

Normal oppdeling og produkt av endelige simplisielle mengder

UiO • **Universitetet i Oslo**



Rune Vegard S. Fjellbo
Masteroppgave for graden *Master i matematikk*
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet, februar 2012

Forord

Våren 2009 drev jeg med en prosjektoppgave om samme tema som for denne masteroppgaven, men i en mindre generell kontekst. Da John spurte meg om jeg kunne tenke meg å jobbe videre med problemstillingen ble jeg fristet, mye fordi ett av delproblemene var av en slik art at jeg kunne begynne å jobbe med det uten å sette meg inn i mye nytt materiale. Hele løsningen involverer imidlertid en del kunnskaper om simplisielle mengder, om nerver og klassifiseringsrom til små kategorier, teori for simple avbildninger og ikke minst den reduserte avbildningssylinderen konstruert i [WJR08]. Jeg har studert avbildningen

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

fra den normale oppdelingen av produktet av to endelige simplisielle mengder X og Y til produktet av oppdelingene med tanke på å avgjøre om det er riktig at når en går over til topologiske rom, så er punktinversene kontraktible. Hvis en ser på tilfellet der $X = \Delta[m]$ og $Y = \Delta[n]$ er standardsimplekser kan fiberen over barysenteret $([m] \xrightarrow{1} [m], [n] \xrightarrow{1} [n])$ sees på som klassifiseringsrommet til den partielt ordnede mengden bestående av de kjedene i gitteret

$$\{0 < 1 < \dots < m\} \times \{0 < 1 < \dots < n\}$$

som inneholder et punkt i hver kolonne og hver rad. Før sommeren i fjor brukte jeg denne trianguleringen sammen med datamaskinen min til å regne ut Eulerkarakteristikken for lave m og n . Håpet var selvsagt at svaret ville bli 1 og resultatet var betryggende.

Forhåpentligvis kommer resultatet fra denne masteroppgaven til nytte og jeg håper at alle som måtte være interessert i denne teksten finner den leselig.

Jeg har brukt denne anledningen som arbeidet med masteroppgaven har vært til å forsøke å utvide mitt eget norsk-matematiske ordforråd og har samtidig slått et slag for den kulturpolitiske målsetningen om å holde ved like og videreutvikle norsk fagspråk ved å produsere ny kunnskap på morsmålet. Det er noe tilfredsstillende ved det å slippe å gå over til et fremmed språk for å forklare hva en mener. To låneord fra engelsk fagspråk forekommer imidlertid, nemlig *pullback* og *pushout*. Jeg er klar over at noen bruker ordet *tilbaketrekning* som norsk versjon av begrepet pullback. Hvis en velger å benytte seg av dette kunne det kanskje passe å bruke ordet *fremstøt* eller liknende for begrepet pushout. Jeg fikk også et forslag om å bruke begrepet *kartesisk produkt* som erstatning for pullback, og i så fall kunne en ha brukt *kokartesisk produkt* i betydningen pushout, men disse har uforholdsmessig mange stavelser (henholdsvis fem og seks). I disse to

tilfellene har kulturpolitikk måttet vike for leselighet, men jeg håper at begge begreper får norske betegnelser i utstrakt bruk i fremtiden.

Først og fremst vil jeg rette en takk til veilederen min, John Rognes, for muligheten til å jobbe med dette prosjektet, for ideer og for de mange veiledningstimene. Takk til Ph.D.-studentene Knut og Sigurd for hyggelig gangfelleskap og for henholdsvis korrekturlesing og tips og triks om bruk av \LaTeX . Takk til matematikklæreren min på videregående, Jan Amund, for et utviklende læringsmiljø og for å fyre opp under matematikkinteressen min. Masteroppgaven tilegnes Ingunn, samboeren min. Takk for et estetisk perspektiv på den skriftlige fremstillingen av oppgaven, for vel utført husarbeid i den aktuelle perioden og for tålmodighet og kjærlighet i hverdagen.

Rune Vegard S. Fjellbo

Oslo, 15. februar 2012.

Innhold

1 Innledning	3
2 Forkunnskaper, terminologi og notasjon	5
3 Partielt ordnede mengder	7
4 Simplisielle mengder	10
4.1 Grunnleggende om simplisiell mengder	10
4.2 Nerven og klassifiseringsrommet til en liten kategori	19
4.3 Normal oppdeling	23
5 Om forholdet mellom normal oppdeling og produkt av endelige simplisielle mengder	28
5.1 Introduksjon til problemstillingen	28
5.2 Ett geometrisk og ett kombinatorisk bilde	28
5.3 Et delproblem	35
6 Topologisk avbildningssylinder	42
7 Simple avbildninger	47
8 Reduksjon til standardsimplekser	55
9 Redusert avbildningssylinder	58
10 Høyere dimensjoner	77
10.1 Oppdeling av problemet	77
10.2 Del 1	81
10.3 Del 2	84
10.4 Del 3	87
10.5 Syntese	100
11 En konsekvens for forbedringsfunktoren	103

1 Innledning

For to simplisielle mengder X og Y gir normal oppdeling brukt på projeksjonene $X \times Y \rightarrow X$ og $X \times Y \rightarrow Y$ fra produktet ned på henholdsvis første og annen faktor avbildninger vi kan kombinere i en simplisiell avbildning

$$f : Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

fra oppdelingen av produktet til produktet av oppdelingene. Hovedresultatet vårt, korollar 10.16 på side 101, er at f er en simpel avbildning hvis X og Y er endelige simplisielle mengder, det vil si at når vi går over til topologiske rom, så er hvert inversbilde $|f|^{-1}(p)$ av et punkt $p \in |Y|$ et kontraktibelt rom. I kapittel 11 begrunner vi at dette har en konsekvens for den såkalte forbedringsfunctoren I definert av Waldhausen, Jahren og Rognes i [WJR08, avsnitt 2.5]. Forbedringsfunctoren I er definert ved hjelp av den op-normale oppdelingen $Sd^{op}(X) = Sd(X)^{op}$ og den tar en endelig simplisiell mengde X til den endelige ikke-singulære simplisielle mengden $B(Sd^{op}(X))$ gitt ved å ta den op-normale oppdelingen etterfulgt av Barratt-nerven. Den har i følge [WJR08, teorem 2.5.2.] de egenskapene at det finnes en naturlig simpel avbildning

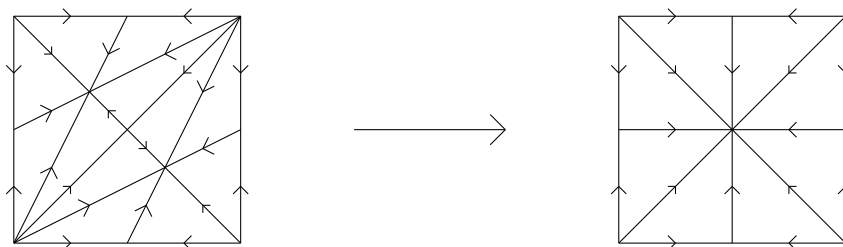
$$s_X : I(X) \rightarrow X$$

og at den bevarer svake homotopiekvivalenser, simple avbildninger og kofibreringer. Konsekvensen er det analoge resultatet for forbedringsfunctoren, som er at

$$I(X \times Y) \xrightarrow{\simeq_s} I(X) \times I(Y)$$

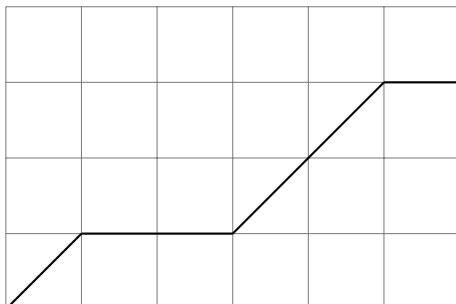
er en simpel avbildning, eller sagt med ord, at forbedringsfunctoren kommuterer med endelig produkt av endelige simplisielle mengder opp til en simpel avbildning.

Ved hjelp av standardverktøy som limelemmaet for simple avbildninger kan problemet reduseres til tilfellet der $X = \Delta[m]$ og $Y = \Delta[n]$ er standardsimplekser. I det tilfellet der X og Y er standard 1-simplekser er følgende et geometrisk bilde av hva f foretar seg.



Inversbildet av barysenteret $([m] \xrightarrow{1} [m], [n] \xrightarrow{1} [n])$ i $Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$ kan sees på som klassifiseringsrommet til den partielt ordnede mengden

bestående av de såkalte veiene (som kan se ut som på figuren under)



eller med andre ord kjedene i gitteret

$$\{0 < 1 < \dots < m\} \times \{0 < 1 < \dots < n\}$$

som inneholder et punkt i hver kolonne og hver rad.

Vi begynner i kapittel 2 der vi skal si litt om forkunnskaper, terminologi og notasjon. Deretter minner vi om partielt ordnede mengder i kapittel 3 og forklarer hvordan de kan tenkes på som små kategorier. I kapittel 4 kommer en oversikt over grunnleggende materiale om simplisielle mengder og om Quillens klassifiseringsrom for en liten kategori. Dette kapitlet strekker ikke til som en introduksjon til simplisielle mengder, men det burde være nok til å sørge for at leseren kjenner språket vi bruker og hvilke deler av den tilgjengelige teorien vi skal benytte oss av. Hvis en potensiell leser er masterstudent med spesialisering innen algebraisk topologi og kjenner til simplisielle mengder, eller har sterkere bakgrunn kan han trygt begynne å lese i kapittel 5, eventuelt etter en kikk på avsnitt 4.3 for å bli minnet om hva normal oppdeling av en simplisiell mengde er. I kapittel 5 vil vi introdusere problemstillingen og vise at inversbildet under $|f|$ av en 0-celle i CW-komplekset $|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$ er kontraktibelt. Avbildningssylindere har vært viktige verktøy for oss. Vi minner om den topologiske avbildningssylinderen i kapittel 6 og diskuterer Waldhausens, Jahrens og Rognes' reduserte avbildningssylinder [WJR08, avsnitt 2.4] i kapittel 9. Etter kapittel 7, som dreier seg om simple avbildninger blir vi i kapittel 8 i stand til å redusere problemet med å vise at

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

er simpel til tilfellet der X og Y er standardsimplekser. I kapittel 10, når vi har den reduserte avbildningssylinderen til rådighet, ser vi på inversbildet av et punkt i en høyere-dimensjonal celle i $|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$. Endelig skal vi som nevnt se på en konsekvens for Waldhausens, Jahrens og Rognes' forbedringsfunctor i kapittel 11.

2 Forkunnskaper, terminologi og notasjon

Denne masteroppgaven er ment å kunne leses av masterstudenter i matematikk som har tatt et emne i algebraisk topologi og som kjenner grunnleggende begreper fra kategoriteori slik som kategori, funktor, naturlig transformasjon, grense og kogrense. Begreper fra algebraisk topologi som må være kjent er for eksempel kofibrering, CW-kompleks, homotopi, homotopiekvivalens og homotopigruppe. En referanse for temaer innen algebraisk topologi er [Ha01] og en referanse for grunnleggende kategoriteori er [Bo94]. Konteksten for denne masteroppgaven er *simplisielle mengder* og selv om vi gir en oversikt over dette temaet i kapittel 4 er teksten ikke ment å være tilstrekkelig som en introduksjon. En fin lærebok er [FP90], som vi selv bruker som referanse, og relevante avsnitt er 4.1, 4.2, 4.3, 4.6 og 3.3 (det er betydelig mer materiale der enn nødvendig for å lese denne teksten). Hvis leseren ikke har hørt begrepet simplisiell mengde før kan han regne med å måtte lese i denne eller tilsvarende kilder parallellt med at han leser denne teksten, selv om de resultatene vi bruker skal være nevnt.

Vi skal nå si litt om terminologi og notasjon før vi i neste kapittel repeterer materiale om partielt ordnede mengder. Vi lar 0 være med i de naturlige tallene, som betegnes med \mathbb{N} . Hvis B er en mengde og hvis A er en delmengde av B , betegner vi det med $A \subseteq B$. Ekte inklusjon, det vil si at det eksisterer en $b \in B$ slik at $b \notin A$ betegnes med $A \subset B$. Vi skal la *Set* betegne kategorien av mengder. At to topologiske rom X og X' er homotopiekvivalente og at avbildninger $f, g : X \rightarrow X'$ mellom topologiske rom er homotope betegnes med henholdsvis $X \simeq X'$ og $f \simeq g$. Det topologiske rommet hvis underliggende mengde består av nøyaktig ett element betegnes med $*$.

Hvis c er et objekt i en kategori \mathcal{C} betegnes identitetsmorfismen $c \rightarrow c$ med 1_c eller bare 1 . Vi skal skrive $c \cong c'$ for å betegne at to objekter c og c' i en kategori er isomorfe. Hvis $f : c \rightarrow d$ er en morfisme i \mathcal{C} og $s : d \rightarrow c$ er en morfisme slik at $f \circ s = 1_d$ kaller vi s et **tverrsnitt av s** . Domenet (source) til en morfisme f betegnes med $\text{dom } f$ og kodomenet (target) betegnes med $\text{cod } f$. Dersom vi har funktorer $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ og ϕ er en naturlig transformasjon fra F til G , skriver vi det slik: $\phi : F \Rightarrow G$. Hvis c er et objekt i \mathcal{C} skal vi ofte la ϕ_c betegne morfismen i \mathcal{D} som ϕ knytter til objektet c . Hom-funktoren $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ betegnes med $\mathcal{C}(-, -)$. En **liten kategori** (flertall; **små kategorier**) er en kategori der klassen av objekter er en mengde. Kategorien av små kategorier betegnes med *Cat*. En kategori med høyst en morfisme for hvert par av objekter i kategorien sies å ha **få morfismer**. Hvis \mathcal{C} er en liten kategori, kalles en funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et **\mathcal{C} -formet diagram i \mathcal{D}** . Kategorien av \mathcal{C} -formede diagrammer i en kategori \mathcal{D} betegnes med $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$. En funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ er **full** hvis funksjonen

$$\mathcal{C}(c, c') \rightarrow \mathcal{D}(F(c), F(c'))$$

er surjektiv for hvert par c, c' av objekter i \mathcal{C} . Funktoren F er **trofast** hvis funksjonen over er injektiv for hvert par c, c' av objekter i \mathcal{C} . Hvis \mathcal{C} er en kategori og a er et objekt i \mathcal{C} som er slik at det for hvert objekt c i \mathcal{C} finnes nøyaktig en morfisme $a \rightarrow c$ i \mathcal{C} , så sier vi at a er et **initielt** objekt. Tilsvarende sier vi at et objekt z i en kategori \mathcal{C} er **terminalt** hvis det for hvert objekt c finnes nøyaktig en morfisme $c \rightarrow z$.

3 Partielt ordnede mengder

For en introduksjon til partielt ordnede mengder, se for eksempel [St97]. Vi sier at en binær relasjon \leq på en mengde C er **refleksiv** hvis vi har

$$x \leq x \text{ for alle } x \in C$$

og at den er **transitiv** hvis

$$x \leq y \text{ og } y \leq z \text{ medfører } x \leq z \text{ for alle } x, y, z \in C.$$

En **preordning** på en mengde C er en binær relasjon \leq som er refleksiv og transitiv. Paret (C, \leq) kalles en **preorden**. En ordningsbevarende funksjon $(C, \leq) \rightarrow (D, \leq')$ mellom preordener er en funksjon $\varphi : C \rightarrow D$ slik at $\varphi(x) \leq' \varphi(y)$ for alle $x, y \in C$ med $x \leq y$. En preorden (C, \leq) kan sees på som en liten kategori, også betegnet med C , der objektene er elementene i mengden C og der vi har nøyaktig en morfisme $x \rightarrow y$ hvis $x \leq y$ og ingen morfismer $x \rightarrow y$ hvis $x \not\leq y$. Det at \leq er refleksiv innebærer at vi har identitetsmorfismer, og vi har en komposisjonslov for morfismer siden \leq er transitiv. En preorden er med andre ord en kategori med få morfismer. Vi skal stort sett ikke bruke forskjellige betegnelser på forskjellige ordninger, og dersom (C, \leq) er en partielt ordnet mengde skal vi ofte la C betegne mengden utstyrt med den partielle ordningen. En ordningsbevarende funksjon $\varphi : (C, \leq) \rightarrow (D, \leq)$ kan betraktes som en funktor $\Phi : C \rightarrow D$. Den tar et objekt x i C til objektet $\varphi(x)$ og den tar en morfisme $x \rightarrow y$ til morfismen $\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$ som eksisterer fordi φ er ordningsbevarende og som er entydig siden D har få morfismer.

Lemma 3.1. *Regelen som knytter kategorien C til preordenen (C, \leq) definerer en full og trofast funktor fra kategorien av preordener til kategorien av små kategorier.*

Bevis. Beviset utelates. □

En binær relasjon \leq på en mengde C er **antisymmetrisk** hvis

$$x \leq y \text{ og } y \leq x \text{ medfører } x = y \text{ for alle } x, y \in C.$$

En **partielt ordnet mengde** er en preorden (C, \leq) slik at \leq er antisymmetrisk. Hvis C og D er partielt ordnede mengder, hvis $\varphi, \psi : C \rightarrow D$ er ordningsbevarende funksjoner og vi for alle $x \in C$ har at $\varphi(x) \leq \psi(x)$, så skriver vi $\varphi \leq \psi$. To elementer x og y i en partielt ordnet mengde er **sammenliknbare** hvis $x \leq y$ eller $y \leq x$. En partiell ordning \leq på en mengde C er en **total ordning** hvis vi for alle par x, y av elementer i C har at x og y er sammenliknbare.

En kan danne nye partielt ordnede mengder ved hjelp av gamle på en rekke måter. En **svakt partielt ordnet delmengde** av en partielt ordnet

mengde (C, \leq) er en delmengde $D \subseteq C$ med en partiell ordning \leq' slik at vi for alle $x, y \in D$ har at $x \leq y$ hvis $x \leq' y$. En **partielt ordnet delmengde** av en partielt ordnet mengde (C, \leq) er en delmengde $D \subseteq C$ med en partiell ordning \leq' slik at vi for alle $x, y \in D$ har at $x \leq y$ hvis og bare hvis $x \leq' y$. En partielt ordnet delmengde sies å ha den **induserte ordningen**. En **kjede** i en partielt ordnet mengde C er en partielt ordnet delmengde slik at den induserte ordningen er en total ordning. **Produktet** $C \times D$ av to partielt ordnede mengder C og D er det kartesiske produktet av mengder utstyrt med ordningen definert ved

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ og } y \leq y'.$$

Et **ideal** i en partielt ordnet mengde C er en partielt ordnet delmengde I slik at hvis $z \in I$ og $x \leq z$ for et eller annet element $x \in C$, så er $x \in I$. Analogt kan vi definere et **filter** i C som en partielt ordnet delmengde F som er slik at hvis $y \in F$ og $y \leq z$, så er $z \in F$. Et element v i en partielt ordnet mengde C gir opphav til idealet C/v bestående av elementene $x \in C$ slik at $x \leq v$. Hvis $\varphi : C \rightarrow D$ er en ordningsbevarende funksjon mellom partielt ordnede mengder og $v \in C$, så får vi induert en ordningsbevarende funksjon $\varphi/v : C/v \rightarrow D/\varphi(v)$. Den **disjunkte unionen** $C \sqcup D$ av to partielt ordnede mengder C og D er den disjunkte unionen av mengdene C og D utstyrt med ordningen definert ved

$$x \leq y \text{ i } C \sqcup D \Leftrightarrow x, y \in C \text{ og } x \leq y \text{ i } C \text{ eller } x, y \in D \text{ og } x \leq y \text{ i } D.$$

Ordningsbevarende funksjoner $\varphi : C \rightarrow D$ og $\varphi' : C' \rightarrow D'$ gir opphav til en ordningsbevarende funksjon

$$\varphi \sqcup \varphi' : C \sqcup C' \rightarrow D \sqcup D'.$$

Følgende er en konstruksjon vi skal gjøre bruk av senere. Hvis C og D er partielt ordnede mengder og $\varphi : C \rightarrow D$ er en ordningsbevarende funksjon kan vi utvide relasjonen på $C \sqcup D$ ved at vi lar $c > \varphi(c)$ for alle $c \in C$. Mengden $C \sqcup D$ sammen med den partielle ordningen generert av denne relasjonen betegnes med $C \cup_\varphi D$ eller med $P(\varphi)$.

Lemma 3.2. *Anta at C, D er partielt ordnede mengder og at $\varphi : C \rightarrow D$ er en ordningsbevarende funksjon. La $c \in C$ og $d \in D$. Da er følgende betingelser ekvivalente:*

- (a) $d < c$ i $C \cup_\varphi D$
- (b) Det finnes en $c' \in C$ med $c' \leq c$ i C slik at $d \leq \varphi(c')$ i D
- (c) $d \leq \varphi(c)$ i D

Bevis. Vi skal først vise at (b), sammen med relasjonene på C og D , beskriver en partiell ordning på den disjunkte unionen $C \sqcup D$. Deretter viser vi at (b) og (c) er ekvivalente. Til slutt skal vi vise at relasjonen beskrevet av (b) nettopp er den partielle ordningen på $C \cup_\varphi D$.

(b) beskriver en partiell ordning på $C \sqcup D$:

Beskriv en relasjon \preceq på mengden $C \sqcup D$ på følgende måte: For $c, c' \in C$, la

$$c \preceq c' \Leftrightarrow c \leq c' \text{ i } C,$$

for $c \in C$, $d \in D$, la

$$d \preceq c \Leftrightarrow \text{det finnes en } c' \in C \text{ med } c' \leq c \text{ i } C \text{ slik at } d \leq \varphi(c') \text{ i } D$$

og for $d, d' \in D$, la

$$d \preceq d' \Leftrightarrow d \leq d' \text{ i } D.$$

Relasjonen \preceq er reflektiv og antisymmetrisk siden relasjonene på C og D har disse egenskapene. Det er også rett frem å kontrollere at \preceq er transitiv: Anta at $x, y, z \in C \sqcup D$ er slik at $x \preceq y$ og at $y \preceq z$. Hvis $x, y, z \in C$ eller $x, y, z \in D$ er det klart at $x \preceq z$ ettersom relasjonene på C og D er transitive. Se derfor på tilfellet der $z \in C$ og $x \in D$. Hvis $y \in C$ finnes det en $c' \in C$ med $c' \leq y$ i C slik at $x \leq \varphi(c')$. Siden $y \in C$ er $c' \leq y \leq z$ i C , så vi må ha $x \preceq z$. Hvis derimot $y \in D$ finnes det en $c' \in C$ med $c' \leq z$ i C slik at $y \leq \varphi(c')$ i D . Siden $x \leq y \leq \varphi(c')$ i D må $x \preceq z$. Det følger at \preceq er en partiell ordning.

(b) \Leftrightarrow (c):

Anta at $c \in C$ og $d \in D$ er slik at det finnes en $c' \in C$ med $c' \leq c$ i C slik at $d \leq \varphi(c')$ i D . Da er $d \leq \varphi(c') \leq \varphi(c)$ i D siden φ er ordningsbevarende. Det følger at (b) \Rightarrow (c) er oppfylt. Hvis (c) er oppfylt er selvsagt (b) oppfylt, så (b) og (c) er ekvivalente.

\preceq partiell ordning på $C \cup_{\varphi} D$:

Den partielle ordningen på $C \cup_{\varphi} D$ er inneholdt i \preceq , for hvis $c \in C$ er naturligvis $\varphi(c) \leq \varphi(c)$ i D som medfører $\varphi(c) \preceq c$. Omvendt, anta at $c \in C$ og $d \in D$ er slik at $d \preceq c$, det vil si $d \leq \varphi(c)$. I $C \cup_{\varphi} D$ er $d \leq \varphi(c) < c$, så \preceq er inneholdt i den partielle ordningen på $C \cup_{\varphi} D$. Dermed er \preceq den partielle ordningen på $C \cup_{\varphi} D$. \square

Konstruksjonen over kan itereres. Anta at C_0, C_1, \dots, C_r er partielt ordnede mengder og at vi har en sekvens

$$C_0 \xleftarrow{\varphi_1} C_1 \xleftarrow{\varphi_2} \dots \xleftarrow{\varphi_r} C_r$$

av ordningsbevarende funksjoner. Betegn φ_r med ψ_r . En ordningsbevarende funksjon $\varphi : C \rightarrow D$ mellom partielt ordnede mengder gir opphav til en ordningsbevarende funksjon $\varphi \vee 1 : C \cup_{\varphi} D \rightarrow D$, så for k med $1 \leq k < r$ kan vi la ψ_k være sammensetningen

$$P(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_r) \xrightarrow{\psi_{k+1} \vee 1} C_k \xrightarrow{\varphi_k} C_{k-1}.$$

Definer

$$P(\varphi_k, \dots, \varphi_r) = P(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_r) \cup_{\psi_k} C_{k-1}.$$

Den partielt ordnede mengden $P(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ har C_0, \dots, C_r som partielt ordnede delmengder.

4 Simplisielle mengder

Simplisielle mengder ble introdusert av Eilenberg og Zilber i [EZ50] under navnet *complete semi-simplicial complexes*. Vi skal definere noen grunnleggende begreper og nevne noen sentrale egenskaper ved kategorien av simplisielle mengder, men mest for å fiksere terminologi og notasjon. For en introduksjon til simplisielle mengder og til normal oppdeling- og geometrisk realisering av simplisielle mengder, se for eksempel [FP90].

4.1 Grunnleggende om simplisiell mengder

Vi skal bruke definisjonen av simplisielle mengder som brukes i [WJR08] der en simplisiell mengde har et entydig (-1) -simpleks. Definisjonene er kompatible og den geometriske realiseringen er uendret, men denne alternative definisjonen gjør at vi kan utnytte Waldhausens, Jahrens og Rognes' reduserte avbildningssylinder som vi skal snakke om i kapittel 9.

