske relevans.

Referanser

[1] H. Anton. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Son, fifth edition, 1987.

[2] R.J. Astley and A. Cummings. A finite element scheme for acoustic transmission through the walls of rectangular ducts. *J. Sound Vib.*, 92(3), 1984.

[3] K.J. Bathe and E.L. Wilson. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1976.

[4] L.L. Beranek. *Acoustics*. Acoust. Soc. Am., unabridged republ. of 1954 edition, 1993.

[5] P. Bettess. Infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11:53–64, 1977.

[6] J. Borish. Extension of the image model to arbitrary polyhedra. *J. Acoust. Soc. Am.*, 75(6):1827–1836, 1984.

[7] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Springer Verlag, New York, USA, 1989.

[8] P. Butzer and R. Nessel. *Fourier Analysis and Approximation*. Academic Press, New York, NY, USA, 1971. (pp. 310-315).

[9] C. Canuto et al. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, New York, USA, 1988.

[10] R.D. Cook. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley, 1981.

[11] A. Craggs. The use of simple three-dimensional acoustic finite elements for determining the natural modes and frequencies of complex shaped enclosures. *J. Sound Vib.*, 23:331–339, 1972.

[12] A. Craggs. A finite element method for damped acoustic systems: An application to evaluate the performance of reactive mufflers. *J. Sound Vib.*, 48:377–392, 1976.

[13] A. Craggs. A finite element method for modelling dissipative mufflers with a locally reactive lining. *J. Sound Vib.*, 54:285–296, 1977.

[14] A. Craggs. A finite element method for rigid porous materials. *J. Sound Vib.*, 61:101–111, 1978.

[15] A. Craggs. Coupling of finite element acoustic absorption models. *J. Sound Vib.*, 66:605–613, 1979.

[16] A. Craggs. The application of acoustic and absorption finite elements to sound fields in small enclosures. In M.M. Kamal and J.A. Wolf, Jr, editors, *Finite Element Applications in Acoustics*, New York, NY, USA, 1981. The Vibrations and Sound Commitee of The Design Engineering Division, The American Society of Mechanical Engineers.

[17] T. Dupont and R. Scott. Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. *Math. Comp.*, 34:441–463, 1980.

[18] C.F. Eyring. Reverberation time in 'dead' rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1(2), 1930.

[19] D.A. French. A space-time finite element method for the wave equation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 107:145–157, 1993.

[20] S. Gade. Sound intensity (part 1 theory). In *Technical Review*, number 3. Brüel & Kjær, Denmark, 1982.

[21] E.R. Geddes. *An Analysis of the Low Frequency Sound Field in Non-Rectangular Enclosures Using the Finite Element Method*. PhD thesis, Pennsylvania State University, Philadelphia, USA, 1982.

[22] E.R. Geddes, J. Porter, and Y. Tang. A boundary-element approach to finite-element radiation problems. *J. Audio Eng. Soc.*, 35(4):211–229, April 1987.

[23] B.M. Gibbs and D.K. Jones. A simple image method for calculating the distribution of sound pressure levels within an enclosure. *Acustica*, 26:24–32, 1972.

[24] D. Gottlieb and S.A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. SIAM, Philadelphia, USA, 1977.

[25] R.C. Heyser. Determination of loudspeaker signal arrival times, part III (Appendix). *J. Audio Eng. Soc.*, 19(11):902–905, December 1971.

[26] R.C. Heyser. Instantaneous intensity. The 81st Convention, Los Angeles, CA, USA, November 1986. Audio Eng. Soc. Preprint 2399 (E-9).

[27] T.J.R. Hughes and G.M. Hulbert. Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 66:339–363, 1988.

[28] J.T. Hunt, M.R. Knittel, and D. Barach. Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 55(2), 1974.

[29] B.M. Irons and S. Ahmad. *Techniques of Finite Elements*. Ellis Horwood, Chichester, 1979.

[30] P.C. Janse and A.J.M. Kaizer. The Wigner distribution: A valuable tool for investigating transient distortion. *J. Audio Eng. Soc.*, 32:868–882, Nov. 1984.

[31] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Studentlitteratur, Lund, 1987.

[32] C. Johnson, U. Nävert, and J. Pitkaranta. Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 45:285–312, 1984.

[33] C. Johnson and J. Pitkaranta. An analysis of the discontinous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Math. Comp.*, 46:1–26, 1986.