Med Δ_+ skal vi mene *den utvidede kategorien av endelige ordinaler*, definert som følger: Objektene, kalt **ordinaler**, er delmengdene

$$[n] = \{0, 1, \dots, n\}$$

av \mathbb{N} med den induserte partielle (totale) ordningen. Den tomme mengden \emptyset , med sin unike totale ordning, betegnes med $[-1]$. Morfismene, kalt **operatorer**, er de ordningsbevarende funksjonene $\alpha : [m] \rightarrow [n]$. Kategorien av endelige ordinaler blir i [FP90, avsnitt 4.1, side 132] definert på samme måte, bortsett fra at den tomme mengden ikke tas med som et objekt. Monomorfismene i Δ_+ kalles **fasettoperatorer** og epimorfismene kalles **degenerasjonsoperatorer**. En **ekte fasettoperator (degenerasjonsoperator)** er en fasettoperator (degenerasjonsoperator) som er forskjellig fra identiteten. Noen operatorer forekommer såpass ofte at de får egne symboler: ι^n er identitetsoperatoren $[n] \rightarrow [n]$. Fasettoperatoren $\delta_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$ som sender $i-1$ på $i-1$ og i på $i+1$ kalles en **elementær fasettoperator**. Degenerasjonsoperatoren $\sigma_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$ som sender både i og $i+1$ på i , $0 \leq i \leq n$ er en **elementær degenerasjonsoperator**. Dessuten har vi den **terminale operatoren** $\omega^n : [n] \rightarrow [0]$. Vi skal ofte utelate øvreindeksen i notasjonen. En operator $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ har en entydig dekomposisjon i en degenerasjonsoperator α^b etterfulgt av en fasettoperator α^\sharp , det vil si at vi kan skrive

$$\alpha = \alpha^b \circ \alpha^\sharp.$$

En **simplisiell mengde** er en funktor $\Delta_+^{op} \rightarrow Set$ som er slik at $X([-1])$ er en ettpunktsmengde (her betegner Δ_+^{op} den motsatte kategorien, som en får ved å snu pilene). En simplisiell mengde er med andre ord et eksempel på en *kontravariant funktor* $\Delta_+ \rightarrow Set$. Dersom X er en simplisiell mengde

betegner vi $X([n])$ med X_n og elementene $x \in X_n$ kalles **n -simplekser**. Vi sier at et n -simpleks har **dimensjon** n og vi skriver $\dim x = n$. En naturlig transformasjon mellom simplisielle mengder er en **simplisiell avbildning**. Kategorien av simplisielle mengder betegnes med $sSet$. Vi skal som oftest behandle en simplisiell mengde X som en mengde

$$\bigsqcup_{n \geq -1} X_n,$$

gradert av de naturlige tallene, og utstyrt med en høyrevirkning av operatorene. Mer presist har vi for enhver operator $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ en funksjon

$$\begin{aligned} \alpha^* : X_n &\rightarrow X_m \\ x &\mapsto x\alpha. \end{aligned}$$

som er identiteten hvis α er identiteten og som tilfredsstiller

$$(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*$$

for operatorer

$$[m] \xrightarrow{\alpha} [n] \xrightarrow{\beta} [p].$$

En simplisiell avbildning $X \Rightarrow Y$ kan da betraktes som en funksjon $f : X \rightarrow Y$ som **respekterer gradering**, det vil si slik at

$$x \in X_n \Rightarrow f(x) \in Y_n,$$

og som er **kompatibel med operatorer**, det vil si slik at

$$f(x\alpha) = f(x)\alpha,$$

for alle **komponerbare par** (x, α) , det vil si alle par (x, α) med

$$[\dim x] = \text{cod } \alpha.$$

En delmengde Y av en simplisiell mengde X er en **simplisiell delmengde** hvis inklusjonen $Y \rightarrow X$ er en simplisiell avbildning.

Gitt et n -simpleks x i en simplisiell mengde X sier vi at x er **degenerert** hvis det finnes et $(n-1)$ -simpleks y og en elementær degenerasjonsoperator σ_i slik at $x = y\sigma_i$. I motsatt tilfelle er x **ikke-degenerert**. Alle 0-simplekser er ikke-degenererte. For en simplisiell mengde X skal vi la X^\sharp betegne mengden av ikke-degenererte simplekser av dimensjon 0 eller høyere. Gitt en simplisiell mengde X og simplekser $x, y \in X$ slik at $x = y\alpha$ for en operator α sier vi at x er en **(ekte) fasett** av y hvis α er en (ekte) fasettoperator. Vi sier at x er en **(ekte) degenerasjon** av y hvis α er en (ekte) degenerasjonsoperator. Et fundamentalt resultat er at ethvert simpleks x i en simplisiell mengde har en entydig dekomposisjon på formen

$$x = x^\sharp x^b,$$

der x^\sharp er et ikke-degenerert simpleks og x^\flat er en degenerasjonsoperator. Dette er det såkalte Eilenberg-Zilber lemmaet fra [EZ50] og er formulert som teorem 4.2.3 i [FP90]. Beviset bruker at en degenerasjonsoperator er bestemt av sine tverrsnitt.

Vår definisjon av en simplisiell mengde er som nevnt ikke standard. Vi skal derfor si litt om hvorfor den er kompatibel med den i [FP90]. La Δ betegne kategorien av endelige ordinaler slik den er definert i [FP90], nemlig som kategorien hvis objekter er de ikke-tomme delmengdene

$$[n] = \{0, 1, \dots, n\}$$

av \mathbb{N} med de induerte totale ordningene og hvis morfismer er de ordningsbevarende funksjonene mellom dem.

Lemma 4.1. *Enhver funktor $Z : \Delta^{op} \rightarrow Set$ kan utvides på en entydig måte til en simplisiell mengde X . Omvendt, enhver funktor $Z : \Delta^{op} \rightarrow Set$ oppstår som sammensetningen av funktoren $\Delta^{op} \rightarrow \Delta_+^{op}$ med en simplisiell mengde.*

Bevis. Anta at $Z : \Delta^{op} \rightarrow Set$ er en funktor og se på utvidelser

$$X, X' : \Delta_+^{op} \rightarrow Set$$

slik at $X_{-1} = \{\eta_X\}$ og $X'_{-1} = \{\eta_{X'}\}$. Hvis $\eta_X = \eta_{X'}$ må $X = X'$. Ellers har vi uansett at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{1} & X'_n \\ \alpha^* \downarrow & & \downarrow \alpha^* \\ X_{-1} & \longrightarrow & X'_{-1} \end{array}$$

kommuterer for alle operatører $\alpha : [-1] \rightarrow [n]$, så vi får en naturlig transformasjon $X \Rightarrow X'$ som er en isomorfi. Det er ingen grunn til å foretrekke ett valg av (-1) -simpleks fremfor et annet. Hvis vi er gitt en funktor $W : \Delta^{op} \rightarrow Set$, en simplisiell mengde Y som utvider W og en naturlig transformasjon $Z \Rightarrow W$ har vi entydige naturlige transformasjoner som utvider denne og vi har at diagrammet til venstre under kommuterer

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \parallel \swarrow & & \searrow \\ & Y & \\ \parallel \downarrow & & \nearrow \\ X' & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{\eta_X\} & & \\ \downarrow \searrow & & \searrow \\ & \{\eta_Y\} & \\ \downarrow \nearrow & & \nearrow \\ \{\eta_{X'}\} & & \end{array}$$

siden diagrammet til høyre kommuterer. Den tilsvarende påstanden er sann for en naturlig transformasjon *til* Z fra en eller annen funktor $W : \Delta^{op} \rightarrow$

Set. Hvis $X : \Delta_+^{op} \rightarrow Set$ er en simplisiell mengde er X en utvidelse av sammensetningen

$$\Delta^{op} \rightarrow \Delta_+^{op} \xrightarrow{X} Set.$$

□

Simplisielle mengder gir visse topologiske rom en kombinatorisk struktur via en konstruksjon kalt *geometrisk realisering*, som vi nå skal beskrive. Underrommet

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0 \text{ for alle } i, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$$

av \mathbb{R}^{n+1} kalles **standard n -simplekset i \mathbb{R}^{n+1}** . Vi lar Δ^{-1} betegne tomrommet \emptyset . Anta at $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ er en operator. La $\{e_i\}_{0 \leq i \leq m}$ være standardbasis for vektorrommet \mathbb{R}^{m+1} og la $\{f_i\}_{0 \leq i \leq n}$ være standardbasis for \mathbb{R}^{n+1} . Den lineære avbildningen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{m+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ e_i &\mapsto f_{\alpha(i)} \end{aligned}$$

induserer en avbildning $\Delta^\alpha : \Delta^{m+1} \rightarrow \Delta^{n+1}$ gitt ved

$$t = \sum_{i=0}^m t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^m t_i f_{\alpha(i)} = \alpha t.$$

Funktoren $\Delta^- : \Delta \rightarrow Top$ som sender en ordinal $[n]$ på Δ^n og en operator α på Δ^α er et såkalt *kosimplisielt rom*. For simplisielle mengder X , gi X_n den diskrete topologien. Generer en ekvivalensrelasjon \sim på den disjunkte unionen

$$\bigsqcup_{n \geq -1} X_n \times \Delta^n.$$

ved å identifisere punktet $(x\alpha, t)$ med $(x, \alpha t)$ for alle operatorer $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ og alle par (x, t) med $x \in X_n$ og $t \in \Delta^m$. Den **geometriske realiseringen** av en simplisiell mengde X er identifikasjonsrommet

$$|X| = \bigsqcup_{n \geq -1} X_n \times \Delta^n / \sim.$$

Et par $(x, t) \in X_n \times \Delta^n$ bestående av et ikke-degenerert simpleks x og et indre punkt t er et **minimalt par** av dimensjon n . Det kosimplisielle rommet Δ^- tilfredsstillter *Eilenberg-Zilber egenskapen* [FP90, side 147]. Av den grunn kan ethvert punkt i $|X|$ representeres entydig av et minimalt par [FP90, side 149,153]. En kan vise at den geometriske realiseringen $|X|$ er et CW-kompleks

med nøyaktig en åpen n -celle for hvert ikke-degenererte n -simpleks, $n \geq 0$ [FP90, side 154]. De karakteristiske avbildningene er

$$\begin{aligned} \Delta^{\dim x} &\rightarrow |X| \\ t &\mapsto [x, t] \end{aligned}$$

for $x \in X^\sharp$. I [FP90, side 139] er den geometriske realiseringen av en kontravariant funktor $Z : \Delta \rightarrow \text{Set}$ definert som identifikasjonsrommet av

$$\bigsqcup_{n \geq 0} Z_n \times \Delta^n$$

som vi får ved å generere en ekvivalensrelasjon \sim ved å identifisere punktet $(z\alpha, t)$ med $(z, \alpha t)$ for alle operatører $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ og alle par (z, t) med $z \in Z_n$ og $t \in \Delta^m$.

Lemma 4.2. *Den geometriske realiseringen av en simplisiell mengde X er det samme rommet som den geometriske realiseringen av funktoren*

$$Z : \Delta^{op} \rightarrow \text{Set}$$

som er slik at Z er sammensetningen av X med $\Delta^{op} \rightarrow \Delta_+^{op}$.

Bevis. Siden $\Delta^{-1} = \emptyset$ er $\sqcup_{n \geq -1} X_n \times \Delta^n$ og $\sqcup_{n \geq 0} Z_n \times \Delta^n$ like som mengder. En operator $\alpha : [-1] \rightarrow [n]$ gir ingen ekstra identifikasjoner på $\sqcup_{n \geq -1} X_n \times \Delta^n$ siden det ville ha krevd minst ett element $t \in \Delta^{-1}$. \square

Geometrisk realisering har i følge proposisjon 4.2.10 i [FP90] en høyreadjungert funktor $S : \text{Top} \rightarrow s\text{Set}$, kalt den *singulære funktoren*. Den **singulære mengden** til et topologisk rom T er den simplisielle mengden ST definert ved å la

$$(ST)_n = \text{Top}(\Delta^n, T)$$

og ved at vi for $x \in (ST)_n$ og en operator $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ lar $x\alpha$ være sammensetningen

$$\Delta^m \xrightarrow{\Delta^\alpha} \Delta^n \xrightarrow{x} T.$$

Dette innebærer at geometrisk realisering bevarer kogrener, for i følge [Bo94, prop. 3.2.2] er det slik at enhver venstreadjungert funktor bevarer kogrener (se også [Ma98, avsnitt V.5 side 119]).

Vi skal si at en simplisiell avbildning er en **kofibrering** hvis den er injektiv i hver grad. En simplisiell avbildning er en kofibrering hvis og bare hvis den geometriske realiseringen er en embedding. For, hvis $f : X \rightarrow Y$ er en kofibrering er $|f|$ i følge korollar 4.3.8 i [FP90, avsnitt 4.3, side 156] en embedding av et CW-underkompleks. Dessuten er en simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ en kofibrering hvis og bare hvis $|f|$ injektiv i følge proposisjon

4.3.3 i [FP90, avsnitt 4.3, side 153], så hvis $|f|$ er en embedding er f en kofibrering. La

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow i & & \\ Y & & \end{array}$$

være et diagram i kategorien av topologiske rom. Vi skal betegne pushout av diagrammet med $Y \cup_D A$. Hvis i er en lukket kofibrering sier vi gjerne at pushout av diagrammet er et **adjunksjonsrom**, og vi betegner det med $A \cup_f Y$. Vi sier også at $A \cup_f Y$ er **bygd fra A ved å feste på Y langs f** . Den kanoniske avbildningen $\bar{f} : Y \rightarrow A \cup_f Y$ er den **karakteristiske avbildningen**. Analogt med dette kan vi se på et diagram

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow i & & \\ Y & & \end{array}$$

i $sSet$. Pushout betegnes med $Y \cup_D A$ og hvis $i : D \rightarrow Y$ er en kofibrering betegnes pushout med $A \cup_f Y$. Hvis vi lar $X = A \cup_f Y$ er diagrammet

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & X \end{array}$$

en **simplisiell adjunksjon**. Avbildningen $\bar{f} : Y \rightarrow A \cup_f Y$ er den **karakteristiske avbildningen**. Siden vi vet at geometrisk realisering bevarer kogrensere (fordi den har en høyreadjungert) og kofibreringer følger det at geometrisk realisering bevarer adjunksjoner. Med andre ord er $|i|$ en lukket kofibrering, vi kan betrakte $|X|$ som bygd fra $|A|$ ved å feste på $|Y|$ langs $|f|$ og $|\bar{f}|$ er den karakteristiske avbildningen til adjunksjonsrommet $|X|$.

Ut avsnittet skal vi nå tolke *simplisiell mengde* som en kontravariant funktor $\Delta \rightarrow Set$ og vi lar $sSet$ betegne kategorien av slike. I følge det såkalte Yoneda-lemmaet, formulert som lemma 4.2.1 i [FP90], finnes det en naturlig bijeksjon

$$sSet(\Delta[n], X) \xrightarrow{\cong} X_n.$$

Med andre ord svarer enhver simplisiell avbildning $\Delta[n] \rightarrow X$ til et entydig n -simpleks i X . Bijeksjonen er definert på følgende måte. Funktoren

$$\Upsilon : \Delta \rightarrow sSet$$

som tar ordinalen $[n]$ til standard-simplekset $\Delta[n]$ og en operator $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ til den simplisielle avbildningen

$$\begin{aligned} \Upsilon\alpha : \Delta[m] &\rightarrow \Delta[n] \\ \gamma &\mapsto \alpha \circ \gamma \end{aligned}$$

kalles **Yoneda-embeddingen**. Hom-funktoren

$$sSet(-, X) : sSet^{op} \rightarrow Set$$

kan settes sammen med Υ^{op} for å danne funktoren

$$sSet(\Upsilon^{op}(-), X) : \Delta^{op} \rightarrow Set.$$

Vi har den naturlige transformasjonen

$$sSet(\Upsilon^{op}(-), X) \Rightarrow X$$

som knytter funksjonen

$$\begin{aligned} sSet(\Delta[n], X) &\rightarrow X_n \\ f &\mapsto f(\iota^n) \end{aligned}$$

til ordinalen $[n]$. Den omvendte funksjonen $X_n \rightarrow sSet(\Delta[n], X)$ tar et simpleks $x \in X_n$ til den simplisielle avbildningen

$$\begin{aligned} \bar{x} : \Delta[n] &\rightarrow X \\ \gamma &\mapsto x\gamma, \end{aligned}$$

kalt den **representerende avbildningen** til x . En simplisiell mengde X sies å være **ikke-singulær** hvis vi for alle $x \in X^\sharp$ har at den representerende avbildningen \bar{x} er en kofibrering.

Et resultat vi skal få bruk for er at for en vilkårlig simplisiell mengde Z , så bevarer produktfunktoren $- \times Z : sSet \rightarrow sSet$ kogrensener. Grunnen er at $- \times Z$ har en høyreadjungert funktor. Hvis for eksempel

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & A \\ i \downarrow & & \downarrow \bar{i} \\ Y & \xrightarrow{\bar{f}} & X \end{array}$$

er et pushout-diagram følger det derfor at

$$\begin{array}{ccc} D \times Z & \xrightarrow{f \times 1} & A \times Z \\ i \times 1 \downarrow & & \downarrow \bar{i} \times 1 \\ Y \times Z & \xrightarrow{\bar{f} \times 1} & X \times Z \end{array}$$

også er et pushout-diagram.

Proposisjon 4.3. (Oppgave 4.2.5 i [FP90, side 152]) Produktfunktoren $- \times Z$ har en høyreadjungert funktor

$$(-)^Z : sSet \rightarrow sSet,$$

definert på følgende måte: For en simplisiell mengde X , definer X^Z ved å la

$$(X^Z)_n = sSet(\Delta[n] \times Z, X),$$

og ved $\alpha^* : (X^Z)_n \rightarrow (X^Z)_m$ gitt ved

$$\varphi \mapsto \varphi \circ (\Upsilon\alpha \times 1)$$

for en operator $\alpha : [m] \rightarrow [n]$. For en simplisiell avbildning $f : X \rightarrow X'$, definer $f^Z : X^Z \rightarrow X'^Z$ ved

$$\varphi \mapsto f \circ \varphi.$$

Bevis. Den simplisielle mengden X^Z er den sammensatte funktoren

$$\Delta^{\text{op}} \xrightarrow{\Upsilon^{\text{op}}} sSet^{\text{op}} \xrightarrow{(- \times Z)^{\text{op}}} sSet^{\text{op}} \xrightarrow{sSet(-, X)} \text{Set}$$

og den simplisielle avbildningen $f^Z : X^Z \rightarrow X'^Z$ er den naturlige transformasjonen $X^Z \Rightarrow X'^Z$ gitt ved å kombinere den naturlige transformasjonen

$$sSet(-, f) : sSet(-, X) \Rightarrow sSet(-, X')$$

med funktoren

$$\Delta^{\text{op}} \xrightarrow{\Upsilon^{\text{op}}} sSet^{\text{op}} \xrightarrow{(- \times Z)^{\text{op}}} sSet^{\text{op}}.$$

Hvis $f : X \rightarrow X'$ og $f' : X' \rightarrow X''$ er simplisielle avbildninger og hvis $\varphi \in X^Z$, så er

$$\begin{aligned} (f' \circ f)^Z(\varphi) &= (f' \circ f) \circ \varphi \\ &= f' \circ (f \circ \varphi) \\ &= f' \circ f^Z(\varphi) \\ &= f'^Z(f^Z(\varphi)) \\ &= f'^Z \circ f^Z(\varphi). \end{aligned}$$

Det følger at $(-)^Z$ er en funktor.

Nå går vi over til å vise at $- \times Z$ og $(-)^Z$ er adjungerte. Vi kan definere en funksjon

$$\phi_{(X,Y)} : sSet(X \times Z, Y) \rightarrow sSet(X, Y^Z)$$

på følgende måte: Hvis $f : X \times Z \rightarrow Y$ er en simplisiell avbildning, la $\tilde{f} : X \rightarrow Y^Z$ være gitt ved

$$X_n \ni x \mapsto \Delta[n] \times Z \xrightarrow{\bar{x} \times 1} X \times Z \xrightarrow{f} Y.$$

Anta at Y er en simplisiell mengde og at $h : X \rightarrow X'$ er en simplisiell avbildning. Vi skal kontrollere at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \text{sSet}(X' \times Z, Y) & \xrightarrow{\Phi_{(X', Y)}} & \text{sSet}(X', Y^Z) \\ \text{sSet}(h^{op} \times 1, 1) \downarrow & & \downarrow \text{sSet}(h^{op}, 1) \\ \text{sSet}(X \times Z, Y) & \xrightarrow{\Phi_{(X, Y)}} & \text{sSet}(X, Y^Z) \end{array}$$

kommuterer. Under den ene sammensetningen sendes en avbildning

$$f : X' \times Z \rightarrow Y$$

på avbildningen $X \rightarrow Y^Z$ som sender et n -simpleks x på sammensetningen

$$\Delta[n] \times Z \xrightarrow{\bar{x} \times 1} X \times Z \xrightarrow{h \times 1} X' \times Z \xrightarrow{f} Y$$

og under den andre sammensetningen sendes f på avbildningen $X \rightarrow Y^Z$ som sender x på sammensetningen

$$\Delta[n] \times Z \xrightarrow{h(\bar{x}) \times 1} X' \times Z \xrightarrow{f} Y$$

og diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n] \times Z & \xrightarrow{h(\bar{x}) \times 1} & X' \times Z \\ & \searrow \bar{x} \times 1 & \nearrow h \times 1 \\ & X \times Z & \end{array}$$

kommuterer, så det følger at vi har naturlighet i X . Det er også rett frem å kontrollere at vi har naturlighet i Y for alle simplisielle mengder X , så regelen som knytter funksjonen $\phi_{(X, Y)}$ til et par (X, Y) av simplisielle mengder definerer en naturlig transformasjon

$$\phi : \text{sSet}(- \times Z, -) \Rightarrow \text{sSet}(-, (-)^Z).$$

Det gjenstår å vise at $\phi_{(X, Y)}$ er en bijeksjon for alle par X, Y av simplisielle mengder. Definer funksjonen $\text{sSet}(X, Y^Z) \rightarrow \text{sSet}(X \times Z, Y)$ ved at en simplisiell avbildning $g : X \rightarrow Y^Z$ sendes på den simplisielle avbildningen $\tilde{g} : X \times Z \rightarrow Y$ gitt ved

$$(X \times Z)_n \ni (x, z) \mapsto g(x)(\iota^n, z).$$

Se først på sammensetningen

$$\text{sSet}(X \times Z, Y) \xrightarrow{\phi_{(X, Y)}} \text{sSet}(X, Y^Z) \rightarrow \text{sSet}(X \times Z, Y).$$

Anta at $f : X \times Z \rightarrow Y$ er en simplisiell avbildning og la $\tilde{f} : X \times Z \rightarrow Y$ være avbildningen den sendes på under sammensetningen over. Hvis

$$(x, z) \in (X \times Z)_n$$

er

$$\tilde{f}(x, z) = \tilde{f}(\iota^n, z) = f \circ \bar{x} \times 1(\iota^n, z) = f(x, z).$$

For den andre sammensetningen, funksjonen

$$\text{sSet}(X, Y^Z) \rightarrow \text{sSet}(X \times Z, Y) \xrightarrow{\phi_{(X,Y)}} \text{sSet}(X, Y^Z),$$

anta at $g : X \rightarrow Y^Z$ er en simplisiell avbildning og at denne sendes på $\tilde{g} : X \rightarrow Y^Z$ under funksjonen over. Anta at $x \in X_n$. Vi skal vise at $g(x) = \tilde{g}(x)$. Hvis $(\gamma, z) \in (\Delta[n], Z)_p$ er

$$\tilde{g}(x)(\gamma, z) = \tilde{g}(x\gamma, z) = g(x\gamma)(\iota^p, z) = (g(x)\gamma)(\iota^p, z) = g(x)(\gamma, z).$$

Begge sammensetningene er identiteten, så $\phi_{(X,Y)}$ er bijektiv. \square

Analogt med definisjonen av funktoren $(-)^Z$ kan en la $(-)_Z : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}$ være funktoren som tar en simplisiell mengde X til den sammensatte funktoren

$$\Delta^{\text{op}} \xrightarrow{\Gamma^{\text{op}}} \text{sSet}^{\text{op}} \xrightarrow{(Z \times -)^{\text{op}}} \text{sSet}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{sSet}(-, X)} \text{Set}.$$

Vi har bijeksjoner

$$\text{sSet}(Z \times X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{sSet}(X \times Z, Y)$$

og

$$\text{sSet}(X, Y^Z) \xrightarrow{\cong} \text{sSet}(X, Y_Z)$$

som er naturlige i X for alle simplisielle mengder Y og naturlige i Y for alle simplisielle mengder X . Kombinerer vi bijeksjonene over med $\phi_{(X,Y)}$ ser vi at $(-)_Z$ er høyreadjungert til produktfunktoren $(Z \times -)$.

4.2 Nerven og klassifiseringsrommet til en liten kategori

Quillen definerte *klassifiseringsrommet* til en liten kategori i [Qu73]. Vi vil i det neste kapittelet få mye bruk for at funktorer mellom små kategorier gir opphav til en simplisiell homotopi, og da spesielt i tilfellet partielt ordnede mengder og ordningsbevarende funksjoner.

Definisjon Nerven $N\mathcal{C}$ til en liten kategori \mathcal{C} er den simplisielle mengden $\Delta_+^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ gitt ved $[p] \mapsto \text{Cat}([p], \mathcal{C})$ og $\alpha^{\text{op}} : [q] \rightarrow [p] \mapsto \text{Cat}(\alpha^{\text{op}}, 1_{\mathcal{C}})$.

Med andre ord er mengden $N_p\mathcal{C}$ av p -simplekser funktorene $[p] \rightarrow \mathcal{C}$, og operatoren $\alpha : [p] \rightarrow [q]$ virker på $N_q\mathcal{C}$ på følgende måte:

$$\begin{aligned}\alpha^* : N_q\mathcal{C} &\rightarrow N_p\mathcal{C} \\ x &\mapsto x \circ \alpha\end{aligned}$$

En funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gir opphav til en simplisiell avbildning

$$NF : N\mathcal{C} \Rightarrow N\mathcal{D}$$

ved at vi til ordinalen $[p]$ knytter funksjonen

$$\begin{aligned}N_pF : N_p\mathcal{C} &\rightarrow N_p\mathcal{D} \\ x &\mapsto F \circ x,\end{aligned}$$

det vil si at $N_pF = \text{Cat}(1_{[p]}, F)$. En kan vise at nerven er en full og trofast funktor. Siden regelen som til en preorden assosierer en liten kategori også er en full og trofast funktor er det for eksempel slik at hvis en har en simplisiell avbildning mellom nerver av partielt ordnede mengder, så er denne nerven til en ordningsbevarende funksjon. Det er riktig at en isomorfi mellom små kategorier induserer en isomorfi av simplisielle mengder. Spesielt gir isomorfe partielt ordnede mengder isomorfe simplisielle mengder.