[34] Y. Kagawa. Tokyo: Sanpo. On the computer simulation of acoustic fields. *Electronics Science*, 24:90–100, 1974.

[35] Y. Kagawa and T. Omote. Finite element simulation of acoustic filters with variable circular cross-section. In *FASE 75*, pages 363–371, Paris, France, September-October 1975. Premier Congrès Européen D'Acoustique.

[36] Y. Kagawa and T. Omote. Finite element simulation of acoustic filters of arbitrary profile with circular cross-section. *J. Acoust. Soc. Am.*, 60:1003–1013, 1976.

[37] Y. Kagawa, T. Yamabuchi, and A. Mori. Finite element simulation of an axisymmetric acoustic transmission system with a sound absorbing wall. *J. Sound Vib.*, 53(3):357–374, 1977.

[38] Y. Kagawa, T. Yamabuchi, and T. Shindo. A finite element approach to a coupled structural-acoustic radiation system with application to loudspeaker characteristic calculation. *J. Sound Vib.*, 69:229–243, 1980.

[39] A.J.M. Kaizer. Theory and numerical calculation of the vibrations and sound radiation of cone and dome loudspeakers with nonrigid diaphragms. *J. Audio Eng. Soc. (Abstracts)*, 27:420, May 1979. Presented at the 62nd Convention of the Audio Eng. Soc., Preprint 1437.

[40] L.E. Kinsler, A.R. Frey, et al. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, third edition, 1982.

[41] U.R. Kristiansen and T.F. Johansen. Finite element model for axisymmetric acoustic sources. Technical Report 408509, Institutt for Teleteknikk, UiT, Trondheim, Nov. 1985.

[42] F.F. Kuo. *Network Analysis and Synthesis*. John Wiley & Sons, second edition, 1966.

[43] H.P. Langtangen and A. Tveito. Numeriske metoder for kontinuumsmekanikk. Kompendium, SI/SINTEF, Oslo, January 1991.

[44] R.B. Lindsay. (. . .). *J. Acoust. Soc. Am.*, 36:2242, 1964.

[45] J.A. Mann, III, J. Tichy, and A.J. Romano. Instantaneous and time-averaged energy transfer in acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 82(1):17–30, 1987.

[46] J.R. Milner and J. Bernhard. An investigation of the modal characteristics of non-rectangular reverberation rooms. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(2):772–779, February 1989.

[47] S. Morita, N. Kyono, and S. Sakai. Acoustic radiation of a horn loudspeaker by the finite-element method – a consideration of the acoustic characteristic of horns. *J. Audio Eng. Soc.*, 28, 1980.

[48] P.M. Morse. *Vibration and Sound*. American Institute of Physics, Acoust. Soc. Am. republ. of 1936 edition, 1976.

[49] P.M. Morse and R.H. Bolt. Sound waves in rooms. *Review of Modern Physics*, 16:69–150, 1944.

[50] P.M. Morse and K.U. Ingard. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, 1968.

[51] N.M. Newmark. A method for computation of structural dynamics. *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 85:67–94, 1959.

[52] T. Nimura et al. Study of the cone type dynamic loudspeakers. *J. Acoust. Soc. Jpn.*, 7, 1951.

[53] O. Øgrim and B.E. Lian. *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*. Universitetsforlaget/Norges Standardiseringsforbund, 1984.

[54] H.F. Olson. *Acoustical Engineering*. Professional Audio Journals, Inc., Philadelphia, Penn., USA, unabridged republ. of 1957 Van Nostrand edition, 1991.

[55] A.A. Osipov and I.A. Shirkouskii. Finite-element calculation of sound fields radiated from the open end of an axisymmetric duct. *Soviet Physics Acoustics*, 30(4), 1984.

[56] E. Priolo, J.M. Carcione, and G. Seriani. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95:681–693, 1994.

[57] L. Råde and B. Westergren. *BETA - Mathematics Handbook*. Studentlitteratur (and Chartwell-Bratt Ltd.), Lund, Sweden, second edition, 1990.

[58] W.C. Sabine. *Collected Papers in Acoustics*. Dover, New York, USA, republ. of 1922 edition, 1964.

[59] S. Sakai, Y. Kagawa, and T. Yamabuchi. Acoustic field in an enclosure and its effects on sound pressure responses of a loudspeaker. *J. Audio Eng. Soc.*, 32:218–227, April 1984.