Eksempel 1. Vi har at $\Delta[p]$ er nerven til ordinalen $[p]$.

Definisjon La \mathcal{C} være en liten kategori. Det topologiske rommet $|N\mathcal{C}|$ er **klassifiseringsrommet** til \mathcal{C} , og det betegnes med $|\mathcal{C}|$. Tilsvarende betegner vi avbildningen indusert av en morfisme $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i Cat med $|F|$.

La $f, g : X \rightarrow Y$ være simplisielle avbildninger. En **simplisiell homotopi** fra f til g er en simplisiell avbildning $H : X \times \Delta[1] \rightarrow Y$ slik at $H(x, \delta_1\omega) = f(x)$ og $H(x, \delta_0\omega) = g(x)$ for alle $x \in X$. Vi skal se at en naturlig transformasjon $\phi : F \Rightarrow G$ mellom \mathcal{C} -formede diagrammer i en liten kategori \mathcal{D} gir opphav til en simplisiell homotopi $N\mathcal{C} \times \Delta[1] \rightarrow N\mathcal{D}$.

Lemma 4.4. *La \mathcal{C}, \mathcal{D} være kategorier og anta at \mathcal{C} er liten. For $t \in [1]$, la $i_t : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times [1]$ være funktoren som tar objektet X til (X, t) og som tar morfismen $f : X \rightarrow Y$ til $(f, 1_t)$. Det finnes en bijeksjon mellom*

- (a) *Bifunktorene $\Phi : \mathcal{C} \times [1] \rightarrow \mathcal{D}$ med $\Phi \circ i_0 = F$ og $\Phi \circ i_1 = G$;*
- (b) *De naturlige transformasjonene $\phi : F \Rightarrow G$.*

Bevis. Begynn med en funktor $\Phi : \mathcal{C} \times [1] \rightarrow \mathcal{D}$ som er slik at $\Phi \circ i_0 = F$ og $\Phi \circ i_1 = G$. Anta at $f : c \rightarrow c'$ er en morfisme i \mathcal{C} . Vi kan faktorisere morfismen $(f, 0 \rightarrow 1)$ i $\mathcal{C} \times [1]$ på to måter:

$$\begin{aligned}(f, 0 \rightarrow 1) &= (f, 1_1) \circ (1_c, 0 \rightarrow 1) \\ &= (1_{c'}, 0 \rightarrow 1) \circ (f, 1_0).\end{aligned}$$

La $\phi_d = \Phi(1_d, 0 \rightarrow 1)$ for hvert objekt d i \mathcal{C} og bruk funktoren Φ på morfismen $(f, 0 \rightarrow 1)$. Vi får det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{\phi_c} & G(c) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(c') & \xrightarrow{\phi_{c'}} & G(c') \end{array}$$

hvilket betyr at morfismene ϕ_d definerer en naturlig transformasjon $\phi : F \Rightarrow G$. Betegn funksjonen som sender Φ på ϕ med Ψ . Omvendt; begynn med en naturlig transformasjon $\phi : F \Rightarrow G$. Det gjenstår bare å bestemme hvor funktoren $\Phi : \mathcal{C} \times [1] \rightarrow \mathcal{D}$ skal gjøre av morfismer på formen $(f, 0 \rightarrow 1)$. For morfismer $f : c \rightarrow c'$ i \mathcal{C} , definer $\Phi(f, 0 \rightarrow 1) = \phi_{c'} \circ F(f)$. For å vise at Φ er en funktor holder det å kontrollere at

$$\begin{aligned} \Phi((g, 1_1) \circ (f, 0 \rightarrow 1)) &= \Phi(g, 1_1) \circ \Phi(f, 0 \rightarrow 1) \\ \Phi((h, 0 \rightarrow 1) \circ (g, 1_0)) &= \Phi(h, 0 \rightarrow 1) \circ \Phi(g, 1_0) \end{aligned}$$

for alle morfismer f, g og h i \mathcal{C} , ettersom Φ er definert ved hjelp av F og G . Se først på den første likningen. Anta at $f : c \rightarrow c'$ og $g : c' \rightarrow c''$ er morfismer i \mathcal{C} . Vi har

$$\begin{aligned} \Phi((g, 1_1) \circ (f, 0 \rightarrow 1)) &= \Phi(g \circ f, 0 \rightarrow 1) \\ &= \phi_{c''} \circ F(g \circ f) \\ &= G(g \circ f) \circ \phi_c \\ &= (G(g) \circ G(f)) \circ \phi_c \\ &= G(g) \circ (G(f) \circ \phi_c) \\ &= G(g) \circ (\phi_{c'} \circ F(f)) \\ &= \Phi(g, 1_1) \circ \Phi(f, 0 \rightarrow 1). \end{aligned}$$

På en liknende måte kan en vise at den andre likningen holder. Betegn funksjonen som sender ϕ på Φ med Ω . At Ψ og Ω er inverse funksjoner følger av konstruksjonene, men her er detaljene: At

$$\begin{aligned} \Phi(1_c, 0 \rightarrow 1) &= \phi_c \circ F(1_c) \\ &= \phi_c \circ 1_{F(c)} \\ &= \phi_c \end{aligned}$$

innebærer at sammensetningen

$$\mathcal{D}^{\mathcal{C} \times [1]}(F, G) \xrightarrow{\Omega} \{\Phi \text{ objekt i } \mathcal{D}^{\mathcal{C} \times [1]} \mid \Phi \circ i_0 = F \text{ og } \Phi \circ i_1 = G\} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{D}^{\mathcal{C} \times [1]}(F, G)$$

er identiteten. Hvis den andre sammensetningen sender Φ på Φ' via ϕ og hvis $f : c \rightarrow c'$ er en morfisme i \mathcal{C} , så er

$$\begin{aligned} \Phi'(f, 0 \rightarrow 1) &= \phi_{c'} \circ F(f) \\ &= \Phi(1_{c'}, 0 \rightarrow 1) \circ \Phi(f, 1_0) \\ &= \Phi((1_{c'}, 0 \rightarrow 1) \circ (f, 1_0)) \\ &= \Phi(f, 0 \rightarrow 1). \end{aligned}$$

□

Som annonsert har vi følgende resultat, som ble publisert av Segal i [Se68].

Proposisjon 4.5. *La \mathcal{C} og \mathcal{D} være små kategorier og $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktorer. Hvis $\phi : F \Rightarrow G$ er en naturlig transformasjon, så induserer den korresponderende funktoren $\Phi : \mathcal{C} \times [1] \rightarrow \mathcal{D}$ en simplisiell homotopi*

$$N(\mathcal{C}) \times \Delta[1] \rightarrow N(\mathcal{D})$$

fra NF til NG .

Bevis. En kan kontrollere at projeksjonene $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ og $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ gir opphav til en isomorfi

$$N(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \xrightarrow{\cong} N\mathcal{C} \times N\mathcal{D}.$$

Kombiner dette med lemma 4.4 på side 20. □

En simplisiell homotopi gir en (geometrisk) homotopi når vi går over til topologiske rom, så vi har følgende anvendelse.

Korollar 4.6. *Anta at \mathcal{C} og \mathcal{D} er små kategorier og la $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ være en ekvivalens. Da er*

$$|F| : |\mathcal{C}| \xrightarrow{\cong} |\mathcal{D}|$$

en homotopiekvivalens.

Bevis. Kombiner proposisjonen med resultatet som sier at hvis X og Y er simplisielle mengder, så er avbildningen

$$|X \times Y| \xrightarrow{\cong} |X| \times |Y|$$

med opphav i de geometriske realiseringene av projeksjonene $X \times Y \rightarrow X$ og $X \times Y \rightarrow Y$ en homeomorfi. En referanse er [FP90, proposisjon 4.3.15]. □

Definisjon Vi skal si at en liten kategori \mathcal{C} er **kontraktibel** hvis dens klassifiseringsrom $|\mathcal{C}|$ er kontraktibelt, og vi betegner dette med $\mathcal{C} \simeq *$.

Eksempel 2. En liten kategori med et initielt- eller et terminalt objekt er kontraktibel. Spesielt er det slik at en partielt ordnet mengde C er kontraktibel hvis den har et element z som er slik at vi for alle $x \in C$ har at $x \leq z$, eller hvis den har et element a slik at vi for alle $x \in C$ har at $a \leq x$.

Vi skal flere ganger komme til å havne i følgende situasjon.

Eksempel 3. Anta at (C, \leq) og (D, \leq) er partielt ordnede mengder og at $\varphi, \psi : (C, \leq) \rightarrow (D, \leq)$ er ordningsbevarende funksjoner. Se på φ og ψ

som funktorer $\Phi, \Psi : C \rightarrow D$. Hvis $\varphi \leq \psi$ har vi nøyaktig en morfisme $\varphi(x) \rightarrow \psi(x)$ for hvert objekt x i C . Hvis $x \rightarrow y$ er en morfisme i C kommuterer diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \varphi(x) & \longrightarrow & \psi(x) \\ \Phi(x \rightarrow y) \downarrow & & \downarrow \Psi(x \rightarrow y) \\ \varphi(y) & \longrightarrow & \psi(y) \end{array}$$

siden D har få morfismer, så vi har en naturlig transformasjon $\Phi \Rightarrow \Psi$. Med andre ord gir proposisjon 4.5 på forrige side oss en simplisiell homotopi fra $N\Phi$ til $N\Psi$.

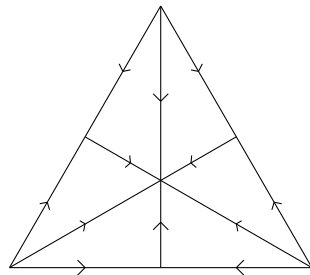
4.3 Normal oppdeling

Normal oppdeling av simplisielle mengder ble introdusert av Kan i [Ka57]. I definisjonen vi skal bruke inngår det en konstruksjon gjort av Barratt i [Ba56]. Vi skal følge fremgangsmåten i kapittel 2 i [WJR08], men se også [FP90, avsnitt 4.2 og 4.6]. I dette avsnittet skal vi tolke *simplisiell mengde* som en kontravariant funktor $\Delta \rightarrow Set$ og vi lar $sSet$ betegne kategorien av slike.

Hvis X er en simplisiell mengde kan vi gi X^\sharp den partielle ordningen \leq gitt ved

$$x \leq y \Leftrightarrow x \text{ er en fasett av } y.$$

Eksempel 4. De ikke-degenererte n -simpleksene til standard p -simplekset $\Delta[p]$ er nettopp fasettoperatorene $[n] \rightarrow [p]$. Hvis en oppfatter standard p -simplekset som et ordnet simplisialkompleks er $N(\Delta[p]^\sharp)$ den barysentriske oppdelingen av $\Delta[p]$. Geometrisk ser dette slik ut i tilfellet $p = 2$.



Vi betegner de ikke-degenererte simpleksene til $\Delta[2]$ i overensstemmelse med billedmengden. For eksempel betegnes simplekset $[1] \rightarrow [2]$ med billedmengde $\{0, 2\}$ med 02, så vi kan skrive

$$\Delta[p]^\sharp = \{0, 1, 2, 01, 12, 02, 012\}.$$

De syv ikke-degenererte simpleksene gir opphav til syv hjørner i det oppdelte 2-simplekset. Videre har vi tolv ikke-degenererte 1-simplekser, for eksempel

$$\begin{aligned} [1] &\rightarrow \Delta[2]^\sharp \\ 0 &\mapsto 1 \\ 1 &\mapsto 01, \end{aligned}$$

og seks ikke-degenererte 2-simplekser, for eksempel

$$\begin{aligned} [1] &\rightarrow \Delta[2]^\sharp \\ 0 &\mapsto 1 \\ 1 &\mapsto 12 \\ 2 &\mapsto 012, \end{aligned}$$

i det oppdelte 2-simplekset.

Fritsch og Piccinini beskriver overgangen mellom ordnede simplisialkomplekser og simplisielle mengder i oppgave 4.2.4. i [FP90]. Gitt et ordnet simplisialkompleks med simpleksmengde K så kan en definere den assosierte simplisielle mengden generert av alle elementene i K og under relasjonene $x\delta_i = x_i$ der x_i er fasetten av x , som en får ved å stryke i -te hjørne. På side 111 i samme bok definerer de den barysentriske oppdelingen av et simplisialkompleks. En kan vise at $N(X^\sharp)$ er den simplisielle mengden assosiert med den barysentriske oppdelingen hvis X er den simplisielle mengden assosiert med et ordnet simplisialkompleks.

Vi minner om *simplekskategorien* assosiert med en simplisiell mengde.

Definisjon Simplekskategorien, betegnet med $\mathit{simp}(X)$, er kategorien der objektene er parene $([n], x)$ for $x \in X_n$ og morfismene

$$([m], y) \rightarrow ([n], x)$$

er operatorene $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ slik at $y = x\alpha$.

Husk at en simplisiell mengde X sammen med de representerende avbildningene

$$\begin{aligned} \bar{x} &: \Delta[n] \rightarrow X \\ \gamma &\mapsto x\gamma, \end{aligned}$$

$x \in X_n$, danner en kogrense av diagrammet

$$\begin{aligned} \Upsilon X &: \mathit{simp}(X) \rightarrow \mathit{sSet} \\ ([n], x) &\mapsto \Delta[n]. \end{aligned}$$

Analogt med konstruksjonen over kan en ta oppdelte versjoner av simpleksene til en simplisiell mengde og lime dem ved hjelp av en kogrense. Resultatet blir den *normale oppdelingen*. Vi skal bruke den såkalte *Barratt-nerven* til

dette. La $f : X \rightarrow Y$ være en simplisiell avbildning. Anta at $x, y \in X^\sharp$ og at $x \leq y$. Hvis $x = y\mu$ er

$$f(x) = f(y\mu) = f(y)\mu.$$

La $f(x)^\sharp\rho$ og $f(y)^\sharp\sigma$ være de entydige dekomposisjonene av henholdsvis $f(x)$ og $f(y)$ i et ikke-degenerert simpleks og en degenerasjonsoperator. La $\mu'\sigma'$ være den entydige dekomposisjonen av $\sigma\mu$ i en degenerasjonsoperator etterfulgt av en fasettoperator. Vi har

$$f(x)^\sharp\rho = f(y)^\sharp\sigma\mu = f(y)^\sharp\mu'\sigma',$$

som medfører $f(x)^\sharp = f(y)^\sharp\mu'$, det vil si at $f(x)^\sharp$ en fasett av $f(y)^\sharp$. Med andre ord gir f opphav til en ordningsbevarende funksjon

$$\begin{aligned} f^\sharp : X^\sharp &\rightarrow Y^\sharp \\ x &\mapsto f(x)^\sharp. \end{aligned}$$

Definisjon Funktoren $B : sSet \rightarrow sSet$ gitt ved

$$B(X) = N(X^\sharp, \leq)$$

og

$$B(f) = N(f^\sharp, \leq)$$

kalles **Barrat-nerven**.

Nerver av partielt ordnede mengder er eksempler på ordnede simplisialkomplekser og ordnede simplisialkomplekser er ikke-singulære, så det er klart fra definisjonen at Barratt-nerven til en simplisiell mengde er ikke-singulær.

Eksempel 5. For et naturlig tall n kan en definere den **simplisielle n -sfæren** ved

$$S[n] = \Delta[n] \cup_{\delta\Delta[n]} \Delta[0].$$

Denne definisjonen innebærer at den geometriske realiseringen av $S[n]$ er n -sfæren siden adjunksjoner er bevart under geometrisk realisering. Den simplisielle n -sfæren kan også beskrives ved å ta en generator x i dimensjon n under relasjonene

$$x\delta_0 = \cdots = x\delta_n = x\varepsilon_0\omega,$$

der $\varepsilon_0 : [0] \rightarrow [n]$ er hjørneoperatoren gitt ved $0 \mapsto 0$. Den simplisielle n -sfæren har da to ikke-degenererte simplekser i ikke-negative dimensjoner, nemlig i x i dimensjon n og ett 0-simpleks som er fasett av x hvis $n > 0$. For $n > 0$ er derfor Barratt-nerven til $S[n]$ isomorf med $\Delta[1]$, så Barratt-nerven bevarer ikke nødvendigvis homotopitype.

Vi er klare til å definere normal oppdeling av en simplisiell mengde.

Definisjon Anta at X er en simplisiell mengde. Kogrensen

$$\operatorname{colim}_{\operatorname{simp}(X)}(B \circ \Upsilon X)$$

er den **normale oppdelingen av** X og betegnes med $Sd(X)$.

Gitt en simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ kan vi definere en funktor

$$\operatorname{simp}(f) : \operatorname{simp}(X) \rightarrow \operatorname{simp}(Y)$$

ved å ta et objekt $([n], x)$ til $([n], f(x))$ og en morfisme $\alpha : ([m], y) \rightarrow ([n], x)$ til $\alpha : ([m], f(y)) \rightarrow ([n], f(x))$ siden

$$f(y) = f(x\alpha) = f(x)\alpha,$$

så vi får en funktor

$$\operatorname{simp}(-) : sSet \rightarrow Cat$$

fra kategorien av simplisielle mengder til kategorien av små kategorier. For en simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ kommuterer følgende diagram.

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{simp}(X) & & \\ \downarrow \operatorname{simp}(f) & \searrow \Upsilon X & \\ & & sSet \\ & \nearrow \Upsilon Y & \\ \operatorname{simp}(Y) & & \end{array}$$

En kan bruke dette til å få dannet en avbildning $Sd(f) : Sd(X) \rightarrow Sd(Y)$ mellom kogrenser som gjør normal oppdeling til en funktor.

I neste kapittel skal vi begynne å studere avbildningen

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd(X) \times Sd(Y)$$

gitt ved å bruke normal oppdeling på projeksjonsavbildningene $X \times Y \rightarrow X$ og $X \times Y \rightarrow Y$. Vi nevnte i innledningen at det er nok å se på tilfellet der X og Y er standardsimplekser. Vi skal begrunne denne påstanden i kapittel 8 og en av ingrediensene er at Sd bevarer simplisielle adjunksjoner.

Lemma 4.7. *Normal oppdeling bevarer kofibreringer og kogrenser.*

Bevis. Vi refererer til lemma 2.2.9. i [WJR08]. En alternativ referanse er [FP90]. Korollar 4.2.9 sammen med lemma 4.6.2 i [FP90] viser at normal oppdeling bevarer kofibreringer. I følge proposisjon 4.2.12 i samme bok bevarer normal oppdeling også kogrenser. \square

Beskrivelsen av en simplisiell mengde X som kogrensen til diagrammet ΥX gjør det mulig å definere en avbildning $b_X : Sd(X) \rightarrow B(X)$. Avbildningen b_X er naturlig og dessuten har vi følgende resultat.

Lemma 4.8. *Den simplisielle avbildningen $b_X : Sd(X) \rightarrow B(X)$ er surjektiv for enhver simplisiell mengde X . Hvis X er ikke-singulær er b_X en isomorfi.*

Bevis. Se bevisene for lemma 2.2.10. og 2.2.11. i [WJR08]. □

Spesielt er nerven til en partielt ordnet mengde en ikke-singulær simplisiell mengde, noe vi vil utnytte i neste kapittel når vi studerer avbildningen

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd(X) \times Sd(Y)$$

i tilfellet der $X = \Delta[m]$ og $Y = \Delta[n]$.

5 Om forholdet mellom normal oppdeling og produkt av endelige simplisielle mengder

5.1 Introduksjon til problemstillingen

En simplisiell mengde sies å være **endelig** hvis den er generert av endelig mange simplekser. Hvis X og Y er endelige simplisielle mengder sier vi at en simplisiell avbildning $X \rightarrow Y$ er **simpel** hvis den er slik at ethvert inversbilde av et punkt i $|Y|$ er kontraktibelt, og vi betegner dette med $X \xrightarrow{\simeq_s} Y$. Normal oppdeling brukt på projeksjonene $X \times Y \rightarrow X$ og $X \times Y \rightarrow Y$ fra produktet av to simplisielle mengder X og Y ned på henholdsvis første og annen faktor gir oss avbildninger som kan kombineres i en simplisiell avbildning

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

fra oppdelingen av produktet til produktet av oppdelingene. Målet vårt er å vise at avbildningen over er simpel for endelige simplisielle mengder X og Y eller med andre ord at normal oppdeling av endelig produkt av endelige simplisielle mengder kommuterer med produkt opp til en simpel avbildning. Det vil vise seg at dette er riktig hvis det er riktig at den er simpel i det tilfellet der X og Y er standardsimplekser. Vi blir i stand til å begrunne denne siste påstanden etter kapittel 7 som dreier seg om simple avbildninger. Foreløpig skal vi bare studere

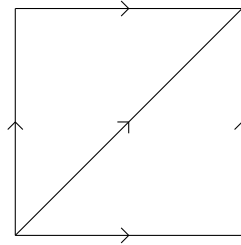
$$f : Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n].$$

Husk at $|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$ har en *CW*-struktur med en åpen r -celle for hvert ikke-degenererte r -simpleks. Vi skal i avsnitt 5.3 vise at inversbildet av enhver 0-celle i $|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$ er kontraktibelt. Senere, når vi skal vise at inversbildet av et punkt i en åpen r -celle er kontraktibelt for $r > 0$, skal vi bruke en konstruksjon kalt den *reduserte avbildningssylinderen* i tillegg til den *topologiske avbildningssylinderen*. Vi skal beskrive inversbildet av et punkt i en r -celle som en fiber under *sylinderkoordinatprojeksjonen* fra en r -foldig iterert redusert avbildningssylinder. Vi innfører den reduserte avbildningssylinderen i kapittel 9 og i kapitlet som følger viser vi at inversbildet av et punkt i en åpen r -celle er kontraktibelt. Hovedresultatet er formulert som korollar 10.16.

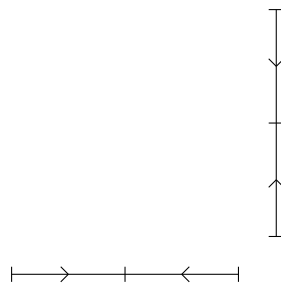
5.2 Ett geometrisk og ett kombinatorisk bilde

Det kan være nyttig å ha et geometrisk bilde av hva avbildningen f gjør. Det er enklest å danne seg et geometrisk bilde ved å la $m = n = 1$. Produktet

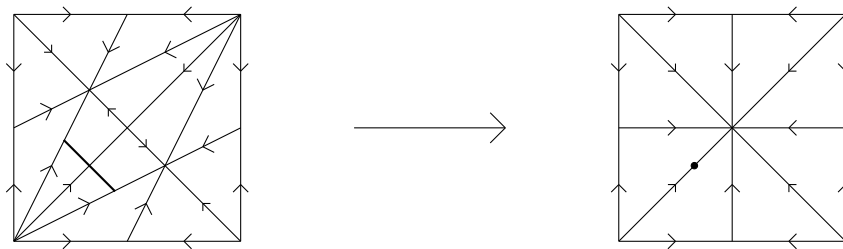
$\Delta[1] \times \Delta[1]$ ser slik ut.



og to kopier av $Sd \Delta[1]$ ser slik ut.



Vi får følgende bilde.



Det rombeformede området i midten av bildet av oppdelingen av produktet (figuren til venstre) kollapses til linjestykket som går fra hjørnet nederst til venstre til hjørnet øverst til høyre i bildet av produktet av oppdelingene (figuren til høyre). Hvis en velger et indre punkt p på denne diagonalen, som indikert på figuren til høyre, er fiberen $|f|^{-1}(p)$ linjestykket indikert av den tykke streken på figuren til venstre. Hvis en velger et punkt som ikke er et indre punkt på den nevnte diagonalen på figuren til høyre er fiberen bare ett punkt. Avbildningen f er derfor simpel i dette tilfellet. En funksjon

$$s : |Sd \Delta[1] \times Sd \Delta[1]| \rightarrow |Sd(\Delta[1] \times \Delta[1])|$$

som er slik at $f \circ s$ er identiteten er nødt til å sende p på et eller annet punkt $q \in |f|^{-1}(p)$, men uansett valg av punkt q er s ikke kontinuerlig. Et tverrsnitt av $|f|$ kunne vært nyttig for å vise at f er simpel, men et slikt eksisterer altså ikke.

Siden avbildningen $b_X : Sd(X) \rightarrow B(X)$, som vi definerte i forrige kapittel, er naturlig i X og en isomorfi for ikke-singulære simplisielle mengder X kan vi se på

$$f : Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

som avbildningen

$$B(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow B \Delta[m] \times B \Delta[n]$$

eller med andre ord

$$N((\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp) \xrightarrow{N(pr_1^\sharp) \times N(pr_2^\sharp)} N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp).$$

For de simplisielle mengdene

$$\Delta[m], \Delta[n] \text{ og } N([m] \times [n]),$$

som alle er nerver, er virkningen av operatorer sammensetning. Se på isomorfien

$$\Delta[m] \times \Delta[n] \xrightarrow{\cong} N([m] \times [n]),$$

som sender et simpleks (α, β) på den ordningsbevarende funksjonen

$$\begin{aligned} [k] &\rightarrow [m] \times [n] \\ j &\mapsto (\alpha(j), \beta(j)). \end{aligned}$$

Elementene i $(\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$ svarer nettopp til de injektive funksjonene

$$[k] \rightarrow [m] \times [n]$$

med $k \geq 0$, det vil si $(N([m] \times [n]))^\sharp$. En kan kontrollere at hvis $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in (\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$ svarer til henholdsvis γ og γ' under denne isomorfien, så er (α, β) en fasett av (α', β') hvis og bare hvis

$$\text{Im } \gamma \subseteq \text{Im } \gamma'.$$

Siden de injektive ordningsbevarende funksjonene

$$[k] \rightarrow [m] \times [n]$$

med $k \geq 0$ kan identifiseres med den partielt ordnede mengden $C^{m,n}$ av ikke-tomme kjeder i $[m] \times [n]$ har vi nå

$$(\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp \cong (N([m] \times [n]))^\sharp \cong C^{m,n}.$$

Vi skal forsøke å beskrive inversbildet av den simplisielle delmengden generert av ett enkelt simpleks i $Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$. Begrepet i den neste definisjonen blir nyttig. La

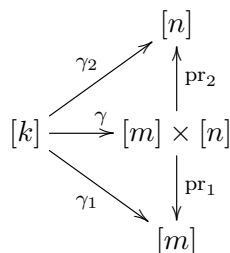
$$\text{pr}_1 : [m] \times [n] \rightarrow [m]$$

og

$$\text{pr}_2 : [m] \times [n] \rightarrow [n]$$

være projeksjonene.