[60] I.C. Shepherd and R.T. Alfredson. An improved computer model of direct-radiator loudspeakers. *J. Audio Eng. Soc.*, 33:322–329, May 1985.

[61] T. Shuku and K. Ishihara. The analysis of the acoustic field in irregularly shaped rooms by the finite element method. *J. Sound Vib.*, 29:67–76, 1973.

[62] Swenker. Berenkening van het strailingsveld van luidsprekers met behulp van de eindige elementen. Master's thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1982.

[63] K. Tanada and A. Matsuda. On the vibrational analysis of dome-type loudspeakers by the finite-element method. *J. Audio Eng. Soc. (Abstracts)*, 26:574, July/Aug. 1978. Presented at the 60th Convention of the Audio Eng. Soc., Preprint 1346.

[64] D. van Maercke and J. Martin. The prediction of echograms and impulse responses within the Epidaure software. *Appl. Acoust.*, 38:93–114, 1993.

[65] R.V. Waterhouse. Interference patterns in reverberant sound fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 27(2), 1955.

[66] R.V. Waterhouse. Output of a sound source in a reverberation chamber and other reflecting environments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 30(1), 1958.

[67] C.J. Young and M.J. Crocker. Prediction of transmission loss in mufflers by the finite element method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57:144–148, 1975.

[68] O.C. Zienkiewics. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1977.

[69] O.C. Zienkiewics and K. Morgan. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley & Sons, 1983.

Kapittel 9

Appendiks

9.1 Notasjon

For å unngå altfor komplisert indeksering og obskure norske og greske bokstaver har jeg hovedsakelig bestrevet konsistent notasjon bare innenfor hvert kapittel. Ettersom kapitlene omhandler relativt selvstendige problemstillinger, tror jeg ikke det skulle oppstå uklarheter. Har dessuten forsøkt å følge internasjonale standardiseringsregler[53] for størrelser og enheter.

9.1.1 Notasjon, kapittel 3

Notasjon	Beskrivelse	SI-enhet
p_0	Likevektstrykk	Pa
p'	Trykkperturbasjon	Pa
$p = p_0 + p'$	Instantant trykk/totaltrykk	Pa
ρ_0	Likevektstetthet	kg/m^3
ρ'	Tetthetperturbasjon	kg/m^3
$\rho = \rho_0 + \rho'$	Instantant tetthet/totaltetthet	kg/m^3
$\mathbf{U} = (u, v, w)$	Hastighetskomponenter i (x, y, z)-retning	m/s
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Enhetsvektorer i (x, y, z)-retning	
T	Temperatur	K
K	Adiabatisk kompresjonsmodul	Pa
s	Kondensasjon	kg/m^3
c	Fasehastighet/lydhastighet	m/s