Definisjon Anta at $k \geq 0$, at $\gamma : [k] \rightarrow [m] \times [n]$ er en ordningsbevarende funksjon og at μ og ν er fasettoperatorer med kodomene $[m]$ og $[n]$, henholdsvis. Vi sier at γ er en (μ, ν) -**vei av lengde** k hvis den er injektiv og slik at sammensetningen γ_1 fra diagrammet

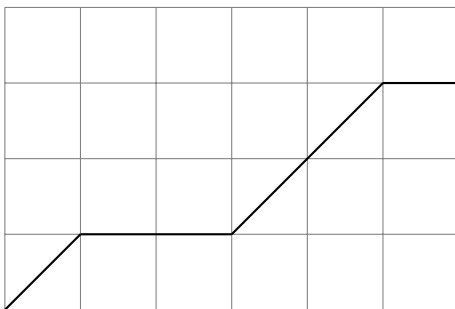


har billedmengde lik $\text{Im } \mu$ og slik at γ_2 har billedmengde lik $\text{Im } \nu$. Vi skal la $P^{\mu, \nu}$ betegne mengden av (μ, ν) -veier, ordnet under inklusjon på billedmengden. Hvis $(p, q) \in \text{Im } \gamma$ sier vi at γ **går innom** punktet (p, q) .

Eksempel 6. Husk at ι^p betegner identiteten $[p] \rightarrow [p]$, $p \geq -1$. For naturlige tall m og n skriver vi

$$P^{m, n} = P^{\iota^m, \iota^n}$$

og kaller elementene i $P^{m, n}$ for (m, n) -veier. Når en tenker på en (m, n) -vei er det nyttig å ha et bilde slik som figuren under i hodet.



Det vil si, det er lurt å tenke på (m, n) -veien som en kjede i den partielt ordnede mengden $[m] \times [n]$.

Vi kan identifisere $P^{\mu, \nu}$ med en partielt ordnet delmengde av $(\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$. I tillegg kan vi identifisere $P^{\mu, \nu}$ med en partielt ordnet delmengde av $C^{m, n}$. Noen ganger er det nyttig å se på et element i $(\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$ som en ordningsbevarende funksjon $[k] \rightarrow [m] \times [n]$ og andre ganger som en ikke-tom kjede i $[m] \times [n]$. Vi vil skifte mellom disse perspektivene ettersom det passer. Lemma 5.2 på neste side gir en beskrivelse av inversbildet til en simplisiell delmengde generert av et r -simpleks i $\text{Sd } \Delta[m] \times \text{Sd } \Delta[n]$, ved hjelp av disse nye objektene. Vi formulerer først et hjelperesultat.

Lemma 5.1. Anta at $\varphi : C \rightarrow D$ er en ordningsbevarende funksjon mellom partielt ordnede mengder og at $z \in ND$ er et q -simpleks. Da er inversbildet under $N\varphi$ av den simplisielle delmengden av ND generert av z lik nerven til $\varphi^{-1}(\text{Im } z)$.

Bevis. Anta først at $x \in NC$ er et p -simpleks slik at $N\varphi(x) = z\alpha$ for en eller annen operator $\alpha : [p] \rightarrow [q]$ og at $i \in [p]$. Da er $x(i) \in \varphi^{-1}(\text{Im } z)$ ettersom

$$\varphi \circ x(i) = z \circ \alpha(i) \in \text{Im } z.$$

Omvendt, anta at x er et p -simpleks i NC som er inneholdt i nerven til $\varphi^{-1}(\text{Im } z)$ og la $\gamma_j = z(j)$. For hver $i \in [p]$, velg en $k_i \in [q]$ slik at $x(i) \in \varphi^{-1}(\gamma_{k_i})$. Definer funksjonen

$$\alpha : [p] \rightarrow [q]$$

ved $i \mapsto k_i$. Anta at $i, j \in [p]$ er slik at $i < j$. Siden $\varphi \circ x$ er ordningsbevarende er

$$\gamma_{k_i} = \varphi \circ x(i) \leq \varphi \circ x(j) = \gamma_{k_j},$$

det vil si at $k_i \leq k_j$ siden $[q]$, som er domenet til z , er totalt ordnet. Dermed er α en operator og vi har ved definisjonen av α at hvis $i \in [p]$, så er

$$\varphi \circ x(i) = \gamma_{k_i} = \gamma_{\alpha(i)} = z \circ \alpha(i).$$

Det følger at $N\varphi(x) = z\alpha$. □

Lemma 5.2. Anta at (z, w) er et r -simpleks i $Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$. For $0 \leq j \leq r$, la $z_j = z(j)$ og $w_j = w(j)$. Inversbildet under

$$f : Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

av den simplisielle delmengden generert av (z, w) er nerven til den partielt ordnede delmengden

$$P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}$$

av $(\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$.

Bevis. Vi har det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} N((\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp) & \xrightarrow{f} & N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp) \\ & \searrow N(pr_1^\sharp \times pr_2^\sharp) & \nearrow \cong \\ & & N(\Delta[m]^\sharp \times \Delta[n]^\sharp) \end{array}$$

der pr_1 og pr_2 betegner projeksjonene $\Delta[m] \times \Delta[n] \rightarrow \Delta[m]$ og $\Delta[m] \times \Delta[n] \rightarrow \Delta[n]$, henholdsvis. Det er slik at den ordningsbevarende funksjonen $pr_1^\sharp \times pr_2^\sharp$ sender et element $\gamma \in \Delta[m]^\sharp \times \Delta[n]^\sharp$ på et element $(\mu, \nu) \in \Delta[m]^\sharp \times \Delta[n]^\sharp$

hvis og bare hvis γ_1 har billedmengde lik $\text{Im } \mu$ og γ_2 har billedmengde lik $\text{Im } \nu$, ettersom

$$pr_1^\# \times pr_2^\#(\gamma) = (\gamma_1^\#, \gamma_2^\#).$$

Med andre ord er

$$(pr_1^\# \times pr_2^\#)^{-1}((\mu, \nu)) = P^{\mu, \nu}.$$

Av lemma 5.1 på forrige side følger det da at inversbildet under $N(pr_1^\# \times pr_2^\#)$ av den simplisielle delmengden av $N(\Delta[m]^\# \times \Delta[n]^\#)$ som svarer til den simplisielle delmengden av $N(\Delta[m]^\#) \times N(\Delta[n]^\#)$ generert av (z, w) er lik

$$N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}).$$

□

Et 0-simpleks i $\text{Sd } \Delta[m] \times \text{Sd } \Delta[n]$ svarer til et par (μ, ν) av fasettoperatorer med kodomene $[m]$ og $[n]$, henholdsvis. Lemmaet over innebærer at $NP^{\mu, \nu}$ er fiberen over 0-simplekset (μ, ν) under f . Vi lar (β_m, β_n) betegne 0-simplekset i $\text{Sd } \Delta[m] \times \text{Sd } \Delta[n]$ som svarer til paret (ι^m, ι^n) . Med andre ord ligger fiberen $NP^{m, n}$ over barysenteret (β_m, β_n) . Det følger av det neste lemmaet at det å vise at $P^{m, n}$ er kontraktibel blir et viktig delproblem.

Lemma 5.3. *La (μ, ν) være et 0-simpleks i $\text{Sd } \Delta[m] \times \text{Sd } \Delta[n]$ slik at $\dim \mu = k$ og $\dim \nu = l$. Da er fiberne over (μ, ν) og (β_k, β_l) , under henholdsvis*

$$\text{Sd}(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow \text{Sd } \Delta[m] \times \text{Sd } \Delta[n]$$

og

$$\text{Sd}(\Delta[k] \times \Delta[l]) \rightarrow \text{Sd } \Delta[k] \times \text{Sd } \Delta[l],$$

isomorfe.

Bevis. Vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} NP^{k, l} & \longrightarrow & \Delta[0] \\ \downarrow & & \downarrow \overline{(\iota^k, \iota^l)} \\ B(\Delta[k] \times \Delta[l]) & \longrightarrow & B(\Delta[k]) \times B(\Delta[l]) \\ \downarrow B(\bar{\mu} \times \bar{\nu}) & & \downarrow B(\bar{\mu}) \times B(\bar{\nu}) \\ B(\Delta[m] \times \Delta[n]) & \longrightarrow & B(\Delta[m]) \times B(\Delta[n]) \\ \uparrow & & \uparrow \overline{(\mu, \nu)} \\ NP^{\mu, \nu} & \longrightarrow & \Delta[0] \end{array}$$

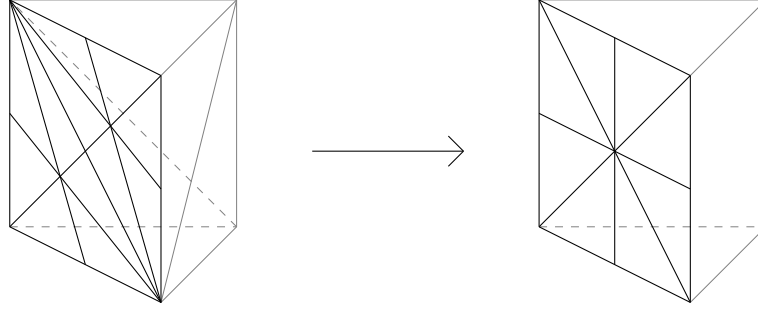
med opphav i de representerende avbildningene $\bar{\mu}$ og $\bar{\nu}$. La for eksempel $\mu : [1] \rightarrow [2]$ være den elementære fasettoperatoren δ_1 og la $\nu : [1] \rightarrow [1]$ være identiteten. Se på avbildningen

$$B(\Delta[2] \times \Delta[1]) \rightarrow B \Delta[2] \times B \Delta[1].$$

Det som skjer på den ene kanten til prismet $\Delta[2] \times \Delta[1]$ er geometrisk det samme som avbildningen

$$B(\Delta[1] \times \Delta[1]) \rightarrow B \Delta[1] \times B \Delta[1]$$

foretar seg, så vi har følgende bilde.



Tilbake til det generelle tilfellet. Avbildningen

$$B(\Delta[k] \times \Delta[l]) \xrightarrow{B(\bar{\mu} \times \bar{\nu})} B(\Delta[m] \times \Delta[n]).$$

er nerven til den ordningsbevarende funksjonen

$$(\Delta[k] \times \Delta[l])^\# \xrightarrow{(\bar{\mu} \times \bar{\nu})^\#} (\Delta[m] \times \Delta[n])^\#.$$

Vi har for alle $\gamma \in (\Delta[k] \times \Delta[l])^\#$ at

$$(\bar{\mu} \times \bar{\nu})^\#(\gamma) = \bar{\mu} \times \bar{\nu}(\gamma)^\# = (\mu\gamma_1, \nu\gamma_2)^\# = (\mu\gamma_1, \nu\gamma_2)$$

siden γ er ikke-degenerert og siden μ og ν er fasettoperatorer. Hvis $\gamma \in P^{k,l}$ må $(\mu\gamma_1, \nu\gamma_2) \in P^{\mu,\nu}$, så vi får induisert en funksjon

$$P^{k,l} \rightarrow P^{\mu,\nu}.$$

Med andre ord har vi en faktorisering

$$\begin{array}{ccc} NP^{k,l} & \longrightarrow & B(\Delta[k] \times \Delta[l]) \\ \downarrow & & \downarrow B(\bar{\mu} \times \bar{\nu}) \\ NP^{\mu,\nu} & \longrightarrow & B(\Delta[m] \times \Delta[n]) \end{array}$$

Vi har den ordningsbevarende funksjonen

$$\begin{aligned} P^{\mu,\nu} &\rightarrow P^{k,l} \\ \gamma &\mapsto (\gamma_1^b, \gamma_2^b) \end{aligned}$$

som går i motsatt retning. Anta at γ er en (μ, ν) -vei av lengde t . Da er $\text{Im } \gamma_1 = \text{Im } \mu$ og $\text{Im } \gamma_2 = \text{Im } \nu$. To fasettoperatorer med samme kodomene

og samme billedmengde er like, derfor er $\gamma_1^\sharp = \mu$ og $\gamma_2^\sharp = \nu$. Det følger at sammensetningen

$$P^{\mu,\nu} \rightarrow P^{k,l} \rightarrow P^{\mu,\nu}$$

er identiteten. Hvis nå $\gamma \in P^{k,l}$ er γ_1 og γ_2 degenerasjonsoperatorer. Under $P^{\mu,\nu} \rightarrow P^{k,l}$ sendes γ på $(\mu\gamma_1, \nu\gamma_2)$ og siden det kun finnes en faktorisering av en operator i en degenerasjonsoperator etterfulgt av en fasettoperator er $(\mu\gamma_1)^\flat = \gamma_1$ og $(\nu\gamma_2)^\flat = \gamma_2$. Dermed er sammensetningen

$$P^{k,l} \rightarrow P^{\mu,\nu} \rightarrow P^{k,l}$$

også identiteten, altså har vi en isomorfi

$$NP^{k,l} \xrightarrow{\cong} NP^{\mu,\nu}.$$

□

5.3 Et delproblem

I forrige avsnitt ble vi ledet til å studere den simplisielle delmengden $NP^{m,n}$ av $B(\Delta[m] \times \Delta[n])$. Husk at en (m, n) -vei av lengde k er en injektiv ordningsbevarende funksjon $\gamma : [k] \rightarrow [m] \times [n]$ som er slik at γ_1 og γ_2 i diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} & & & & [n] \\ & & & \nearrow \gamma_2 & \uparrow \text{pr}_2 \\ [k] & \xrightarrow{\gamma} & [m] \times [n] & & \\ & & \searrow \gamma_1 & & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & & & [m] \end{array}$$

er degenerasjonsoperatorer. Når vi tenker på γ som en ikke-tom kjede i gitteret $[m] \times [n]$ svarer dette til at kjeden inneholder et punkt i hver kolonne og hver rad. Hvis

$$\gamma(j) = (p, q)$$

for en eller annen j med $0 \leq j < k$ må $\gamma(j+1)$ være lik $(p+1, q)$, $(p+1, q+1)$ eller $(p, q+1)$, det vil si at (m, n) -veiene tar *steg* av typen $(1, 0)$, $(1, 1)$ og $(0, 1)$ i gitteret $[m] \times [n]$. Hvor mange (m, n) -veier finnes det? Anta for det formål å regne ut antallet at $m \geq n$. Dersom en vei tar j steg av typen $(0, 1)$ må den også ta $n - j$ steg av typen $(1, 1)$. Det gjenstår bare å ta $(m - n) + j$ steg av typen $(1, 0)$ for å nå frem til (m, n) . Totalt tar veien

$$((m - n) + j) + (n - j) + j = m + j$$

steg. Det følger at det finnes $\binom{m+j}{m-n+j, n-j, j}$ veier av lengde $m + j$ og

$$\sum_{j=0}^n \binom{m+j}{m-n+j, n-j, j}$$

veier totalt.

Proposisjon 5.4. *For ethvert par (m, n) av naturlige tall, er kategorien $P^{m, n}$ kontraktibel.*

Bevis. Vi skal bruke en dobbel induksjon på m og n . Observer at $P^{m, 0}$ og $P^{0, n}$ er kontraktible for alle m og alle n siden disse bare består av ett element. Anta at m og n er naturlige tall med $m > 0$ og som er slik at $P^{m, n}$ er kontraktibel. Vi skal vise at $P^{m, n+1}$ er kontraktibel. Ideen er å gradvis begrense området der veiene får lov til å *bevege seg*. Dette vil gi oss en deformasjonsretraksjon av $|P^{m, n+1}|$ ned på et rom som er homeomorft med $|P^{m, n}|$. For $0 \leq j \leq m$, la

$$K_j = [m] \times [n+1] \setminus \{(0, n+1), \dots, (j-1, n+1)\}.$$

Spesielt er $K_0 = [m] \times [n+1]$. For $0 \leq j \leq m$, la R_j være $(m, n+1)$ -veiene som har billedmengde inneholdt i K_j og som går innom (j, n) hvis de går innom $(j, n+1)$. For $0 \leq j < m$, la Q_j være $(m, n+1)$ -veiene som har billedmengde inneholdt i K_{j+1} . En $\gamma \in Q_j$ går ikke innom $(j, n+1)$ siden den har billedmengde inneholdt i $K_{j+1} \subseteq K_j$ og dermed er $\gamma \in R_j$, så vi har inklusjoner

$$P^{m, n+1} = R_0 \supseteq Q_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq Q_{m-1} \supseteq R_m.$$

Dessuten er R_m den partielt ordnede delmengden av $P^{m, n+1}$ bestående av de veiene som går innom punktet (m, n) . Det følger at vi kan identifisere

$$R_m \cong P^{m, n} \times P^{0, 1}.$$

Observer at hvis $\gamma \in R_j$ går innom punktet $(j, n+1)$ for en j med $0 \leq j < m$, så går den også innom $(j+1, n+1)$. Hvis γ ikke hadde gått innom $(j+1, n+1)$ måtte den ha gått innom et punkt $(j+1, k)$ for en $k < n+1$ siden den skal innom hver kolonne. Dette er umulig siden $(j, n+1)$ og $(j+1, k)$ ikke er sammenliknbare. Videre er det slik at hver $\gamma \in R_j$ har billedmengde inneholdt i

$$K_{j+1} \cup \{(j, n+1)\},$$

så vi kan definere funksjonen

$$\begin{aligned} h_j : R_j &\rightarrow Q_j \\ \gamma &\mapsto \text{Im } \gamma \setminus \{(j, n+1)\} \end{aligned}$$

for $0 \leq j < m$. En kan kontrollere at funksjonen h_j er ordningsbevarende. For $0 < j \leq m$ kan vi definere en funksjon

$$g_j : Q_{j-1} \rightarrow R_j,$$

ved

$$g_j(\gamma) = \begin{cases} \text{Im } \gamma \cup \{(j, n)\}, & (j, n+1) \in \text{Im } \gamma \\ \gamma, & \text{ellers.} \end{cases}$$

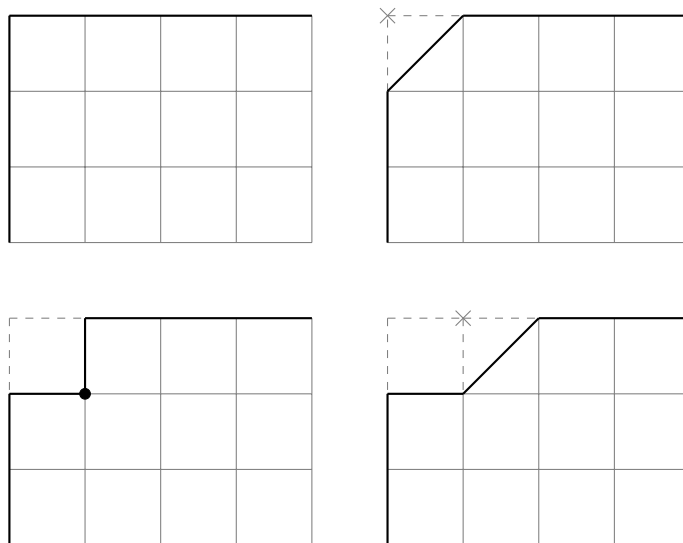
Hvorfor er g_j veldefinert? Anta at $\gamma \in Q_{j-1}$. Da har γ billedmengde inneholdt i K_j , så hvis γ ikke går innom $(j, n+1)$ er $\gamma \in R_j$. Det gjenstår å se på tilfellet der γ går innom $(j, n+1)$. Siden billedmengden til γ er inneholdt i K_j kan den ikke gå innom $(j-1, n+1)$, men er i stedet nødt til å gå innom ett eller flere av punktene $(j-1, k)$ med $0 \leq k \leq n$. Vi må derfor ha at

$$\text{Im } \gamma \cup \{(j, n)\}$$

er totalt ordnet. En kan igjen kontrollere at g_j er ordningsbevarende. Vi har nå sekvensen

$$R_0 \xrightarrow{h_0} Q_0 \xrightarrow{g_1} R_1 \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_{m-1}} Q_{m-1} \xrightarrow{g_m} R_m. \quad (1)$$

Hvis $m = 4$ og $n = 2$ illustrerer følgende figur effekten av å bruke funksjonene h_0 , g_1 og h_1 på veien som går innom $(0, 3)$.



Vi har annenhver gang et forbud og et påbud. Først forbys veien å gå innom punktet $(0, 3)$ og den blir i neste omgang påbudt å gå innom $(1, 2)$ før den deretter tvinges utenom $(1, 3)$. For $0 < j \leq m$, la $g'_j : R_j \rightarrow Q_{j-1}$ være inklusjonen. Sammensetningen

$$R_j \xrightarrow{g'_j} Q_{j-1} \xrightarrow{g_j} R_j$$

er identiteten siden elementer i R_j allerede går innom punktet (j, n) hvis de går innom $(j, n+1)$. Det er klart fra definisjonen av g_j at

$$g'_j \circ g_j \geq 1_{Q_{j-1}}.$$

Tilsvarende lar vi, for $0 \leq j < m$, $h'_j : Q_j \rightarrow R_j$ være inklusjonen. Sammensetningen

$$Q_j \xrightarrow{h'_j} R_j \xrightarrow{h_j} Q_j$$

er identiteten siden $(j, n+1) \notin K_{j+1}$. Det er klart fra definisjonen av h_j at

$$h'_j \circ h_j \leq 1_{R_j}.$$

Det følger at (1) er en sekvens av ekvivalenser av små kategorier og ved korollar 4.6 har vi dermed

$$|P^{m,n+1}| \simeq |R_m| \cong |P^{m,n} \times P^{0,1}|.$$

Se nå på $P^{m+1,n}$. Isomorfien

$$\begin{aligned} [m] \times [n] &\xrightarrow{\cong} [n] \times [m] \\ (i, j) &\mapsto (j, i) \end{aligned}$$

gir oss en isomorfi $P^{n,m} \cong P^{m,n}$, så ettersom $P^{m,n}$ er kontraktibel er $P^{n,m}$ det også. Gjenbruk av resonnementet over viser at $P^{n,m+1}$ er kontraktibel og

$$P^{m+1,n} \cong P^{n,m+1}.$$

□

Som annonsert har vi nå følgende resultat.

Korollar 5.5. *Ethvert inversbilde av en 0-celle i CW-komplekset*

$$|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$$

under avbildningen

$$|f| : |Sd(\Delta[m] \times \Delta[n])| \rightarrow |Sd\Delta[m] \times Sd\Delta[n]|$$

er kontraktibelt.

Bevis. Kombiner proposisjonen med lemma 5.3. □

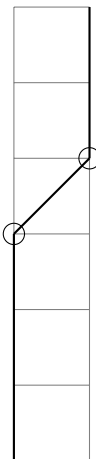
Vi skal gi et alternativt bevis for proposisjon 5.4 som det kan være verdt å se på, i alle fall før en ser på beviset for proposisjon 10.13 der vi i en viss forstand skal generalisere resultatet. Vi vil først trenge noen hjelperesultater, men disse kommer uansett til nytte i avsnitt 10.4.

Lemma 5.6. *Enhver (m, n) -vei går innom punktene $(0, 0)$ og (m, n) .*

Bevis. Anta at γ er en (m, n) -vei som ikke går innom $(0, 0)$. Husk at γ kan sees på som en ikke-tom kjede i $[m] \times [n]$ som inneholder minst ett punkt i hver kolonne og minst ett punkt i hver rad. Vi må derfor ha at γ går innom $(j, 0)$ for en j med $0 < j \leq m$. Samtidig må γ gå innom $(0, k)$ for en k med $0 < k \leq n$. Men $(j, 0)$ og $(0, k)$ er ikke sammenliknbare, så dette er umulig. Et analogt argument viser at enhver (m, n) -vei går innom punktet (m, n) . \square

Lemma 5.7. *Enhver $(1, n)$ -vei går innom de to punktene $(0, j)$ og $(1, j + 1)$ for en j med $0 \leq j < n$.*

Bevis. Følgende figur illustrerer påstanden vår. Her går en $(1, 6)$ -vei innom punktene $(0, 3)$ og $(1, 4)$.



Anta at γ er en $(1, n)$ -vei. I følge lemma 5.6 går γ innom punktet $(1, n)$. Anta at $(1, k)$ er det minste elementet i $[m] \times [n]$, med førstekoordinat lik 1, som γ går innom. Hvis $k = 0$ kan ikke γ gå innom $(0, 1)$ siden $(1, 0)$ og $(0, 1)$ ikke er sammenliknbare. Dermed må γ gå innom $(1, 1)$ siden γ skal innom et punkt i hver rad, og ved lemma 5.6 går γ innom $(0, 0)$, så påstanden vår holder i dette tilfellet. Se på tilfellet $k > 0$. Ved hypotesen vår går γ ikke innom $(1, k - 1)$. Det betyr at γ går innom $(0, k - 1)$ siden γ må gå innom minst ett punkt i hver rad, så påstanden vår holder i dette tilfellet også. \square

Det alternative beviset bruker følgende observasjon.

Lemma 5.8. *La C være en partielt ordnet mengde og anta at C_1 og C_2 er filtre i C . Da er*

$$N(C_1 \cup C_2) = NC_1 \cup NC_2.$$

Bevis. Anta at $x : [p] \rightarrow C_1 \cup C_2$ er et simpleks i $N(C_1 \cup C_2)$. Anta at $x(0) \in C_j$, der $j = 1$ eller $j = 2$. Vi har at

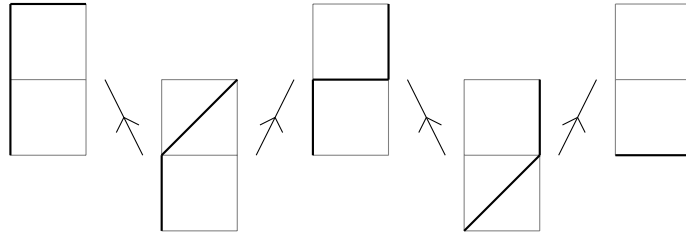
$$x(0) \leq x(1) \leq \dots \leq x(p)$$

og siden C_j er et filter må $x(1), \dots, x(p) \in C_j$, det vil si at $x \in NC_j$. \square

Alternativt bevis for proposisjon 5.4. Vi viser at $P^{m,n}$ er kontraktibel ved en dobbel induksjon på m og n .

Grunntrinn:

Vi vet at den partielt ordnede mengden $P^{1,0}$ består av bare ett punkt, så anta at $n > 0$. Som del av grunntrinnet i induksjonen skal vi vise at $P^{1,n}$ er kontraktibel. Legg merke til at den partielt ordnede mengden $P^{1,n}$ har følgende struktur i tilfellet $n = 2$.



Den geometriske realiseringen av $NP^{1,2}$ er fire 1-simplekser limt sammen i tre punkter slik som den partielle ordningen dikterer og er derfor homeomorf med et linjestykke. Det er ganske klart at $P^{1,n}$ er kontraktibel for alle n , men vi skal gi et argument hvis ide gjenbrukes i beviset for proposisjon 10.13. La Q_j , $0 \leq j < n$, være den partielt ordnede delmengden av $P^{1,n}$ bestående av de veiene som går innom $(0, j)$ og $(1, j+1)$. Da er $\{Q_j\}_{0 \leq j < n}$ en overdekning av $P^{1,n}$ i følge lemma 5.7 og siden Q_j , $0 \leq j < n$, er et filter i $P^{1,n}$ er $\{NQ_j\}_{0 \leq j < n}$ en overdekning av $NP^{1,n}$. Den partielt ordnede mengden Q_j har et initielt element, nemlig veien som går innom punktene

$$(0, 0), \dots, (0, j), (1, j+1), \dots, (1, n),$$

og er derfor kontraktibel. Dessuten, hvis $j+1 < n$ ser vi på snittet $Q_j \cap Q_{j+1}$. Det er kun en vei som er inneholdt der, nemlig den som går innom

$$(0, 0), \dots, (0, j), (0, j+1), (1, j+1), (1, j+2), \dots, (1, n)$$

og derfor er $Q_j \cap Q_{j+1}$ kontraktibel. Hvis $j+2 < n$ kan vi se på snittet $Q_j \cap Q_{j+2}$. Dette er tomt siden ingen vei kan gå innom begge de to punktene $(1, j+1)$ og $(0, j+2)$. For alle j med $0 \leq j < n$ har vi siden

$$(Q_0 \cup \dots \cup Q_j) \cap Q_{j+1} = (Q_0 \cap Q_{j+1}) \cup \dots \cup (Q_j \cap Q_{j+1}) = Q_j \cap Q_{j+1}$$

at

$$|Q_0 \cup \dots \cup Q_j| \cap |Q_{j+1}| = |(Q_0 \cup \dots \cup Q_j) \cap Q_{j+1}| = |Q_j \cap Q_{j+1}| \simeq *.$$

Ettersom $Q_0 \cup \dots \cup Q_j$ og Q_{j+1} er filtre i $P^{1,n}$ er

$$N(Q_0 \cup \dots \cup Q_j) \cup NQ_{j+1} = N((Q_0 \cup \dots \cup Q_j) \cup Q_{j+1})$$

som medfører

$$|Q_0 \cup \dots \cup Q_j| \cup |Q_{j+1}| = |(Q_0 \cup \dots \cup Q_j) \cup Q_{j+1}|.$$

Nå kan vi appellere til resultatet i oppgave 0.23 i [Ha01] som sier at et CW-kompleks som er unionen av to kontraktible underkomplekser hvis snitt er kontraktibelt, er selv kontraktibelt. Beviset for dette resultatet bruker at hvis (X, A) er et par av topologiske rom der A er kontraktibelt og hvis $i : A \rightarrow X$ er en kofibrering, så er kvotientavbildningen $X \rightarrow X/A$ en homotopiekvivalens. En induksjon på j gir at $|P^{1,n}|$ er kontraktibelt.

Induksjonstrinn:

For naturlige tall $m > 0$ og $n' > 0$, anta at $P^{s,t}$ er kontraktibel for $s \leq m$ og $t \leq n'$ og se på $P^{m+1,n}$ med

$$0 < n \leq n'.$$

En kan lage en overdekning $\{Q_j\}_{0 \leq j \leq n}$ av $P^{m+1,n}$ ved å la Q_j være den partielt ordnede delmengden av $P^{m+1,n}$ bestående av $(m+1, n)$ -veiene som går innom punktet (m, j) . I tilfellet der $m = n = 1$ består overdekningen av to mengder med opphav i de to punktene $(1, 0), (1, 1) \in [2] \times [1]$. Vi har at Q_j et filter i $P^{m+1,n}$ og ved lemmaet over medfører dette at $\{N(Q_j)\}_{0 \leq j \leq n}$ er en overdekning av $NP^{m+1,n}$. Hvis $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n$ er

$$Q_{i_0} \cap Q_{i_k} = Q_{i_0} \cap \dots \cap Q_{i_k}.$$

En kan identifisere $Q_j \cong P^{m,j} \times P^{1,n-j}$ og for $0 \leq i < j \leq n$ kan en identifisere $Q_i \cap Q_j \cong P^{m,i} \times P^{0,j-i} \times P^{1,n-j}$, så Q_j og $Q_i \cap Q_j$ er kontraktible. Med andre ord er alle snitt av de partielt ordnede mengdene som forekommer i overdekningen kontraktible. Vi har at

$$Q_0 \cap Q_{j+1} \subseteq Q_1 \cap Q_{j+1} \subseteq \dots \subseteq Q_j \cap Q_{j+1}$$

som medfører

$$(Q_0 \cup \dots \cup Q_j) \cap Q_{j+1} = Q_j \cap Q_{j+1}$$

og at $Q_0 \cup \dots \cup Q_j$ og Q_{j+1} er filtre i $P^{m+1,n}$. Ved igjen å bruke at et CW-kompleks som er unionen av to kontraktible underkomplekser hvis snitt er kontraktibelt, selv er kontraktibelt, kan vi vise at $P^{m+1,n}$ er kontraktibel ved en tilsvarende induksjon som under gruntrinnet der vi viste at $P^{1,n}$ er kontraktibel. \square

Vi kommer som nevnt tilbake til problemet med å vise at

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

er simpel for alle endelige simplisielle mengder X og Y etter et kapittel om den topologiske avbildningssylinderen og et kapittel om simple avbildninger.

6 Topologisk avbildningssylinder

Vi trenger å vite litt om den topologiske avbildningssylinderen. Vi skal bruke resultater fra dette kapittelet både i neste kapittel, som handler om simple avbildninger, og i beviset for at

$$\text{Sd}(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow \text{Sd} \Delta[m] \times \text{Sd} \Delta[n]$$

er simpel. Vi minner om at hvis X og Y er topologiske rom og hvis en har en avbildning $f : X \rightarrow Y$, så er **avbildningssylinderen** $T(f)$ definert som pushout av diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & & \\ X \times I & & \end{array}$$

der $I = [0, 1]$ er enhetsintervallet og $i_0 : X \rightarrow X \times I$ sender x på $(x, 0)$. Det vil si at en kan behandle $T(f)$ som identifikasjonsrommet

$$X \times I \sqcup Y / (x, 0) \sim f(x).$$

Diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & & \\ i_0 \downarrow & & \bar{i}_0 \downarrow & & \searrow 1 \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & T(f) & \xrightarrow{pr} & Y \\ & \searrow pr_1 & & \swarrow & \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

gir oss **syylinderprojeksjonen** $pr : T(f) \rightarrow Y$. Legg merke til at punktinversonene $pr^{-1}(y)$, $y \in Y$, til syylinderprojeksjonen er kjeglene

$$f^{-1}(y) \times I / f^{-1}(y) \times \{0\}.$$

Prossessen der en danner avbildningssylinderen kan itereres. La

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_r} X_r$$

være en sekvens av $r > 1$ avbildninger. Hvis vi for en k med $1 < k + 1 \leq r$ er gitt avbildningssylinderen $T(f_{k+1}, \dots, f_r)$ dannet fra avbildningene f_{k+1}, \dots, f_r kan vi definere avbildningssylinderen $T(f_k, \dots, f_r)$ som avbildningssylinderen til sammensetningen

$$T(f_{k+1}, \dots, f_r) \xrightarrow{pr} X_k \xrightarrow{f_k} X_{k-1}.$$

Vi får dannet sylindereprojeksjonen $T(f_k, \dots, f_r) \rightarrow X_{k-1}$. Den rekursivt definerte avbildningssylindere $T(f_1, \dots, f_r)$ er den **r -foldige itererte avbildningssylindere** til sekvensen over. Vi skal betegne den itererte avbildningssylindere til sekvensen

$$* \leftarrow * \leftarrow \dots \leftarrow *$$

av r avbildninger mellom ettpunktsrom med T^r . Legg merke til at et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

gir opphav til en avbildning av pushouts $T(f) \rightarrow T(f')$. Spesielt, hvis vi har en sekvens

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_r} X_r$$

av avbildninger, så kommuterer diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X_r & \xrightarrow{f_r} & X_{r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & * \end{array}$$

som betyr at vi rekursivt kan bruke diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc} T(f_2, \dots, f_r) \times I & \longleftarrow & T(f_2, \dots, f_r) & \xrightarrow{pr} & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T^{r-1} \times I & \longleftarrow & T^{r-1} & \longrightarrow & * & & * \end{array}$$

til å danne en avbildning $T(f_1, \dots, f_r) \rightarrow T^r$, kalt **sylinderkoordinatprojeksjonen**. Vi vil senere få bruk for følgende resultat.

Lemma 6.1. *La*

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_r} X_r$$

være en sekvens av r avbildninger. Enhver punktinvær til avbildningen $T(f_1, \dots, f_r) \rightarrow T^r$ er homeomorf med ett av rommene X_0, \dots, X_r .

Bevis. Se først på avbildningen $T(f_r) \rightarrow T^1$. Den stammer fra diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X_r \times I & \longleftarrow & X_r \xrightarrow{f_r} X_{r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ * \times I & \longleftarrow & * \longrightarrow * \end{array}$$

og T^1 er bare enhetsintervallet I . Vi ser at ethvert punkt i underrommet $T(f_r) \setminus X_{r-1}$ av $T(f_r)$ sendes på et punkt forskjellig fra 0 under $T(f_r) \rightarrow T^1$. Dessuten sendes hele X_{r-1} til 0, så det følger at inversbildet av 0 er nettopp underrommet identifisert med X_{r-1} . Anta at $t \in I$ er forskjellig fra 0. Vi har at inversbildet av t er inneholdt i $T(f_r) \setminus X_{r-1}$. Inversbildet av t under

$$X_r \times I \rightarrow T^r$$

består nettopp av punktene (x, t) for alle $x \in X_r$, det vil si det er homeomorft med X_r . Den karakteristiske avbildningen $X_r \times I \rightarrow T(f_r)$ induserer en homeomorfi

$$X_r \times I \setminus X_r \times \{0\} \xrightarrow{\cong} T(f_r) \setminus X_{r-1},$$

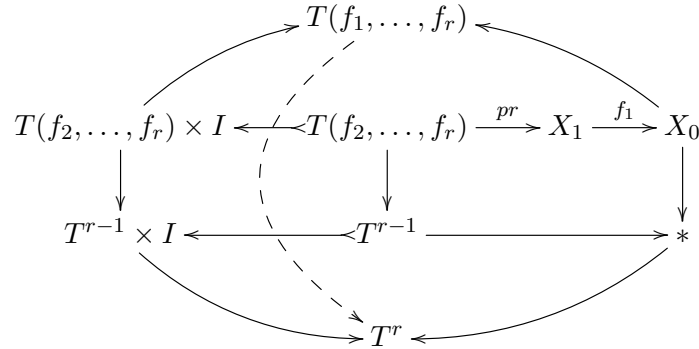
så det følger at inversbildet under $T(f_r) \rightarrow T^1$ er homeomorft med X_r . Hvis $r = 1$ er vi ferdige, så anta at $r > 1$. Anta at vi har vist at hver punkt invers til avbildningen

$$T(f_2, \dots, f_r) \rightarrow T^{r-1}$$

er homeomorft med ett av rommene X_1, \dots, X_r . Vi skal vise at den tilsvarende påstanden er riktig for sylinderkoordinatprojeksjonen

$$T(f_1, \dots, f_r) \rightarrow T^r$$

med opphav i følgende diagram.



Vi kan se på T^r som identifikasjonsrommet

$$T^r = T^{r-1} \times I \sqcup * / (z, 0) \sim *.$$

Under den sammensatte avbildningen

$$T(f_2, \dots, f_r) \times I \rightarrow T^r \times I \rightarrow T^r$$

sendes ethvert punkt (z, t) med $t \neq 0$ på et annet punkt enn det som er representert av $*$. Samtidig, under den sammensatte avbildningen

$$X_0 \rightarrow T(f_1, \dots, f_r) \rightarrow T^r$$

sendes alle punkter på $*$, så det følger at underrommet av $T(f_1, \dots, f_r)$ identifisert med X_0 er nettopp inversbildet av $*$ under

$$T(f_1, \dots, f_r) \rightarrow T^r.$$

Anta at $p \in T^r \setminus *$. Vi har allerede bemerket at underrommet identifisert med X_0 tas til $*$, så inversbildet av p under

$$T(f_1, \dots, f_r) \rightarrow T^r$$

er inneholdt i $T(f_1, \dots, f_r) \setminus X_0$. Siden den karakteristiske avbildningen

$$T(f_2, \dots, f_r) \times I \rightarrow T(f_1, \dots, f_r)$$

induserer en homeomorfi

$$T(f_2, \dots, f_r) \times I \setminus T(f_2, \dots, f_r) \times \{0\} \xrightarrow{\cong} T(f_1, \dots, f_r) \setminus X_0$$

kan vi like gjerne se på inversbildet av p under

$$T(f_2, \dots, f_r) \times I \rightarrow T^r \times I \rightarrow T^r.$$

Den karakteristiske avbildningen $T^r \times I \rightarrow T^r$ induserer en homeomorfi

$$T^{r-1} \times I \setminus T^{r-1} \times \{0\} \xrightarrow{\cong} T^r \setminus *,$$

så inversbildet av p under $T^r \times I \rightarrow T^r$ er nøyaktig ett punkt. Inversbildet av dette punktet under

$$T(f_2, \dots, f_r) \times I \rightarrow T^r \times I$$

er homeomorft med ett av rommene X_1, \dots, X_r . Dermed er vi ferdige. \square

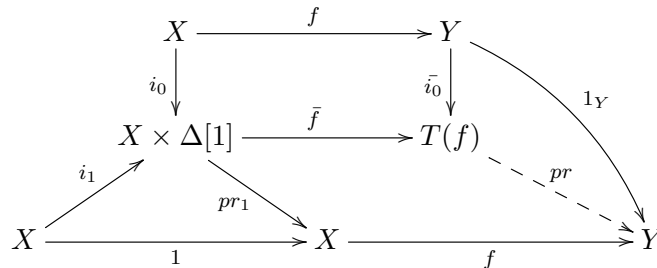
Vi går over til å se på den topologiske avbildningssylinderen til en simplisiell avbildning

$$f : X \rightarrow Y.$$

La $i_0 : X \rightarrow X \times \Delta[1]$ være kofibreringen gitt ved $x \mapsto (x, \delta_1 \omega)$. Den **topologiske avbildningssylinderen** til f betegnes med $T(f)$ og er den simplisielle mengden vi får fra Y ved å feste på $X \times \Delta[1]$ langs f . Setter vi den karakteristiske avbildningen $\bar{f} : X \times \Delta[1] \rightarrow T(f)$ i diagrammet under sammen med den simplisielle avbildningen

$$\begin{aligned} i_1 : X &\rightarrow X \times \Delta[1] \\ x &\mapsto (x, \delta_0 \omega) \end{aligned}$$

får vi den **ordinære fremre inklusjonen**. Tilsvarende sier vi at den karakteristiske avbildningen $\bar{i}_0 : Y \rightarrow T(f)$ er den **ordinære bakre inklusjonen**. Diagrammet



gir oss samtidig den **ordinære sylinderprosjeksjonen**

$$pr : T(f) \rightarrow Y.$$

Vi vet at geometrisk realisering bevarer adjunksjoner, så $|T(f)|$ er avbildningssylindren til $|f|$. Det følger av det vi gjorde over at punktinversene til den geometriske realiseringen til sylinderprosjeksjonen er kjegler, så hvis X og Y er endelige er sylinderprosjeksjonen simpel. Det er klart fra diagrammet over at sammensetningen av sylinderprosjeksjonen og den fremre inklusjonen er lik f . Gitt en sekvens

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_r} X_r$$

av $r > 1$ simplisielle avbildninger kan vi for $1 < k + 1 \leq r$ definere $T(f_k, \dots, f_r)$ som den topologiske avbildningssylindren til sammensetningen

$$T(f_{k+1}, \dots, f_r) \xrightarrow{pr} X_k \xrightarrow{f_k} X_{k-1}.$$

Dette gir oss sylinderprosjeksjonen $T(f_k, \dots, f_r) \rightarrow X_{k-1}$. Den rekursivt definerte avbildningssylindren $T(f_1, \dots, f_r)$ er den **r -foldig itererte topologiske avbildningssylindren** til sekvensen over. Den itererte avbildningssylindren til sekvensen

$$\Delta[0] \leftarrow \dots \leftarrow \Delta[0]$$

av r simplisielle avbildninger $\Delta[0] \rightarrow \Delta[0]$ betegnes med T^r . Som for tilfellet med topologiske rom kan en ta utgangspunkt i det diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
 X_r & \xrightarrow{f_r} & X_{r-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

for å rekursivt danne en avbildning

$$cpr : T(f_1, \dots, f_r) \rightarrow T^r,$$

kalt den **ordinære sylinderkoordinatprosjeksjonen**.

7 Simple avbildninger

Dette kapitlet skal dreie seg om *endelige simplisielle mengder* og om såkalte *simple avbildninger* mellom dem. Teorien her er grundig belyst i kapittel 2 i Waldhausens, Jahrens og Rognes' bok [WJR08] og bevisene for de sentrale resultatene her er hentet derfra.

Definisjon En simplisiell mengde sies å være **endelig** hvis den er generert av endelig mange simplekser.

En simplisiell mengde er endelig hvis og bare hvis den geometriske realiseringen er kompakt: Den geometriske realiseringen av en simplisiell mengde har en *CW*-struktur med presis en åpen n -celle for hvert ikke-degenererte simpleks. I følge proposisjon A.1. i [Ha01] er et kompakt underrom av et *CW*-kompleks inneholdt i et endelig underkompleks. Hvis en simplisiell mengde X har kompakt geometrisk realisering $|X|$ følger det at $|X|$ er et endelig *CW*-kompleks, og dermed er X^\sharp en endelig mengde. Omvendt, hvis en simplisiell mengde X er generert av en endelig mengde Y er $|X|$ i følge proposisjon 4.3.1 i [FP90, avsnitt 4.3, side 153] et kvotientrom av rommet

$$\bigsqcup_{n \geq 0} (Y \cap X_n) \times \Delta^n$$

og er derfor kompakt. I følge lemma 2.2.9. i [WJR08] er den normale oppdelingen $Sd(X)$ av en simplisiell mengde X endelig hvis X er endelig. Det kan være verdt å merke seg at i følge lemma 2.1.4. i samme bok er det slik at hvis X og Y er endelige simplisielle mengder, så har enhver punktinvers $|f|^{-1}(p)$ til den geometriske realiseringen av en simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ en *CW*-struktur.

Definisjon La X og Y være endelige simplisielle mengder. En simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ er **simpel** hvis vi for hvert element $p \in |Y|$ har at punktinversen $|f|^{-1}(p)$ er kontraktibel.

Vi skal ofte betegne en simpel avbildning fra en simplisiell mengde X til en simplisiell mengde Y med $X \xrightarrow{\simeq_s} Y$. Vi minner om *to av tre-egenskapen* for svake homotopiekvivalenser.

Lemma 7.1. *La X, Y og Z være topologiske rom og anta at $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$ er avbildninger. Hvis to av de tre avbildningene f, g og $g \circ f$ er svake homotopiekvivalenser, er den tredje det også.*

Bevis. Vi begrunner at g er en svak homotopiekvivalens hvis f og $g \circ f$ er svake homotopiekvivalenser. Anta at $y_0 \in Y$. Hvis y_0 ikke er i billedmengden til f kan vi siden f induserer en bijeksjon $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$, fra veisammenhengskomponentene til X til veisammenhengskomponentene til Y , finne en vei $\gamma : I \rightarrow Y$ fra y_0 til en eller annen $y_1 \in Y$ slik at det finnes

en $x_1 \in X$ med $f(x_1) = y_1$. Foretar vi et basispunktskifte fra y_0 til y_1 ved hjelp av γ og fra $g(y_0)$ til $g(y_1)$ ved hjelp av $g \circ \gamma$ får vi det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_n(X, x_1) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(Z, g(y_1)) \\
 \searrow \cong & & \nearrow \cong \\
 & \pi_n(Y, y_1) & \pi_n(Z, g(y_0)) \\
 & \nwarrow \cong & \nearrow \\
 & \pi_n(Y, y_0) &
 \end{array}$$

som viser at avbildningen

$$\pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(Z, g(y_0)),$$

indusert av g , er en isomorfi. \square

Vi gir følgende kriterium, uten bevis, for å avgjøre om en avbildning er simpel. Resultatet er basert på arbeider av R.C. Lacher ([La69a] og [La69b]) og andre og vi skal kun bruke det direkte i dette kapittelet.

Proposisjon 7.2. *La X og Y være endelige simplisielle mengder. En simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ er simpel hvis og bare hvis vi for hver mengde U som er åpen i $|Y|$ har at restriksjonen $|f|^{-1}(U) \rightarrow U$ er en svak homotopiekvivalens.*

Bevis. Se beviset for proposisjon 2.1.8. i [WJR08]. \square

Det følger umiddelbart fra proposisjon 7.2 at den geometriske realiseringen til en simpel avbildning er en svak homotopiekvivalens. Dermed er den en homotopiekvivalens i følge Whiteheads teorem (teorem 4.5 i [Ha01]) som sier at en svak homotopiekvivalens mellom CW -komplekser er en homotopiekvivalens.

Korollar 7.3. *(Proposisjon 2.1.3. (a) og (b) i [WJR08]) La X , Y og Z være endelige simplisielle mengder og $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ være simplisielle avbildninger.*

- (a) *Sammensetning. Hvis f og g er simple, så er $g \circ f$ simpel.*
- (b) *Høyrekansellering. Hvis f og $g \circ f$ er simple, så er g simpel.*

Bevis. Beviset er hentet fra proposisjon 2.1.3., del (a) og (b) i [WJR08] og er rett frem når vi bruker proposisjon 7.2 sammen med to av tre-egenskapen for svake homotopiekvivalenser.

(a) Anta at U er åpen i $|Z|$. Restriksjonen $|g \circ f|^{-1}(U) \rightarrow U$ er lik sammensetningen

$$|f|^{-1}(|g|^{-1}(U)) \rightarrow |g|^{-1}(U) \rightarrow U.$$

og siden $|g|^{-1}(U)$ er åpen i $|Y|$ er denne sammensetningen av to svake homotopiekvivalenser.

(b) Anta at U er åpen i $|Z|$. Vi har at restriksjonen $|g \circ f|^{-1}(U) \rightarrow U$ av $|g \circ f|$ er en svak homotopiekvivalens, og den er fremdeles lik sammensetningen

$$|f|^{-1}(|g|^{-1}(U)) \rightarrow |g|^{-1}(U) \rightarrow U.$$

Siden $|g|^{-1}(U)$ er åpen i $|Y|$ er restriksjonen $|f|^{-1}(|g|^{-1}(U)) \rightarrow |g|^{-1}(U)$ av $|f|$ en svak homotopiekvivalens. Det følger av to av tre-egenskapen at $|g|^{-1}(U) \rightarrow U$ er en svak homotopiekvivalens. \square

Egenskapene over er henholdsvis **komposisjonsloven** - og **høyrekanselleringsloven** for simple avbildninger. Det finnes ikke en tilsvarende venstre-kanselleringslov. Hvis vi ser på en sammensetning

$$\Delta[0] \rightarrow \Delta[1] \rightarrow \Delta[0]$$

så er sammensetningen simpel og $\Delta[1] \rightarrow \Delta[0]$ simpel siden $\Delta[1]$ er simplisielt kontraktibel, mens avbildningen $\Delta[0] \rightarrow \Delta[1]$ ikke er surjektiv. Følgende resultat kalles **limelemmaet** for simple avbildninger.

Proposisjon 7.4. *La*

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xleftarrow{i_1} & X_0 & \xrightarrow{i_2} & X_2 \\ \downarrow \simeq_s & & \downarrow \simeq_s & & \downarrow \simeq_s \\ Y_1 & \xleftarrow{j_1} & Y_0 & \xrightarrow{j_2} & Y_2 \end{array}$$

være et kommutativt diagram av endelige simplisielle mengder slik at avbildningene $X_0 \rightarrow X_1$ og $Y_0 \rightarrow Y_1$ er kofibreringer og avbildningene $X_i \rightarrow Y_i$, $i = 0, 1, 2$, er simple. Da er den induerte avbildningen av pushouts $X_1 \cup_{X_0} X_2 \rightarrow Y_1 \cup_{Y_0} Y_2$ simpel.