9.1.2 Notasjon, kapittel 4

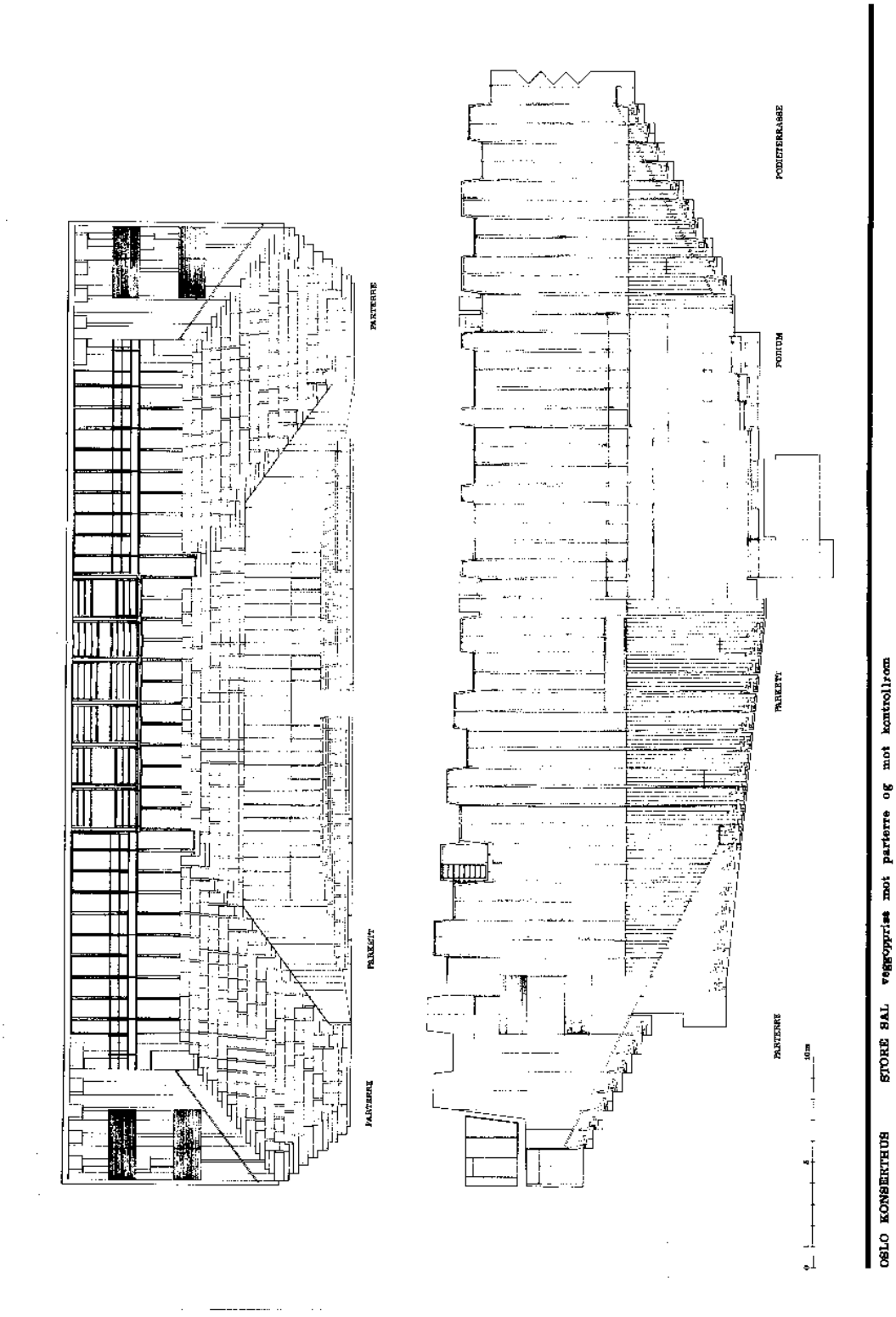
Notasjon	Beskrivelse
Ω	3D-domene i Euklidsk rom
Γ	Randflate som avgrenser Ω
$\mathcal{I}$	Tidsdomenet $(0, T]$
Θ	Rom-tids-domenet $\Omega \times \mathcal{I}$
Σ	Randflate som avgrenser Θ
K	Tetraederelement
T_h	Mengden av alle K
x, y, z	Romkoordinater
t	Tidskoordinat
Δt	Tidsintervall
c	Fasehastighet/lydhastighet
V, W	Testfunksjoner
$U(x, y, z, t)$	Funksjon som tilfredsstiller bølgelikningen
U_h	Diskretisert U
h	Elementets karakteristiske størrelse
D	Determinant
d_{ij}	Subdeterminant
φ_i	Basisfunksjon over node i
$\mathbf{M}$	Global massematrise
$\mathbf{S}$	Global stivhetsmatrise
$\mathbf{M}^K$	Massematrisen til elementet K
$\mathbf{S}^K$	Stivhetsmatrisen til elementet K
ξ_i	Koeffisient — verdien av U_h i node i
β, γ	Parametre til Newmarks skjema
ω	Egenverdi
λ	Egenvektor

9.1.3 Notasjon, kapittel 6

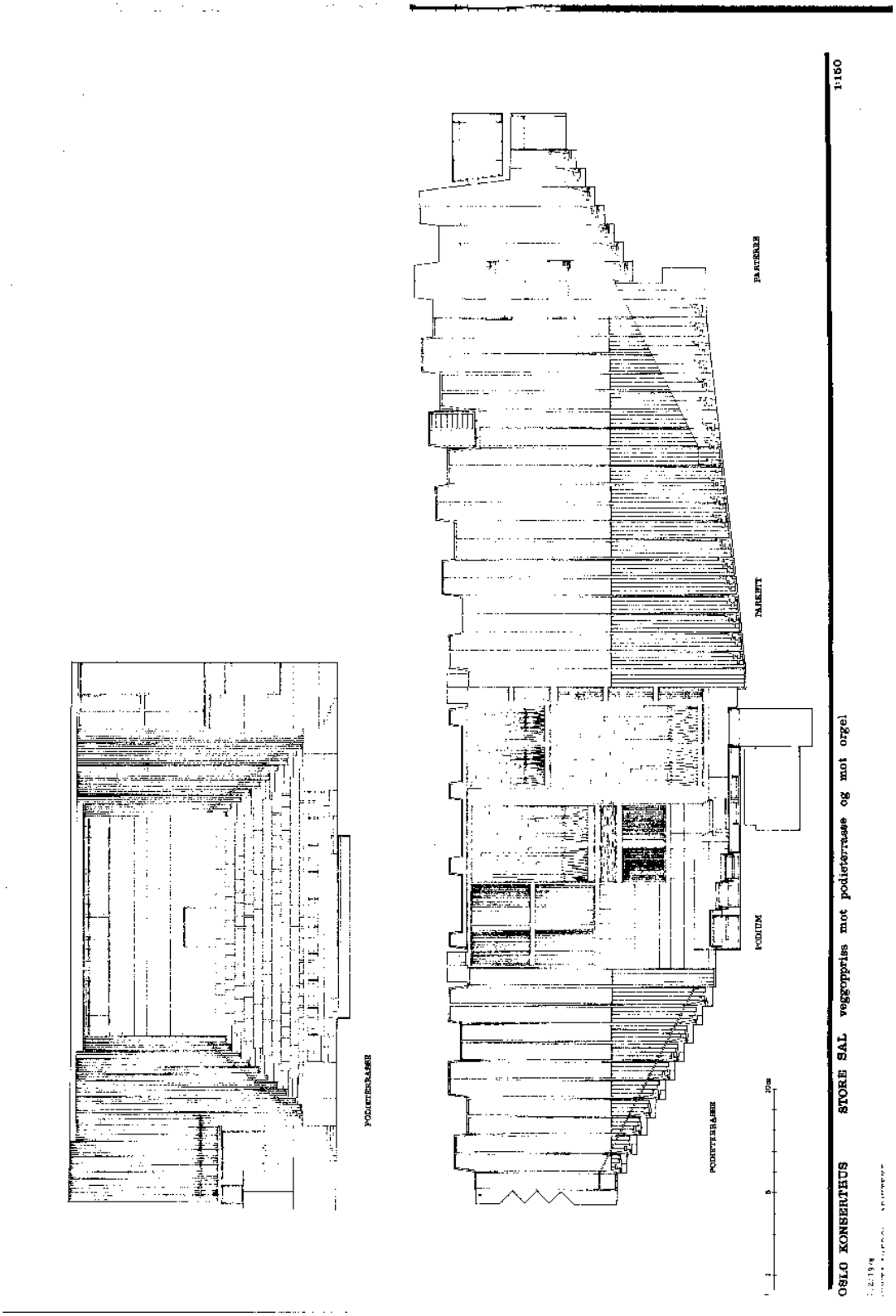
Notasjon	Beskrivelse
x, y, z	Romkoordinater
t	Tidskoordinat
Δt	Tidsintervall
r	Radien i sfæriske og sylindriske koordinater
c	Fasehastighet/lydhastighet
h	Elementets karakteristiske størrelse
L	Domenets lengde
L_x, L_y, L_z	Domenets lengde i hhv. x-, y- og z-retning,
$U(x, y, z, t)$	Funksjon som tilfredsstiller bølgelikningen
U_h	Diskretisert U
u	Partikkelhastighet, analytisk
p	Akustisk trykk, analytisk
p_Δ	Akustisk trykk, numerisk
p_{ref}	Referansetrykk
ρ	Tetthet, analytisk
β, γ	Parametre til Newmarks skjema
A, B	Amplitude (komplekse konstanter)
μ	Relativ amplitude (kompleks)
f	Frekvens
T	Periode
ω	Vinkelfrekvens
λ	Bølgelengde
k	Bølgetall
n_T	Antall tidssteg i en periode
N	Antall blokker i domenets x-retning

9.2 Konserthusets Store Sal

Figurene 9.1 og 9.2 viser arkitekttegningene som beregningsgitteret i seksjon 7.1 er basert på.



Figur 9.1: Konserthusets Store Sal



Figur 9.2: Konserthusets Store Sal