Bevis. Beviset er hentet fra proposisjon 2.1.3. (d) i [WJR08]. Siden sylindereprojeksjonen $pr : T(i_2) \rightarrow X_2$ satt sammen med den fremre inklusjonen $X_0 \rightarrow T(i_2)$ er lik i_2 , får vi en avbildning av pushouts:

$$\begin{array}{ccccc} X_0 & \xrightarrow{\quad} & T(i_2) & \xrightarrow{\quad} & X_2 \\ \downarrow i_1 & & \downarrow & \searrow \simeq_s \text{ } pr & \downarrow \bar{i}_1 \\ X_1 & \xrightarrow{\quad} & X_1 \cup_{X_0} T(i_2) & \xrightarrow{\quad} & X_2 \\ & \searrow \bar{i}_2 & \dashrightarrow & & \downarrow \bar{i}_1 \\ & & & & X_1 \cup_{X_0} X_2 \end{array}$$

Sylinderprojeksjonen $pr : T(i_2) \rightarrow X_2$ er simpel som vi tidligere har sett, ettersom punktinversonene er kjegler. Vi skal også bruke at den karakteristiske avbildningen \bar{i}_1 er en kofibrering siden i_1 er det. Anta at $p \in |X_1 \cup_{X_0} X_2|$. Hvis $p \in |X_1 \cup_{X_0} X_2| \setminus |X_2|$ er inversbildet av p under

$$|X_1 \cup_{X_0} T(i_2)| \rightarrow |X_1 \cup_{X_0} X_2|$$

inneholdt i $|X_1|$. Samtidig inducerer den karakteristiske avbildningen

$$X_1 \xrightarrow{\bar{i}_2} X_1 \cup_{X_0} X_2$$

en homeomorfi

$$|X_1| \setminus |X_0| \xrightarrow{\cong} |X_1 \cup_{X_0} X_2| \setminus |X_2|,$$

så inversbildet av p består av bare ett punkt. Omvendt, hvis $p \in |X_2|$ må inversbildet av p under

$$|X_1 \cup_{X_0} T(i_2)| \rightarrow |X_1 \cup_{X_0} X_2|$$

være inneholdt i $|T(i_2)|$. Sylinderprojeksjonen $T(i_2) \rightarrow X_2$ er simpel, så inversbildet av p er derfor kontraktibelt i dette tilfellet også. Det følger at avbildningen

$$X_1 \cup_{X_0} T(i_2) \rightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$$

er simpel og samme argument viser at

$$Y_1 \cup_{Y_0} T(i_2) \rightarrow Y_1 \cup_{Y_0} Y_2$$

er simpel. En kan kontrollere at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cup_{X_0} T(i_2) & \xrightarrow{\cong_s} & X_1 \cup_{X_0} X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2) & \xrightarrow{\cong_s} & Y_1 \cup_{Y_0} Y_2 \end{array}$$

kommuterer. Derfor, hvis i tillegg avbildningen

$$X_1 \cup_{X_0} T(i_2) \rightarrow Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)$$

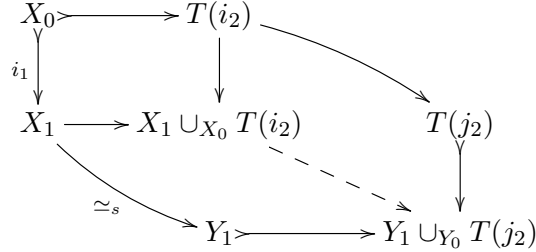
er simpel, vil det følge av høyrekanselleringsloven for simple avbildninger at

$$X_1 \cup_{X_0} X_2 \rightarrow Y_1 \cup_{Y_0} Y_2$$

også er simpel. Avbildningen

$$X_1 \cup_{X_0} T(i_2) \rightarrow Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)$$

stammer fra diagrammet



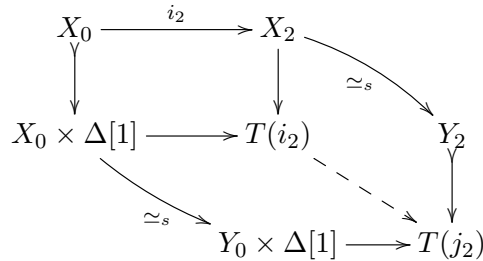
Vi kan se på $|X_1 \cup_{X_0} T(i_2)|$ som unionen $|X_1| \cup |T(i_2)|$ og snittet $|X_1| \cap |T(i_2)|$ er da lik $|X_0|$, og tilsvarende for $Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)$. Anta at $p \in |Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)|$. Hvis $p \in |Y_1|$ er inversbildet av p under

$$|X_1 \cup_{X_0} T(i_2)| \rightarrow |Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)|$$

inneholdt i $|X_1|$. Siden $X_1 \rightarrow Y_1$ er simpel følger det at inversbildet av p er kontraktibelt. Hvis derimot $p \in |Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)| \setminus |Y_1|$ er inversbildet av p under

$$|X_1 \cup_{X_0} T(i_2)| \rightarrow |Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)|$$

inneholdt i $|T(i_2)|$. Siden $p \in |T(j_2)|$ ser vi på avbildningen $T(i_2) \rightarrow T(j_2)$ som har opphav i diagrammet



Hvis $p \in |T(j_2)| \setminus |Y_2|$ og vi behandler $|T(j_2)|$ som adjunksjonsrommet

$$|Y_0| \times I \sqcup |Y_2| / (y, 0) \sim j_2(y)$$

må p være representert av (y, t) med $t \neq 0$. Inversbildet av $[y, t]$ under $|T(i_2)| \rightarrow |T(j_2)|$ er inneholdt i $|T(i_2)| \setminus |X_2|$ og det er kun ett punkt i $|Y_0| \times I$ som sendes på $[y, t]$ under $|Y_0| \times I \rightarrow |T(j_2)|$. Siden

$$X_0 \times \Delta[1] \rightarrow Y_0 \times \Delta[1]$$

er simpel og siden den karakteristiske avbildningen

$$X_0 \times \Delta[1] \rightarrow T(i_2)$$

induserer en homeomorfi

$$|X_0| \times I \setminus |X_0| \xrightarrow{\cong} |T(i_2)| \setminus |X_2|$$

følger det at inversbildet av p er kontraktibelt i dette tilfellet. Hvis derimot $p \in |Y_2|$ er inversbildet av p under $|T(i_2)| \rightarrow |T(j_2)|$ inneholdt i X_2 og $X_2 \rightarrow Y_2$ er simpel, så inversbildet er kontraktibelt også i dette tilfellet. Siden

$$T(i_2) \rightarrow X_1 \cup_{X_0} T(i_2)$$

er en kofibrering er vi ferdige. Det følger av det vi har gjort at inversbildet av p under

$$|X_1 \cup_{X_0} T(i_2)| \rightarrow |Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)|$$

en punkt invers av en av avbildningene $|X_k| \rightarrow |Y_k|$, $k = 0, 1, 2$, og

$$X_1 \cup_{X_0} T(i_2) \rightarrow Y_1 \cup_{Y_0} T(j_2)$$

er derfor simpel. □

At i_0 og j_0 i proposisjonen over er kofibreringer er nødvendige hypoteser. Følgende eksempel er hentet fra [WJR08, side 26].

Eksempel 7. Den geometriske realseringen av avbildningen av pushouts som vi får fra diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} \Delta[1] & \longleftarrow & \delta\Delta[1] & \longrightarrow & \Delta[1] \\ \downarrow \simeq_s & & \downarrow 1 & & \downarrow \simeq_s \\ \Delta[0] & \longleftarrow & \delta\Delta[1] & \longrightarrow & \Delta[0] \end{array}$$

er den entydige avbildningen fra en 1-sfære til et ettpunktsrom. Avbildningen av pushouts er derfor ikke simpel.

Korollar 7.5. Hvis de vertikale avbildningene i det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

er simple er avbildningen av pushouts $T(f) \rightarrow T(f')$ simpel.

Bevis. Resultatet følger direkte av proposisjonen. □

Som et eksempel på en klasse av simple avbildninger skal vi definere begrepet *homotopiekvivalens over målet* som er beslektet med begrepet *fiberhomotopiekvivalens* fra homotopiteori.

Definisjon La X og Y være endelige simplisielle mengder. En simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ er en **homotopiekvivalens over målet** hvis $|f|$ har et tverrsnitt s og det eksisterer en homotopi $H : |X| \times I \rightarrow |X|$ fra $1_{|X|}$ til $s \circ |f|$ som er slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} |X| \times I & \xrightarrow{H} & |X| \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow |f| \\ |X| & \xrightarrow{|f|} & |Y| \end{array}$$

kommuterer.

Anta nå at X og Y er endelige simplisielle mengder og at vi er gitt simplisielle avbildninger $X \rightarrow Z$ og $Y \rightarrow Z$. En **avbildning over Z** er en simplisiell avbildning $X \rightarrow Y$ slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & Z & \end{array}$$

kommuterer. Anta at $f : X \rightarrow Y$ er en simplisiell avbildning mellom endelige simplisielle mengder og at s er et tverrsnitt av f slik at $s \circ f$ er homotop med 1_X ved en sekvens H_0, H_1, \dots, H_n av simplisielle homotopier over Y . Avbildningen f er da en homotopiekvivalens over målet, for når vi går over til topologiske rom kan homotopiene settes sammen til en homotopi som tilfredsstiller kriteriet i definisjonen over. Observer at en homotopiekvivalens over målet f er utstyrt med nullhomotopier av identitetsavbildningene på punktinversonene $|f|^{-1}(p)$.

Lemma 7.6. *En homotopiekvivalens over målet er en simpel avbildning.*

Bevis. Anta at $f : X \rightarrow Y$ er en homotopiekvivalens over målet. Da finnes ved definisjonen over et tverrsnitt s av f og en homotopi $H : |X| \times I \rightarrow |X|$ fra $1_{|X|}$ til $s \circ |f|$ som er slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} |X| \times I & \xrightarrow{H} & |X| \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow |f| \\ |X| & \xrightarrow{|f|} & |Y| \end{array}$$

kommuterer. Hvis $p \in |Y|$ har restriksjonen

$$|f|^{-1}(p) \times I \rightarrow |X|$$

billedmengde inneholdt i $|f|^{-1}(p)$. Vi får derfor en homotopi

$$K : |f|^{-1}(p) \times I \rightarrow |f|^{-1}(p).$$

For alle $[x, s] \in |f|^{-1}(p)$ er

$$K([x, s], 1) = s \circ |f|([x, s]) = s(p),$$

så K er en nullhomotopi av identitetsavbildningen $1_{|f|^{-1}(p)}$. □

Vi skal ofte havne i følgende situasjon.

Eksempel 8. Anta at C og D er partielt ordnede mengder, at vi har en ordningsbevarende funksjon $\varphi : C \rightarrow D$ og at s er et tverrsnitt av φ som er slik at $1_C \leq s \circ \varphi$ eller $1_C \geq s \circ \varphi$. La $\Phi : C \times [1] \rightarrow D$ være bifunktoren som ved lemma 4.4 på side 20 korresponderer med den naturlige transformasjonen $1_C \Rightarrow s \circ \varphi$. Som nevnt tidligere, siden kategorien D har få morfismer, er det slik at enhver funktor $\mathcal{C} \rightarrow D$ er bestemt av hvor den gjør av objektene. Dermed er det rett frem å kontrollere at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} C \times [1] & \xrightarrow{\Phi} & C \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \varphi \\ C & \xrightarrow{\varphi} & D \end{array}$$

kommuterer. Det følger at nerven til φ er en homotopiekvivalens over målet.

8 Reduksjon til standardsimplekser

I kapittel 5 definerte vi avbildningen

$$f : Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

og vi hevdet at f er simpel for alle endelige simplisielle mengder X og Y hvis det er slik at

$$Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

er simpel for alle naturlige tall m og n . Etter å ha introdusert limelemmaet i forrige kapittel er vi nå i stand til å begrunne denne påstanden.

Lemma 8.1. *Anta at Y er en endelig simplisiell mengde og at vi for alle naturlige tall m har at den simplisielle avbildningen*

$$Sd(\Delta[m] \times Y) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd Y$$

er simpel. Da er

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

simpel for enhver endelig simplisiell mengde X .

Bevis. Det er riktig at enhver endelig simplisiell mengde X kan bygges opp simpleks for simpleks ved å feste på standardsimpleksene $\Delta[n]$ langs avbildningene

$$\delta \bar{x} : \delta \Delta[n] \rightarrow X^{n-1}, \quad x \in X_n^\sharp$$

for $n > -1$, satt sammen med inklusjonen $X^{n-1} \rightarrow X'$ der X' er den simplisielle mengden vi så langt har bygd. En kan begynne med (-1) -skjelettet hvis det er ønskelig. Observer at hvis X er (-1) -dimensjonal er

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

simpel siden den geometriske realiseringen da er $\emptyset \rightarrow \emptyset$. Vi skal bruke induksjon med følgende induksjonshypotese. Anta at

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

er simpel for alle endelige simplisielle mengder X med $\dim X \leq m$ og med færre enn k ikke-degenererte m -simplekser, for naturlige tall m og $k > 0$. Vi har nettopp vist at påstanden holder for $m = 0$ og $k = 1$. Anta at X er en endelig simplisiell mengde av dimensjon m med k ikke-degenererte m -simplekser. Velg en isomorfi

$$X \cong \Delta[m] \cup_{\delta \Delta[m]} X'.$$

Siden

$$\begin{array}{ccc} \delta\Delta[m] & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[m] & \longrightarrow & X \end{array}$$

er en simplisiell adjunksjon er

$$\begin{array}{ccc} \delta\Delta[m] \times Y & \longrightarrow & X' \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[m] \times Y & \longrightarrow & X \times Y \end{array}$$

det også, for det følger av proposisjon 4.3 på side 17 at produktfunktoren

$$- \times Y : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$$

bevarer kogrener. Normal oppdeling bevarer kofibreringer og kogrener i følge [FP90, kor. 4.2.9 og prop. 4.2.12] (se også [WJR08, lemma 2.2.9]). Spesielt er simplisielle adjunksjoner bevart, så følgende diagram er også en simplisiell adjunksjon (se også proposisjon 4.2.12 i [FP90]):

$$\begin{array}{ccc} Sd(\delta\Delta[m] \times Y) & \longrightarrow & Sd(X' \times Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sd(\Delta[m] \times Y) & \longrightarrow & Sd(X \times Y) \end{array}$$

En kan argumentere på en tilsvarende måte for at

$$\begin{array}{ccc} Sd(\delta\Delta[m]) \times Sd Y & \longrightarrow & Sd X' \times Sd Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sd \Delta[m] \times Sd Y & \longrightarrow & Sd X \times Sd Y \end{array}$$

er en simplisiell adjunksjon. Vi har diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} Sd(\Delta[m] \times Y) & \longleftarrow & Sd(\delta\Delta[m] \times Y) & \longrightarrow & Sd(X' \times Y) \\ \downarrow \simeq_s & & \downarrow & & \downarrow \\ Sd \Delta[m] \times Sd Y & \longleftarrow & Sd(\delta\Delta[m]) \times Sd Y & \longrightarrow & Sd X' \times Sd Y \end{array}$$

Den vertikale avbildningen i midten er simpel siden $\delta\Delta[m]$ har dimensjon $m - 1$. Den simplisielle mengden X' har dimensjon mindre enn eller lik m og har $k - 1$ ikke-degenererte m -simplekser, så den vertikale avbildningen til høyre er simpel ved induksjonshypotesen. Det følger av limelemmaet at

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

er simpel. □

Ved å bytte om rollene til X og Y kan vi bruke lemmaet til å vise at det er nok å se på tilfellet der X og Y er standardsimplekser.

Korollar 8.2. *Hvis avbildningen*

$$Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

er simpel for alle naturlige tall m og n er

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

simpel for alle endelige simplisielle mengder X og Y .

Bevis. Anta at Y er en endelig simplisiell mengde og at m er et naturlig tall. Da er

$$Sd(\Delta[n] \times \Delta[m]) \rightarrow Sd \Delta[n] \times Sd \Delta[m]$$

simpel for alle naturlige tall n ved hypotesen. Det følger av lemmaet over at

$$Sd(Y \times \Delta[m]) \rightarrow Sd Y \times Sd \Delta[m]$$

er simpel. Dette er ekvivalent med at

$$Sd(\Delta[m] \times Y) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd Y$$

er simpel. Siden m er tilfeldig valgt kan vi bruke lemmaet en gang til. Hvis X er en endelig simplisiell mengde har vi dermed at

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

er simpel. □

9 Redusert avbildningssylinder

I kapittel 7 definerte vi for en simplisiell avbildning

$$f : X \rightarrow Y$$

den topologiske avbildningssylinderen $T(f)$. I dette kapitlet skal vi diskutere den såkalte *reduuerte avbildningssylinderen* $M(f)$. En variant av den reduserte avbildningssylinderen ble trolig først definert av J. H. C. Whitehead i artikkelen [Wh39], men da for en avbildning mellom simplisialkomplekser. Den vi skal bruke er etter Waldhausen, Jahren og Rognes (*backward reduced mapping cylinder*, [WJR08, avsnitt 2.4]) og er definert for en vilkårlig simplisiell avbildning. I sistnevnte verk, som i skrivende stund er nær ved å komme ut i bokform, kobles den reduserte avbildningssylinderen med teori for simple avbildninger og vi skal i neste kapittel benytte oss av noen av resultatene derfra til den siste og mest arbeidskrevende delen av beviset for at avbildningen

$$Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

er simpel. Vi skal fokusere på den reduserte avbildningssylinderen til nerven til en ordningsbevarende funksjon mellom partielt ordnede mengder siden det er dette vi har bruk for, men vi skal si litt om den generelle konstruksjonen for å sette teorien inn i en sammenheng. Vi skal vise at det finnes en *sylinderreduksjon*

$$red : T(f) \rightarrow M(f).$$

Dessuten, analogt med den fremre inklusjonen $X \rightarrow T(f)$ assosiert med $T(f)$, finnes det en *fremre inklusjon* $X \rightarrow M(f)$ som er kompatibel med den fremre inklusjonen $X \rightarrow T(f)$, med hvilket vi mener at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & M(f) \\ & \searrow & \nearrow red \\ & T(f) & \end{array}$$

kommuterer. Videre finnes det en *bakre inklusjon* $Y \rightarrow M(f)$, en *reduuert sylinderprojeksjon* $rpr : M(f) \rightarrow Y$ og en *reduuert sylinderkoordinatprojeksjon* $rcpr : M(f) \rightarrow \Delta[1]$. Disse er alle kompatible med de respektive analoge avbildningene assosiert med $T(f)$.

Konstruksjonen av den reduserte avbildningssylinderen likner på den vi gjorde for den normale oppdelingen der vi delte opp hvert av simpleksene og så limte dem sammen. Her skal vi først se på en *lokal avbildning*

$$N\varphi : \Delta[n] \rightarrow \Delta[m]$$

av simplekser og så definere den reduserte avbildningssylinderen til denne. Deretter limer vi byggestenene vi får sammen til en simplisiell mengde. Husk at hvis vi er gitt partielt ordnede mengder C, D og en ordningsbevarende funksjon $\varphi : C \rightarrow D$ så kan vi danne den partielt ordnede mengden

$$P(\varphi) = C \cup_{\varphi} D$$

ved å utvide den partielle ordningen på $C \sqcup D$ med $c > \varphi(c)$ for alle $c \in C$. Den partielt ordnede mengden $C \cup_{\varphi} D$ kan sees på som pushout av diagrammet

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & D \\ \text{in}_2 \downarrow & & \\ C \cup_1 C & & \end{array}$$

Vi kan identifisere $C \cup_1 C \cong C \times [1]$ og pushout-diagrammet tar da formen

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & D \\ \downarrow & & \downarrow \text{in}_2 \\ C \times [1] & \longrightarrow & C \cup_{\varphi} D \end{array}$$

der $C \rightarrow C \times [1]$ er gitt ved $c \mapsto (c, 0)$ og den karakteristiske funksjonen

$$C \times [1] \rightarrow C \cup_{\varphi} D$$

er gitt ved $(c, 0) \mapsto \varphi(c)$ og $(c, 1) \mapsto c$.

Definisjon La $f : X \rightarrow Y$ være en simplisiell avbildning. Vi skal la $\text{simp}(f)$ betegne kategorien der objektene er de kommutative diagrammene

$$\begin{array}{ccc} \Delta[m] & \xrightarrow{\bar{x}} & X \\ N\varphi \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta[n] & \xrightarrow{\bar{y}} & Y \end{array}$$

betegnet med (φ, x, y) , og der en morfisme

$$(\varphi, x, y) \rightarrow (\varphi', x', y')$$

er et par (α, β) av operatorer $\alpha : [m] \rightarrow [m']$ og $\beta : [n] \rightarrow [n']$ slik at $x = x'\alpha$, $y = y'\beta$ og $\varphi'\alpha = \beta\varphi$.

Hvis (φ, x, y) er et objekt i $\text{simp}(f)$ må

$$f(x\gamma) = y(\varphi\gamma)$$

dersom $\gamma \in \Delta[m]$, så hvis vi setter $\gamma = \iota^m$ ser vi at $f(x) = y\varphi$. Hvis $(\alpha, \beta) : (\varphi, x, y) \rightarrow (\varphi', x', y')$ er en morfisme i kategorien $\text{simp}(f)$ gir diagrammet

$$\begin{array}{ccc} [m] & \xrightarrow{\alpha} & [m'] \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ [n] & \xrightarrow{\beta} & [n'] \end{array}$$

opphav til en ordningsbevarende funksjon

$$\alpha \sqcup \beta : [m] \cup_{\varphi} [n] \rightarrow [m'] \cup_{\varphi'} [n']$$

av pushouts. Vi får dannet en funktor

$$\text{simp}(f) \rightarrow s\text{Set}$$

som sender et objekt (φ, x, y) på den simplisielle mengden $NP(\varphi)$ og som sender en morfisme $(\alpha, \beta) : (\varphi, x, y) \rightarrow (\varphi', x', y')$ på

$$N(\alpha \sqcup \beta) : NP(\varphi) \rightarrow NP(\varphi').$$

Definisjon (Definisjon 2.4.4. i [WJR08]) La $f : X \rightarrow Y$ være en simplisiell avbildning. Kogrensen til diagrammet $\text{simp}(f) \rightarrow s\text{Set}$ gitt ved

$$(\varphi, x, y) \mapsto NP(\varphi)$$

er **den reduserte avbildningssylinderen** til f og betegnes med $M(f)$.

Gitt partielt ordnede mengder C, D og en ordningsbevarende funksjon $\varphi : C \rightarrow D$, lar vi π betegne den ordningsbevarende funksjonen

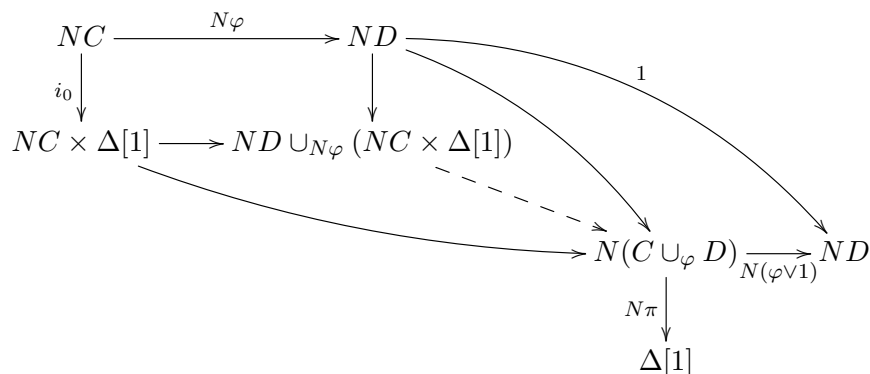
$$C \cup_{\varphi} D \rightarrow [1]$$

som sender elementene $c \in C$ på 1 og elementene $d \in D$ på 0. Vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{\varphi} & D & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow 1 & \\ C \times [1] & \longrightarrow & C \cup_{\varphi} D & \xrightarrow{\varphi \vee 1} & D \\ & & \downarrow \pi & & \\ & & [1] & & \end{array}$$

der kvadratet er det nylig nevnte pushout-diagrammet. Når vi går over til simplisielle mengder identifiserer vi $NC \times \Delta[1] \cong N(C \times [1])$. Vi får

diagrammet



der kognensen $ND \cup_{N\varphi} (NC \times \Delta[1])$ er den topologiske avbildingssylinderen $T(N\varphi)$. Det følger av den universelle egenskapen at sammensetningen

$$ND \cup_{N\varphi} (NC \times \Delta[1]) \rightarrow N(C \cup_{\varphi} D) \xrightarrow{N(\varphi \vee 1)} ND$$

er lik sylindereprojeksjonen

$$pr : T(N\varphi) \rightarrow ND.$$

Av samme grunn er sammensetningen

$$ND \cup_{N\varphi} (NC \times \Delta[1]) \rightarrow N(C \cup_{\varphi} D) \xrightarrow{N\pi} \Delta[1]$$

lik sylinderekoordinatprojeksjonen

$$cpr : T(N\varphi) \rightarrow \Delta[1].$$

Den simplisielle avbildningen $NC \times \Delta[1] \rightarrow N(C \cup_{\varphi} D)$ satt sammen med

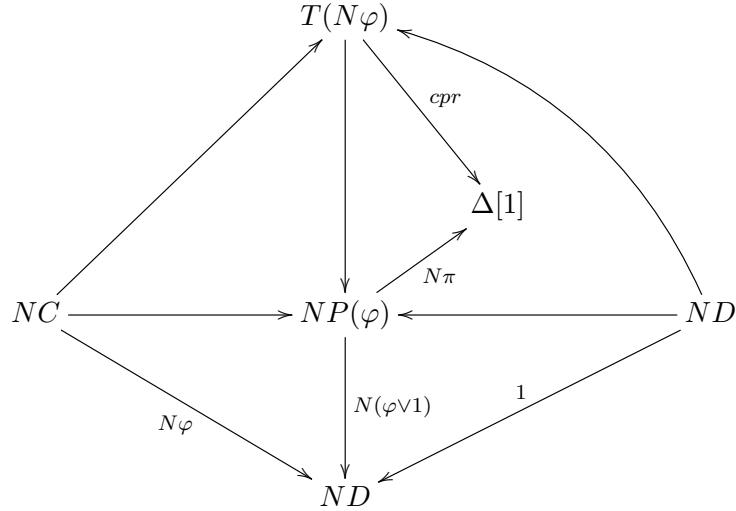
$$\begin{aligned}
 i_1 : NC &\rightarrow NC \times \Delta[1] \\
 z &\mapsto (z, \delta_0 \omega)
 \end{aligned}$$

gir en avbildning

$$NC \rightarrow N(C \cup_{\varphi} D)$$

som er kompatibel med den fremre inklusjonen $NC \rightarrow T(N\varphi)$. Vi får altså

dannet et kommutativt diagram



betegnet med Φ , der $NC \rightarrow T(N\varphi)$ er den fremre inklusjonen og der $ND \rightarrow T(N\varphi)$ er den bakre inklusjonen.

Lemma 9.1. *Diagrammet over er naturlig i φ .*

Bevis. Vi jobber nå i morfismekategorien til kategorien av partielt ordnede mengder. Anta at (α, β) er en morfisme $\varphi \rightarrow \varphi'$, det vil si et par av ordningsbevarende funksjoner $C \rightarrow C'$ og $D \rightarrow D'$, henholdsvis, slik at

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\alpha} & C' \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\
 D & \xrightarrow{\beta} & D'
 \end{array}$$

kommuterer. La Φ' være diagrammet definert på tilsvarende måte som over. Diagrammet

$$\begin{array}{ccccc}
 C \times [1] & \longleftarrow & C & \xrightarrow{\varphi} & D \\
 \downarrow & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow \\
 C' \times [1] & \longleftarrow & C' & \xrightarrow{\varphi'} & D'
 \end{array}$$

gir en avbildning $C \cup_{\varphi} D \rightarrow C' \cup_{\varphi'} D'$ av pushouts, og hvis vi bruker nerven på dette diagrammet får vi en avbildning $T(N\varphi) \rightarrow T(N\varphi')$ av pushouts.

Diagrammet

$$\begin{array}{ccccc}
 NC & \longrightarrow & ND & \longrightarrow & ND' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 NC \times \Delta[1] & \longrightarrow & T(N\varphi) & \dashrightarrow & N(C' \cup_{\varphi'} D') \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 NC' \times \Delta[1] & \longrightarrow & & & N(C' \cup_{\varphi'} D')
 \end{array}$$

gir en avbildning $T(N\varphi) \rightarrow N(C' \cup_{\varphi'} D')$. Videre er diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
 T(N\varphi) & \longrightarrow & N(C \cup_{\varphi} D) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T(N\varphi') & \longrightarrow & N(C' \cup_{\varphi'} D')
 \end{array}$$

kommutativt ved den universelle egenskapen til kogrensen $T(N\varphi)$ siden avbildningene som inngår er konstruert slik at sammensetningene

$$T(N\varphi) \rightarrow T(N\varphi') \rightarrow N(C' \cup_{\varphi'} D')$$

og

$$T(N\varphi) \rightarrow N(C \cup_{\varphi} D) \rightarrow N(C' \cup_{\varphi'} D')$$

får det øverste av de to diagrammene over til å kommutere. Det er ikke vanskeligere å kontrollere at de øvrige avbildningene i diagrammet Φ er naturlige i φ og at vi dermed har en naturlig transformasjon av diagrammer $\Phi \Rightarrow \Phi'$. \square

Nå kan vi definere en funktor som tar et objekt (φ, x, y) i $\text{simp}(f)$ til diagrammet Φ . Kogrensen til denne er diagrammet

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T(f) & & \\
 & \nearrow & \downarrow \text{red} & \searrow \text{cpr} & \\
 X & & & & \Delta[1] \\
 & \searrow & \downarrow \text{rcpr} & \nearrow & \\
 & & M(f) & & \\
 & \nearrow & \downarrow \text{rpr} & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{1} & Y
 \end{array}$$

siden den topologiske avbildningssylinderen $T(f)$ kan beskrives som kogrensen til diagrammet

$$\begin{aligned} \text{simp}(f) &\rightarrow s\text{Set} \\ (\varphi, x, y) &\mapsto T(N\varphi). \end{aligned}$$

Definisjon (Definisjon 2.4.5. i [WJR08]) Vi gir navn på avbildningene i diagrammet over. Den simplisielle avbildningen

$$\text{red} : T(f) \rightarrow M(f)$$

er **sylinderreduksjonen**. Analogt med den topologiske avbildningssylinderen $T(f)$ har vi følgende simplisielle avbildninger assosiert med den reduserte avbildningssylinderen: **Den reduserte fremre inklusjonen** $X \rightarrow M(f)$, **den reduserte bakre inklusjonen** $Y \rightarrow M(f)$, **den reduserte sylindereprojeksjonen** $rpr : M(f) \rightarrow Y$ og **den reduserte sylinderekoordinatprojeksjonen** $rcpr : M(f) \rightarrow \Delta[1]$.

Det er riktig at et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

gir en avbildning $M(f) \rightarrow M(f')$ slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} T(f) & \longrightarrow & M(f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(f') & \longrightarrow & M(f') \end{array}$$

kommuterer. Det første av de to diagrammene over gir en funktor

$$\text{simp}(f) \rightarrow \text{simp}(f')$$

slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \text{simp}(f) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & & s\text{Set} \\ \text{simp}(f') & \nearrow & \end{array}$$

kommuterer enten $\text{simp}(f) \rightarrow s\text{Set}$ og $\text{simp}(f') \rightarrow s\text{Set}$ er de som er gitt ved henholdsvis

$$\begin{aligned} (\varphi, x, y) &\mapsto T(N\varphi) \\ (\varphi', x', y') &\mapsto T(N\varphi') \end{aligned}$$

eller ved henholdsvis

$$\begin{aligned}(\varphi, x, y) &\mapsto NP(\varphi) \\ (\varphi', x', y') &\mapsto NP(\varphi').\end{aligned}$$

Vi får avbildninger $T(f) \rightarrow T(f')$ og $M(f) \rightarrow M(f')$ mellom kogrensene og kogrensene kommer med avbildninger fra de *lokale sylindrene*. Dermed har vi et diagram

$$\begin{array}{ccccc}T(N\varphi) & \longrightarrow & NP(\varphi) & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & T(f) & \longrightarrow & M(f) & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ T(N\varphi') & \longrightarrow & NP(\varphi') & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & T(f') & \longrightarrow & M(f') & \end{array}$$

og vi så i beviset for lemma 9.1 at det bakre kvadratet

$$\begin{array}{ccc}T(N\varphi) & \longrightarrow & NP(\varphi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(N\varphi') & \longrightarrow & NP(\varphi')\end{array}$$

kommuterer. Det følger at det fremre kvadratet også kommuterer.

Vi skal nå beskrive en kjeglekonstruksjon, som i [WJR08, lemma 2.4.11.] brukes til å vise at den reduserte avbildningssylinderen $M(f)$ til en simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ er endelig hvis både X og Y er endelige og at den er ikke-singulær hvis både X og Y har denne egenskapen. Husk at simpleksskategorien $\mathit{simp}(X)$ assosiert med en simplisiell mengde X har som objekter parene $([n], x)$ for $x \in X_n$, $n > -1$, og at morfismene

$$([m], y) \rightarrow ([n], x)$$

er operatorene $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ slik at $y = x\alpha$. Kjeglekonstruksjonen bruker en utvidet variant av denne kategorien som har et initielt objekt $([-1], \eta)$ som stammer fra det entydige (-1) -simplekset $\eta \in X_{-1}$.

Definisjon Gitt en ordinal $[n]$ kan en legge til et nytt, største element v og få en ny partielt ordnet mengde $[n] \cup \{v\}$. Hvis X er en simplisiell mengde definerer regelen

$$([n], x) \mapsto N([n] \cup \{v\})$$

en funktor $\mathit{simp}(X) \rightarrow \mathit{sSet}$. La den **utvidede simpleksskategorien**, betegnet med $\mathit{simp}_+(X)$, være kategorien der objektene er parene $([n], x)$

for $x \in X_n$, og morfismene

$$([m], y) \rightarrow ([n], x)$$

er operatorene $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ som er slik at $y = x\alpha$. Regelen over utvides til en funktor som sender $([-1], \eta)$ på $N(\{v\})$. **Kjeglens** til en simplisiell mengde X er definert som kogrensen

$$\text{colim}_{\text{simp}_+(X)}(([n], x) \mapsto N([n] \cup \{v\}))$$

til denne utvidelsen og betegnes med $\text{cone}(X)$.

Legg merke til at inklusjonene $[n] \rightarrow [n] \cup \{v\}$ kan kombineres til en naturlig transformasjon fra funktoren

$$([n], x) \mapsto \Delta[n]$$

til

$$([n], x) \mapsto N([n] \cup \{v\}),$$

det vil si at vi får en naturlig avbildning $X \rightarrow \text{cone}(X)$. I følge [WJR08, lemma 2.2.15.] bevarer kjegle-funktoren kofibreringer og kogrenser. Dessuten, hvis X er en endelig simplisiell mengde er $\text{cone}(X)$ også endelig, og hvis X er ikke-singulær har $\text{cone}(X)$ samme egenskap.

Det finnes en funktor

$$(-)^{op} : \Delta_+ \rightarrow \Delta_+$$

gitt ved å sende ordinalen $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$ på

$$\{0 > 1 > \dots > n\} \cong [n]$$

og ved å sende operatoren $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ på den *motsatte* operatoren

$$\begin{aligned} \alpha^{op} : [m] &\rightarrow [n] \\ i &\mapsto n - \alpha(m - i) \end{aligned}$$

Den **motsatte simplisielle mengden** X^{op} til en simplisiell mengde X er sammensetningen $X \circ (-)^{op}$. Vi definerer $\text{cone}^{op}(X) = \text{cone}(X^{op})^{op}$.

Lemma 9.2. (Lemma 2.4.11. i [WJR08]) La $f : X \rightarrow Y$ være en simplisiell avbildning. Den reduserte avbildningssylinderen $M(f)$ er endelig hvis både X og Y er endelige og den er ikke-singulær hvis X og Y er ikke-singulære.

Bevis. Se beviset for lemma 2.4.11. i [WJR08]. Vi gir en skisse av beviset derfra. En kan bruke embeddingen

$$\begin{aligned} \text{simp}(X) &\rightarrow \text{simp}(\Delta[0] \leftarrow X) \\ ([n], x) &\mapsto ([n] \rightarrow [0], x, *) \end{aligned}$$

til å lage en isomorfi

$$M(\Delta[0] \leftarrow X) \xrightarrow{\cong} \text{cone}^{op}(X).$$

Satt sammen med avbildningen $M(f) \rightarrow M(\Delta[0] \leftarrow X)$ fra diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow 1 & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \Delta[0] \end{array}$$

gir dette en naturlig avbildning $M(f) \rightarrow \text{cone}^{op}(X)$. Når vi kombinerer med sylindereprojeksjonen $rpr : M(f) \rightarrow Y$ får vi i følge lemma 2.4.11. i [WJR08] en naturlig kofibrering

$$M(f) \rightarrow \text{cone}^{op}(X) \times Y.$$

□

I likhet med den ordinære sylinderreduksjonen er den reduserte sylindereprojeksjonen simpel.

Lemma 9.3. (Lemma 2.4.8. i [WJR08]) La X og Y være endelige simplicielle mengder og anta at $f : X \rightarrow Y$ er en simplisiell avbildning. Den reduserte sylindereprojeksjonen $rpr : M(f) \rightarrow Y$ er en simpel avbildning.

Bevis. Vi skal vise at sylindereprojeksjonen $rpr : M(f) \rightarrow Y$ er en homotopiekvivalens over målet. La (φ, x, y) være et objekt i $\text{simp}(f)$. Under den ordningsbevarende funksjonen

$$P(\varphi) \xrightarrow{\varphi \vee 1} [n] \xrightarrow{in_2} P(\varphi).$$

sendes et element $x \in [m]$ på $\varphi(x)$ og et element $x \in [n]$ på x . Siden $in_2 \circ \varphi \vee 1(x) \leq x$ for alle $x \in NP(\varphi)$ følger det av det vi gjorde i eksempel 8 at vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} NP(\varphi) & \xrightarrow{N(\varphi \vee 1)} & \Delta[n] \\ i_0 \downarrow & & \downarrow N(in_2) \\ NP(\varphi) \times \Delta[1] & \longrightarrow & NP(\varphi) \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow N(\varphi \vee 1) \\ NP(\varphi) & \xrightarrow{N(\varphi \vee 1)} & \Delta[n] \end{array}$$

der den horisontale avbildningen $NP(\varphi) \times \Delta[1] \rightarrow NP(\varphi)$ er en simplisiell homotopi fra $N(in_2 \circ \varphi \vee 1)$ til identiteten $NP(\varphi) \rightarrow NP(\varphi)$. Vi vet fra

lemma 9.1 at $N(\varphi \vee 1)$ er naturlig i objektet (φ, x, y) . En kan kontrollere at samme påstand er riktig for de øvrige avbildningene i diagrammet. Dermed kan vi definere en funktor fra $\text{simp}(f)$ som tar et objekt (φ, x, y) til dette diagrammet. Når vi tar kogrensene til denne funktoren får vi en simplisiell homotopi

$$M(f) \times \Delta[1] \rightarrow M(f)$$

over Y fra sammensetningen

$$M(f) \xrightarrow{rpr} Y \rightarrow M(f)$$

til identiteten. □

Hvis $\varphi : C \rightarrow D$ er en ordningsbevarende funksjon kan vi se på $N(C \cup_{\varphi} D)$ som den reduserte avbildningssylinderen $M(N\varphi)$ til $N\varphi$.

Lemma 9.4. (Lemma 2.4.12. i [WJR08]) La C og D være partielt ordnede mengder og $\varphi : C \rightarrow D$ en ordningsbevarende funksjon. Da er

$$M(N\varphi) \cong NP(\varphi)$$

Bevis. Se beviset for lemma 2.4.12. i [WJR08]. □

Videre kan vi se på sylinderreduksjonen og de reduserte variantene av den fremre inklusjonen, den bakre inklusjonen, sylindereprojeksjonen og sylinderekoordinatprojeksjonen som de vi tidligere har beskrevet ved å gå over til simplisielle mengder fra diagrammet

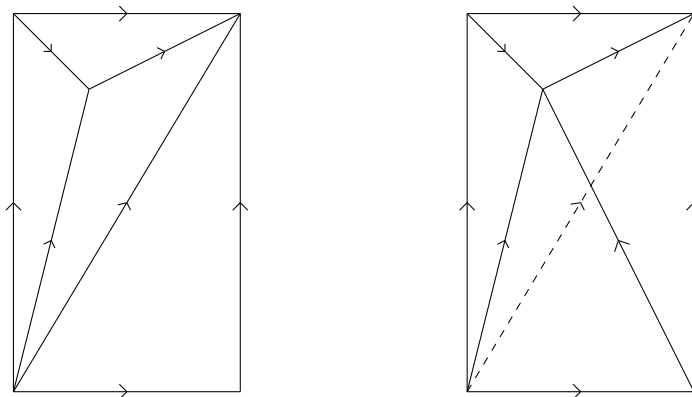
$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xrightarrow{\varphi} & D & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
 C \times [1] & \longrightarrow & C \cup_{\varphi} D & \xrightarrow{\varphi \vee 1} & D \\
 & & \downarrow \pi & & \\
 & & [1] & &
 \end{array}$$

og ved å danne pushout $T(N\varphi)$.

Det er på tide å se eksempler på hvordan den reduserte avbildningssylinderen kan se ut.

Eksempel 9. De reduserte avbildningssylinderne til nervene til de elementære degenerasjonsoperatorene σ_0 (til venstre) og σ_1 (til høyre) ser

slik ut.



Legg merke til at relasjonen på $[2] \cup_{\sigma_1} [1]$ er noe større enn den på $[2] \cup_{\sigma_0} [1]$.

Det er verdt å spørre om den reduserte avbildningssylinderen virkelig kan sies å være en redusert versjon av den topologiske avbildningssylinderen. Er sylinderreduksjonen til en avbildning mellom endelige simplisielle mengder simpel?

Definisjon (Definisjon 2.4.9. i [WJR08]) La X og Y være endelige simplisielle mengder. En simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ sies å ha **simpel sylinderreduksjon** hvis sylinderreduksjonen

$$red : T(f) \rightarrow M(f)$$

er en simpel avbildning.

Sylinderreduksjonen $red : T(f) \rightarrow M(f)$ trenger ikke en gang å være surjektiv, som det neste eksempelet viser.

Eksempel 10. Husk at $\delta_0 : [0] \rightarrow [1]$ er fasettoperatoren som bommer på 0, det vil si som har billedmengde $\{1\}$. Det følger at $M(N\delta_0) = N([0] \cup_{\delta_0} [1])$ kan identifiseres med $\Delta[2]$ siden $[0] \cup_{\delta_0} [1]$ er isomorf med $[2]$. Den geometriske realiseringen av $T(N\delta_0)$ er

$$\Delta^0 \times I \sqcup \Delta^1 / ((1), 0) \sim (0, 1),$$

det vil si to sammenlimte linjestykker. Vi kan identifisere $\Delta^2 \cong |\Delta[2]| = |M(N\delta_0)|$ ved isomorfien

$$\begin{aligned} \Delta^2 &\rightarrow |\Delta[2]| \\ t &\mapsto [\iota^2, t]. \end{aligned}$$

Sylinderreduksjonen er gitt ved avbildningene

$$\begin{aligned} \Delta^0 \times I &\rightarrow \Delta^2 \\ ((1), s) &\mapsto (0, 1 - s, s) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \Delta^1 &\rightarrow \Delta^2 \\ (1-t, t) &\mapsto (1-t, t, 0), \end{aligned}$$

så billedmengden til sylinderreduksjonen

$$\Delta^0 \times I \sqcup \Delta^1 / ((1), 0) \sim (0, 1) \rightarrow \Delta^2$$

er dermed

$$\{(0, 1-s, s) \mid 0 \leq s \leq 1\} \cup \{(1-t, t, 0) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Sylinderreduksjonen kan også være surjektiv uten at den er simpel. Både eksempelet over og det neste er hentet fra [WJR08].

Eksempel 11. Husk at $\sigma_0 : [2] \rightarrow [1]$ er den elementære degenerasjonsoperatoren som sender 0 og 1 på 0. Sylinderreduksjonen til sammensetningen

$$\delta\Delta[2] \rightarrow \Delta[2] \xrightarrow{N\sigma_0} \Delta[1]$$

er surjektiv, men ikke simpel.

Av [WJR08, lemma 2.4.21] går det frem at den normale oppdelingen til en avbildning mellom endelige, ikke-singulære simplisielle mengder har simpel sylinderreduksjon. Waldhausen, Jahren og Rognes gir dessuten et kriterium for å avgjøre om nerven til en ordningsbevarende funksjon er simpel.

Proposisjon 9.5. (*Proposisjon 2.4.16 i [WJR08]*) La C og D være endelige partielt ordnede mengder og $\varphi : C \rightarrow D$ en ordningsbevarende funksjon. Da er følgende betingelser ekvivalente.

(a) For hvert element $v \in C$ er den induserte avbildningen

$$N(\varphi/v) : N(C/v) \rightarrow N(D/\varphi(v))$$

simpel.

(b) Avbildningen $N\varphi : NC \rightarrow ND$ har simpel sylinderreduksjon.

Bevis. Beviset er hentet fra [WJR08, prop. 2.4.16.]. Vi viser at hypotese (a) medfører (b) ved induksjon på idealene A i C . Se beviset for proposisjon 2.4.16 i [WJR08] for den motsatte implikasjonen. Siden den partielt ordnede mengden C er endelig kan den bygges opp element for element på en slik måte at hvert *steg* er et ideal. Gitt et ideal A' i C og et element $z \in C$ som ikke er inneholdt i A' og som er slik at $x < z$ medfører $x \in A'$, så definerer vi $A = A' \cup \{z\}$. Da er A også et ideal og vi har $A' \subset A \subseteq C$.

For grunntrinnet, se på det tomme idealet $A = \emptyset$. I dette tilfellet er sylinderreduksjonen en isomorfi og er derfor simpel. For induksjonstrinnet, anta at A er et ikke-tomt ideal i C som er slik at $N(\varphi|_{A'})$ har simpel

sylinderreduksjon for alle idealer A' i C som er ekte inneholdt i A . Velg et maksimalt element $v \in A$ og la

$$\begin{aligned} A' &= A \setminus \{v\} \\ K &= A/v \\ K' &= K \cap A' \\ L &= D/\varphi(v). \end{aligned}$$

Vi begynner med å vise at vi har en pushout

$$NA = NK \cup_{NK'} NA'.$$

Det holder å vise at $NK \cup NA' = NA$. Anta at $x \in NA$. Hvis $v \in \text{Im } x$ må $\text{Im } x \subseteq K$ siden v er et maksimalt element i A og siden K er et ideal i A som inneholder v . Dermed er $x \in NK$. Omvendt, hvis $v \notin \text{Im } x$ må $x \in NA'$. Siden produktfunctoren $- \times \Delta[1] : sSet \rightarrow sSet$ bevarer kogrenser har vi følgende pushoutkvadrat

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} NK' & \longrightarrow & NA' \\ \downarrow & & \downarrow \\ NK & \longrightarrow & NA \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{ccc} NL & \longrightarrow & ND \\ \downarrow & & \downarrow \\ NL & \longrightarrow & ND \end{array} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{array}{ccc} NK' \times \Delta[1] & \longrightarrow & NA' \times \Delta[1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ NK \times \Delta[1] & \longrightarrow & NA \times \Delta[1] \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{ccc} T(NK' \rightarrow NL) & \longrightarrow & T(NA' \rightarrow ND) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(NK \rightarrow NL) & \longrightarrow & T(NA \rightarrow ND) \end{array} \end{array}$$

der de to diagrammene til venstre og det oppe til høyre er pushoutkvadrater. Det følger at diagrammet nede til høyre er et pushoutkvadrat. Her og andre steder i dette kapittelet bruker vi *loven om ombytting av (ko)grenser*. Se for eksempel [Bo94, prop. 2.12.1] for en referanse. Et analogt argument som bruker at

$$\begin{aligned} NK &= NK \cup_{NK'} NK' \\ NL &= NK \cup_{NK} NL \end{aligned}$$

viser at det til venstre av de to kvadratene i diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} T(NK' \rightarrow NK) & \longrightarrow & T(NK' \rightarrow NL) & \longrightarrow & T(NA' \rightarrow ND) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T(NK \rightarrow NK) & \longrightarrow & T(NK \rightarrow NL) & \longrightarrow & T(NA \rightarrow ND) \end{array}$$

er et pushoutkvadrat. Vi har at

$$T(NK \rightarrow NK) = N(K \sqcup K)$$

og dessuten er $N(K' \sqcup K) = N(K' \sqcup K') \cup NK$, så

$$T(NK' \rightarrow NK) = N(K' \sqcup K).$$

Dermed kan $T(NK \rightarrow NK)$ sees på som kjeglen til $T(NK' \rightarrow NK)$ med kjeglepunkt v . Det følger at

$$T(NK' \rightarrow NK) \rightarrow T(NK \rightarrow NK)$$

er en kofibrering og dermed er de to øvrige vertikale avbildningene i det siste diagrammet også kofibreringer. Videre skal vi vise at

$$\begin{array}{ccc} M(NK' \rightarrow NL) & \longrightarrow & M(NA' \rightarrow ND) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(NK \rightarrow NL) & \longrightarrow & M(NA \rightarrow ND) \end{array}$$

er et pushout-diagram. Med andre ord må vi vise at

$$N(K \sqcup L) \cup N(A' \sqcup D) = N(A \sqcup D).$$

Anta at $x \in N(A \sqcup D)$ er et q -simpleks. Hvis $v \in \text{Im } x$ er de elementene i billedmengden til x som er inneholdt i A også inneholdt i K . Hvis nå $j \in [q]$ er slik at $x(j) \in D$ må vi ha $x(j) < v$ i $A \sqcup D$ siden $[q]$ er totalt ordnet. Dermed er $x(j) \leq \varphi(v)$ i D ved lemma 3.2 på side 8, så $x(j) \in L$ og vi får at $x \in N(K \sqcup L)$. Omvendt, hvis $v \notin \text{Im } x$ må $x \in N(A' \sqcup D)$. Legg merke til at avbildningen $NA' \rightarrow ND$ har simpel sylinderreduksjon siden A' er ekte inneholdt i A . Vi får diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} T(NK \rightarrow NK) & \longleftarrow & T(NK' \rightarrow NK) & \longrightarrow & T(NA' \rightarrow ND) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq_s \\ M(NK \rightarrow NL) & \longleftarrow & M(NK' \rightarrow NL) & \longrightarrow & M(NA' \rightarrow ND) \end{array}$$

og vi skal etter hvert bruke limelemmaet på dette, men først må vi vise at de to øvrige vertikale avbildningene er simple. Observer at $NK \xrightarrow{\simeq_s} NL$ er simpel ved hypotese (a) siden $A/v = C/v$. Diagrammet

$$\begin{array}{ccc} NK' & \longrightarrow & NK \\ \downarrow 1 & & \downarrow \simeq_s \\ NK' & \longrightarrow & NL \end{array}$$

i kombinasjon med limelemmaet viser at

$$T(NK' \rightarrow NK) \xrightarrow{\simeq_s} T(NK' \rightarrow NL)$$

er simpel. Det gjenstår nå bare å vise at

$$T(NK \rightarrow NK) \rightarrow M(NK \rightarrow NL)$$

er simpel. Et blikk på diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} NK' & \longrightarrow & NL & \longrightarrow & ND \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ NK' \times \Delta[1] & \longrightarrow & T(NK' \rightarrow NL) & & \end{array}$$

avslører at

$$T(NK' \rightarrow ND) = T(NK' \rightarrow NL) \cup_{NL} ND.$$

Dessuten er

$$N(K' \sqcup L) \cup ND = N(K' \sqcup D),$$

for hvis

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_q$$

er en kjede i $K' \sqcup D$ med $x_j \in D$ og $x_{j+1} \in K'$ har vi at

$$x_j \leq \varphi(x_{j+1}) \leq \cdots \leq \varphi(x_q)$$

i D . Men φ tar alle elementer i K' til L , så vi må ha $x_0, \dots, x_j \in L$. Omvendt, hvis $\text{Im } x$ ikke inneholder noen elementer fra K' er selvsagt $x \in ND$. Vi får at

$$M(NK' \rightarrow ND) = M(NK' \rightarrow NL) \cup_{NL} ND.$$

Ettersom K' er ekte inneholdt i A er sylinderreduksjonen

$$T(NK' \rightarrow ND) \xrightarrow{\simeq_s} M(NK' \rightarrow ND)$$

simpel ved induksjonshypotesen. Avbildningen

$$T(NK' \rightarrow NL) \rightarrow M(NK' \rightarrow NL)$$

er å betrakte som en restriksjon av avbildningen over og en kan bruke de to sistnevnte pushoutene til å vise at den er simpel. Nå har vi at den sammensatte avbildningen

$$T(NK' \rightarrow NK) \rightarrow T(NK' \rightarrow NL) \rightarrow M(NK' \rightarrow NL)$$

er simpel og kjeglen til denne er avbildningen

$$T(NK \rightarrow NK) \rightarrow M(NK \rightarrow NL).$$

Kjeglen kommuterer med geometrisk realisering, så en punkt invers til den geometriske realiseringen av sistnevnte er kjeglepunktet eller er homeomorf med en punkt invers til avbildningen

$$|T(NK' \rightarrow NK)| \rightarrow |M(NK' \rightarrow NL)|.$$

Dette fullfører beviset. □

Akkurat som tilfellet er for den topologiske avbildningssylinderen, kan prosessen med å danne redusert avbildningssylinder itereres.

Definisjon Anta at

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_r} X_r$$

er en sekvens av simplisielle avbildninger. Den r -**foldig itererte reduserte avbildningssylinderen** $M(f_1, \dots, f_r)$ er definert rekursivt som den reduserte avbildningssylinderen til sammensetningen

$$M(f_2, \dots, f_r) \xrightarrow{rpr} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0.$$

Sylinderprojeksjonen

$$M(f_1, \dots, f_r) \rightarrow X_0$$

fra den itererte reduserte avbildningssylinderen er da sylinderprojeksjonen fra $M(f_1 \circ rpr)$. Analogt med lemma 9.4 har vi følgende beskrivelse av den itererte reduserte avbildningssylinderen til en sekvens av nerver av ordningsbevarende funksjoner.

Lemma 9.6. (*Lemma 2.4.14 i [WJR08]*) La

$$C_0 \xleftarrow{\varphi_1} C_1 \xleftarrow{\varphi_2} \dots \xleftarrow{\varphi_r} C_r$$

være en sekvens av r ordningsbevarende funksjoner. Da er

$$M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \cong NP(\varphi_1, \dots, \varphi_r).$$

Bevis. Se beviset for lemma 2.4.14 i [WJR08]. □

Eksempel 12. La M^r betegne den itererte reduserte avbildningssylinderen til sekvensen

$$\Delta[0] \leftarrow \dots \leftarrow \Delta[0]$$

av r kopier av avbildningen $\Delta[0] \rightarrow \Delta[0]$. Vi har at $M^r \cong \Delta[r]$ og for en simplisiell avbildning $f : X \rightarrow Y$ kan vi se på sylinderkoordinatprojeksjonen $rcpr : M(f) \rightarrow \Delta[1]$ som avbildningen $M(f) \rightarrow M^1$.

Analogt med tilfellet for den topologiske avbildningssylinderen kan en rekursivt definere en avbildning $rcpr : M(f_1, \dots, f_r) \rightarrow M^r$, kalt den **reduserte sylinderkoordinatprojeksjonen** fra den r -foldig itererte reduserte avbildningssylinderen.

Hvis vi er gitt en sekvens

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_r} X_r$$

av simplisielle avbildninger kan vi faktorisere

$$\begin{array}{ccc}
 T(X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{pr} T(f_2, \dots, f_r)) & \xrightarrow{red} & M(X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{pr} T(f_2, \dots, f_r)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T(X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{rpr} M(f_2, \dots, f_r)) & \xrightarrow{red} & T(X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{rpr} M(f_2, \dots, f_r))
 \end{array}$$

og dette skal vi utnytte i følgende eksempel.

Eksempel 13. Sylinderreduksjonen $T^r \rightarrow M^r$ er simpel. Påstanden er i alle fall riktig for $r = 1$, for da er sylinderreduksjonen en isomorfi. Se på tilfellet $r > 1$. Vi kan anta at $T^{r-1} \rightarrow M^{r-1}$ er simpel. Vi har det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
 T^{r-1} & \longrightarrow & \Delta[0] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M^{r-1} & \longrightarrow & \Delta[0]
 \end{array}$$

og ved limelemmaet er derfor

$$T(\Delta[0] \leftarrow T^{r-1}) \xrightarrow{\simeq_s} T(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1})$$

simpel. Avbildningen $T^r \rightarrow M^r$ kan faktorerises slik

$$\begin{array}{ccc}
 T(\Delta[0] \leftarrow T^{r-1}) & & \\
 \downarrow & \searrow^{\simeq_s} & \\
 & & T(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1}) \\
 & \swarrow & \\
 M(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1}) & &
 \end{array}$$

og det gjenstår derfor å vise at $M^{r-1} \rightarrow \Delta[0]$ har simpel sylinderreduksjon. Vi har at $M^r = N([r-1] \sqcup [0])$ der den partielt ordnede mengden $[r-1] \sqcup [0]$ er følgende pushout.

$$\begin{array}{ccc}
 [r-1] & \longrightarrow & [0] \\
 \downarrow & & \downarrow in_2 \\
 [r-1] \times [1] & \longrightarrow & [r-1] \sqcup [0]
 \end{array}$$

En kan identifisere $[r] \cong [r-1] \sqcup [0]$ og da er den karakteristiske funksjonen $[r-1] \times [1] \rightarrow [r]$, betegnet med ψ , den som sender $(j, 0)$ på 0 og $(j, 1)$ på $j+1$. Definer tverrsnittet $s : [r] \rightarrow [r-1] \times [1]$ ved $s(0) = (0, 0)$ og $s(j) = (j-1, 1)$

for $j \neq 0$. Vi har at $s \circ \psi \leq 1_{[r-1] \times [1]}$, så $N\psi$ er en homotopiekvivalens over målet og er derfor simpel. Betrakt diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta[r-1] & \longrightarrow & \Delta[0] \\
 \downarrow & & \downarrow \text{in}_2 \\
 \Delta[r-1] \times \Delta[1] & \longrightarrow & T(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1}) \\
 & \searrow \simeq_s & \searrow \text{red} \\
 & & M(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1})
 \end{array}$$

og den karakteristiske avbildningen

$$\Delta[r-1] \times \Delta[1] \rightarrow T(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1}).$$

Den geometriske realiseringen kollapser underrommet $|\Delta[r-1]|$ og induserer en homeomorfi

$$|\Delta[r-1] \times \Delta[1]| \setminus |\Delta[r-1]| \xrightarrow{\cong} |T(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1})| \setminus |\Delta[0]|,$$

så den karakteristiske avbildningen er simpel. Det følger av høyrekanselleringsloven at sylinderreduksjonen $T(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1}) \rightarrow M(\Delta[0] \leftarrow M^{r-1})$ er simpel. Vi kunne også ha appellert til proposisjon 9.5 for å begrunne at $M^{r-1} \rightarrow \Delta[0]$ har simpel sylinderreduksjon.

I neste kapittel skal vi beskrive de punktinversene til den geometriske realiseringen av

$$Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

som vi ennå ikke har sett på, som fibere under den reduserte sylindervektordataprojeksjonen $rcpr$ fra en viss iterert redusert avbildningssylinder. Vi skal deretter utnytte det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
 T(f_1, \dots, f_r) & \xrightarrow{\text{red}} & M(f_1, \dots, f_r) \\
 \text{cpr} \downarrow & & \downarrow \text{rcpr} \\
 T^r & \xrightarrow[\simeq_s]{\text{red}} & M^r
 \end{array}$$

til å begrunne at de er kontraktible. Beviset for at $T^r \rightarrow M^r$ er simpel illustrerer fremgangsmåten vi skal bruke i avsnitt 10.3 der vi løser et delproblem knyttet til dette.

10 Høyere dimensjoner

I dette kapitlet ligger brorparten av beviset for hovedresultatet vårt, som er at avbildningen

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

er simpel for alle endelige simplisielle mengder X og Y . Waldhausens, Jahrens og Rognes' reduserte avbildningssylinder fra forrige kapittel blir et sentralt verktøy. I kapittel 8 reduserte vi problemet til å vise at

$$Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

er simpel for alle naturlige tall m og n . Husk at den geometriske realiseringen $|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$ har en CW -struktur med en åpen r -celle for hvert ikke-degenererte r -simpleks. Lemma 5.3 sammen med proposisjon 5.4 viste at inversbildet av en 0-celle i CW -komplekset

$$|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$$

er kontraktibelt. Det gjenstår å se på inversbildet av et punkt i en r -celle for $r > 0$. Det viser seg at dette inversbildet kan beskrives som en fiber under sylinderkoordinatprojeksjonen til en r -foldig iterert redusert avbildningssylinder. Hvis vi viser at denne reduserte sylinderkoordinatprojeksjonen er simpel vil vi derfor ha løst problemet.

10.1 Oppdeling av problemet

Velg naturlige tall m , n og $r > 0$. Vi skal i dette avsnittet dele opp beviset for at inversbildet under den geometriske realiseringen til

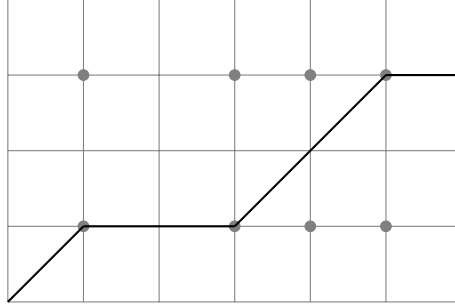
$$f : Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

av et punkt i en åpen r -celle er simpel. Det blir tre delproblemer som vi skal adressere i de tre avsnittene som følger. Som nevnt skal vi beskrive inversbildet som en fiber under sylinderkoordinatprojeksjonen til en r -foldig iterert redusert avbildningssylinder. Følgende begrep blir sentralt når vi skal definere den aktuelle avbildningssylinderen.

Definisjon La $(\mu, \nu) \in \Delta[m]^\sharp \times \Delta[n]^\sharp$ og anta at γ er en (μ, ν) -vei. Anta at $(\zeta, \eta) \in \Delta[m]^\sharp \times \Delta[n]^\sharp$ er slik at $\zeta \leq \mu$ og $\eta \leq \nu$. Hvis det finnes en fasettoperator ξ slik at $\gamma\xi$ er en (ζ, η) -vei, sier vi at γ er **fullstendig med hensyn på** (ζ, η) eller at γ er **(ζ, η) -fullstendig**.

Når vi ser på en (μ, ν) -vei som en kjede i $[m] \times [n]$ er en (ζ, η) -fullstendig (μ, ν) -vei rett og slett en (μ, ν) -vei som inneholder en (ζ, η) -vei.

Eksempel 14. La $\mu : [3] \rightarrow [6]$ være fasetoperatoren med billedmengde $\{1, 3, 4, 5\}$ og la $\nu : [1] \rightarrow [4]$ være fasetoperatoren med billedmengde $\{1, 3\}$. Følgende figur er ment å illustrere en $(6, 4)$ -vei $\gamma : [7] \rightarrow [6] \times [4]$.



Vi har at $\gamma(4) = (4, 2)$ og $2 \notin \text{Im } \nu$, så ingen fasetoperator ξ som er slik at $\gamma\xi$ har billedmengde inneholdt i $\text{Im } \mu \times \text{Im } \nu$ kan ha $4 \in \text{Im } \xi$. Siden $(4, 2)$ er det eneste punktet i $\text{Im } \gamma$ med førstekoordinat lik 4 følger det at det ikke finnes en fasetoperator ξ slik at $\gamma\xi$ har billedmengde inneholdt i $\text{Im } \mu \times \text{Im } \nu$ og som er slik at $4 \in \text{Im } (\gamma\xi)_1$, så γ er ikke (μ, ν) -fullstendig.

La $(\mu, \nu), (\zeta, \eta) \in \Delta[m]^\sharp \times \Delta[n]^\sharp$ og anta at $\zeta \leq \mu$ og $\eta \leq \nu$. Tenk på $P^{\mu, \nu}$ og $P^{\zeta, \eta}$ som partielt ordnede delmengder av mengden $C^{m, n}$ av ikke-tomme kjeder i $[m] \times [n]$. Det er fullt mulig at vi for en $\gamma \in P^{\mu, \nu}$ har at

$$\gamma \subseteq \text{Im } \mu \times \text{Im } \nu \setminus \text{Im } \zeta \times \text{Im } \eta,$$

noe som vil innebære at $\gamma \cap \text{Im } \zeta \times \text{Im } \eta = \emptyset$. Hvis vi imidlertid begrenser oss til den partielt ordnede delmengden $P_{\zeta, \eta}^{\mu, \nu}$ av $P^{\mu, \nu}$ bestående av de elementene som er (ζ, η) -fullstendige, så får vi en ordningsbevarende funksjon

$$\begin{aligned} P_{\zeta, \eta}^{\mu, \nu} &\rightarrow P^{\zeta, \eta} \\ \gamma &\mapsto \gamma \cap \text{Im } \zeta \times \text{Im } \eta. \end{aligned}$$

Anta at (z, w) er et ikke-degenerert r -simpleks i $Sd\Delta[m] \times Sd\Delta[n]$ for en $r > 0$. For $0 \leq j \leq r$, la $z_j = z(j)$ og $w_j = w(j)$. Vi viste i lemma 5.2 på side 32 at inversbildet under f av den simplisielle delmengden generert av (z, w) er nerven til den partielt ordnede mengden

$$P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}.$$

Siden den simplisielle mengden

$$Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n] \cong N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp)$$

er ikke-singulær er den representerende avbildningen $\overline{(z, w)}$ til simplekset (z, w) en kofibrering og diagrammet

$$\begin{array}{ccc} Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) & \xrightarrow{f} & Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n] \\ \uparrow & & \uparrow \overline{(z, w)} \\ N(\cup_{i=0}^r P^{z_i, w_i}) & \xrightarrow{\bar{f}} & \Delta[r] \end{array}$$

er da et pullback-diagram. For hver j med $0 \leq j \leq r$, la V_j være den partielt ordnede mengden bestående av de (z_j, w_j) -veiene som er fullstendige med hensyn på

$$(z_0, w_0), \dots, (z_{j-1}, w_{j-1}).$$

Vi har da $V_j \subseteq P^{z_j, w_j}$, $0 \leq j \leq r$, og spesielt er $V_0 = P^{z_0, w_0}$. For $0 < j \leq r$, definer en ordningsbevarende funksjon φ_j ved

$$\begin{aligned} \varphi_j : V_j &\rightarrow V_{j-1} \\ \gamma &\mapsto \gamma \cap \text{Im } z_{j-1} \times \text{Im } w_{j-1}. \end{aligned}$$

En kan tenke på φ_j som funksjonen som for hver $\gamma \in V_j$ plukker ut de elementene i billedmengden til γ som er inneholdt i $\text{Im } z_{j-1} \times \text{Im } w_{j-1}$. Med andre ord er $\varphi_j(\gamma) = \gamma\xi$, der ξ er den maksimale fasettoperatoren som er slik at $\gamma\xi \in P^{z_{j-1}, w_{j-1}}$. Ethvert punkt i en r -celle i $|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$ er entydig representert av et minimalt par av dimensjon r siden det kosimplisielle rommet brukt til å definere den geometriske realiseringen har Eilenberg-Zilber egenskapen. Hvis $t \in \Delta^r$ er et indre punkt er dermed parett $((z, w), t)$ entydig representant for et punkt i $|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$. Vi har at

$$|f|^{-1}[(z, w), t] \cong |\bar{f}|^{-1}[t^r, t].$$

Del 1 av beviset for at f er simpel er å begrunne at

$$|\bar{f}|^{-1}[t^r, t] \subseteq |V_0 \cup \dots \cup V_r|,$$

samt å vise at den simplisielle delmengden

$$N(V_0 \cup \dots \cup V_r) \subseteq N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r})$$

kan beskrives som den r -foldig itererte reduserte avbildningssylinderen $M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r)$ til sekvensen

$$NV_0 \xleftarrow{N\varphi_1} \dots \xleftarrow{N\varphi_r} NV_r.$$

Vi skal beskrive $N(V_0 \cup \dots \cup V_r)$ som en redusert avbildningssylinder ved å vise at $P(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ er en partielt ordnet delmengde av $(\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$, eller med andre ord at

$$P(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = V_0 \cup \dots \cup V_r.$$

Siden den ordningsbevarende funksjonen

$$(\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp \xrightarrow{pr_1^\sharp \times pr_2^\sharp} \Delta[m]^\sharp \times \Delta[n]^\sharp$$

sender $\gamma \in P^{z_j, w_j}$ på (z_j, w_j) er avbildningen \bar{f} fra pullback-diagrammet over nerven til den ordningsbevarende funksjonen

$$P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r} \rightarrow [r]$$

som sender $\gamma \in P^{z_j, w_j}$ på j . Det vil følge av den universelle pullback-egenskapen til $N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r})$ at vi kan se på

$$N(V_0 \cup \dots \cup V_r) \rightarrow N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}) \xrightarrow{\bar{f}} \Delta[r]$$

som den reduserte sylinderekordinatprojeksjonen. Vi har da det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) & \xrightarrow{f} & Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n] \\ \uparrow & & \uparrow (z, \bar{w}) \\ N(\cup_{i=0}^r P^{z_i, w_i}) & \xrightarrow{\bar{f}} & \Delta[r] \\ \uparrow & \nearrow rcpr & \\ M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) & & \end{array}$$

og rommet $|\bar{f}|^{-1}[t^r, t]$ kan betraktes som inversbildet $|rcpr|^{-1}[t^r, t]$ hvis det er riktig at

$$|\bar{f}|^{-1}[t^r, t] \subseteq |V_0 \cup \dots \cup V_r|.$$

Dersom $rcpr$ er en simpel avbildning må da $|f|^{-1}[(z, w), t]$ være kontraktibelt. Fra kapittelet om den reduserte avbildningssylinderen har vi det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} T(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) & \xrightarrow{red} & M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_2) \\ \downarrow cpr & & \downarrow rcpr \\ T^r & \xrightarrow[\simeq_s]{red} & M^r \end{array}$$

der T^r og M^r er henholdsvis den itererte topologiske - og den itererte reduserte avbildningssylinderen til sekvensen

$$\Delta[0] \leftarrow \dots \leftarrow \Delta[0].$$

Hvis vi kan vise at sylinderreduksjonen red og den ordinære sylinderekordinatprojeksjonen cpr er simple vil det følge av høyrekanselleringsloven for simple avbildninger at den reduserte sylinderekordinatprojeksjonen $rcpr$ er simpel. I forrige kapittel hadde vi et kriterium for å avgjøre om nerven til en ordningsbevarende funksjon har simpel sylinderreduksjon, nemlig proposisjon 9.5 på side 70. Del 2 er å bruke dette kriteriet til å vise at red er simpel. Den tredje og siste delen av beviset er å begrunne at V_0, \dots, V_r er kontraktible partielt ordnede mengder. Dette vil medføre at cpr er simpel siden lemma 6.1 på side 43 viser at hver punktivers til sylinderekordinatprojeksjonen $|cpr|$ er homeomorf med ett av rommene $|V_j|$, $j = 0, 1, \dots, r$.

I dette avsnittet har vi valgt naturlige tall m og n og latt f betegne avbildningen

$$Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \rightarrow Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

fra oppdelingen av produktet til produktet av oppdelingene. Videre har vi valgt et ikke-degenerert r -simpleks

$$(z, w) \in Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

for en $r > 0$ og betegnet avbildningen

$$N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}) \rightarrow \Delta[r]$$

fra pullback-diagrammet over, den som er indusert av f ved $\overline{(z, w)}$, med \bar{f} . Dessuten har vi definert en sekvens

$$V_0 \xleftarrow{\varphi_1} \dots \xleftarrow{\varphi_r} V_r$$

av ordningsbevarende funksjoner. I avsnittene 10.2 (del 1), 10.3 (del 2) og 10.5 skal vi når vi bruker noen av disse symbolene mene nettopp objektene definert i dette avsnittet.

10.2 Del 1

Vi viser at avbildningen

$$N(V_0 \cup \dots \cup V_r) \rightarrow N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}) \xrightarrow{\bar{f}} \Delta[r]$$

kan sees på som den reduserte sylinderkoordinatprojeksjonen $rcpr$ fra $M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r)$ og at for et indre punkt $t \in \Delta^r$, så kan inversbildet $|f|^{-1}[(z, w), t]$ beskrives som fiberen $|rcpr|^{-1}[\iota^r, t]$.

Lemma 10.1. *For et indre punkt $t \in \Delta^r$ er*

$$|\bar{f}|^{-1}[\iota^r, t] \subseteq |V_0 \cup \dots \cup V_r|.$$

Bevis. Vi skal altså vise at inversbildet av $[\iota^r, t]$ under avbildningen

$$N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}) \xrightarrow{\bar{f}} \Delta[r]$$

er inneholdt i $|V_0 \cup \dots \cup V_r|$. Husk at \bar{f} er nerven til den ordningsbevarende funksjonen

$$P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r} \xrightarrow{\psi} [r]$$

som sender et element $\gamma \in P^{z_j, w_j}$ på j . Anta at (x, s) er et par av dimensjon p , med s et indre punkt, som representerer et punkt i $|P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}|$

som sendes på $[t^r, t]$ under $|\bar{f}|$. Vi har da at $(f(x), s)$ og (t^r, t) er i samme ekvivalensklasse. Hvis vi lar $y = f(x)$ er dessuten

$$(f(x), s) \sim (y^\sharp, y^\flat s)$$

og degenerasjonsoperatorer bevarer indre punkter, så $y^\flat s$ er et indre punkt. Siden det kun er ett minimalt par i hver ekvivalensklasse må

$$(y^\sharp, y^\flat s) = (t^r, t).$$

Vi har at $\text{Im } y = \text{Im } y^\sharp = [r]$ og y er sammensetningen

$$[p] \xrightarrow{x} P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r} \xrightarrow{\psi} [r].$$

Funksjonen $\psi \circ x$ kan bare ha billedmengde lik $[r]$ hvis det finnes en $\gamma^j \in \text{Im } x$ som er inneholdt i P^{z_j, w_j} for hver j med $0 \leq j \leq r$. Hvis nå $\gamma \in \text{Im } x$ er inneholdt i P^{z_k, w_k} for en k med $0 < k \leq r$ følger det, siden x har et totalt ordnet domene, at vi for hver j med $0 \leq j \leq k$ har at $\gamma^j \leq \gamma$. Altså er $\gamma(z_j, w_j)$ -fullstendig. Det følger at $x \in N(V_0 \cup \dots \cup V_r)$ og dermed er $[x, s] \in |V_0 \cup \dots \cup V_r|$. \square

La C og D være partielt ordnede mengder. Vi minner om lemma 3.2 på side 8 som sier at den partielt ordnede mengden $C \cup_\varphi D$ som vi får fra en ordningsbevarende funksjon $\varphi : C \rightarrow D$ ved å utvide ordningen på $C \sqcup D$ ved å la $c > \varphi(c)$ for alle $c \in C$ er slik at hvis $c \in C$ og $d \in D$, så er $d < c$ i $C \cup_\varphi D$ hvis og bare hvis $d \leq \varphi(c)$. Videre minner vi om at den partielt ordnede mengden $P(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ er bygd rekursivt, på følgende måte: La ψ_r betegne φ_r . For j med $1 \leq j < r$, la ψ_j være sammensetningen

$$P(\varphi_{j+1}, \dots, \varphi_r) \xrightarrow{\psi_{j+1} \vee 1} V_j \xrightarrow{\varphi_j} V_{j-1},$$

og definer

$$P(\varphi_j, \dots, \varphi_r) = P(\varphi_{j+1}, \dots, \varphi_r) \cup_{\psi_j} V_{j-1}.$$

Lemma 10.2. *Den partielt ordnede mengden $P(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ er en partielt ordnet delmengde av $(\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$.*

Bevis. Vi bruker induksjon. Vi skal tenke på $P = (\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$ som den partielt ordnede mengden av kjeder i $[m] \times [n]$ under inklusjonsordningen og på V_0, \dots, V_r som partielt ordnede delmengder av sistnevnte. For $0 \leq j \leq r$, la $L_j = \text{Im } z_j \times \text{Im } w_j$.

Grunntrinn:

Vi skal vise at

$$P(\varphi_r) = V_r \cup_{\varphi_r} V_{r-1}$$

er en partielt ordnet delmengde av P . Siden funksjonen φ_r snitter med mengden L_{r-1} er $P(\varphi_r)$ en svakt partielt ordnet delmengde av P . Anta at $\beta \in V_{r-1}$ og $\gamma \in V_r$ er slik at $\beta \leq \gamma$ i P . Vi har da

$$\beta = \beta \cap L_{r-1} \leq \gamma \cap L_{r-1} = \varphi_r(\gamma)$$

i V_{r-1} . Ved lemma 3.2 på side 8 har vi da at $\beta < \gamma$ i $P(\varphi_r)$.

Induksjonstrinn:

Anta nå at vi for en k med $1 \leq k < r$ har at $P(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_r)$ er en partielt ordnet delmengde av P . Vi skal vise at $P(\varphi_k, \dots, \varphi_r)$ også har den induserte ordningen. Først viser vi at $P(\varphi_k, \dots, \varphi_r)$ er en svakt partielt ordnet delmengde av P . Anta at $\beta \in V_{k-1}$ og at $\gamma \in P(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_r)$ er slik at $\beta \leq \gamma$ i $P(\varphi_k, \dots, \varphi_r)$. Vi skal vise at $\beta \leq \gamma$ i P . Siden $\beta \leq \gamma$ i $P(\varphi_k, \dots, \varphi_r)$ er $\beta \leq \psi_k(\gamma)$ i V_{k-1} . Ved induksjonshypotesen har vi at $V_k \cup \dots \cup V_r = P(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_r)$ og vi kan betrakte den ordningsbevarende funksjonen ψ_k som funksjonen

$$\begin{aligned} V_k \cup \dots \cup V_r &\rightarrow V_{k-1} \\ \alpha &\mapsto \alpha \cap L_{k-1}. \end{aligned}$$

Men at $\beta \leq \gamma \cap L_{k-1}$ i V_{k-1} medfører at β som kjede er inneholdt i γ , altså er $\beta \leq \gamma$ i P . Omvendt, anta at $\beta \in V_{k-1}$ og $\gamma \in P(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_r)$ er slik at $\beta \leq \gamma$ i P . Det medfører at

$$\beta = \beta \cap L_{k-1} \leq \gamma \cap L_{k-1}$$

i P og dermed også i V_{k-1} siden V_{k-1} er en partielt ordnet delmengde av P . Siden $\psi_k(\gamma) = \gamma \cap L_{k-1}$ følger det av lemma 3.2 at $\beta < \gamma$ i $P(\varphi_k, \dots, \varphi_r)$. \square

Korollar 10.3. For et indre punkt $t \in \Delta^r$ er

$$|f|^{-1}[(z, w), t] \cong |rcpr|^{-1}[l^r, t].$$

Bevis. Det følger av lemmaet over sammen med lemma 9.6 på side 74 at

$$M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \cong N(V_0 \cup \dots \cup V_r)$$

og siden \bar{f} er nerven til den ordningsbevarende funksjonen

$$P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r} \rightarrow [r]$$

som sender $\gamma \in P^{z_j, w_j}$ på j kan

$$N(V_0 \cup \dots \cup V_r) \rightarrow N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}) \xrightarrow{\bar{f}} \Delta[r]$$

sees på som den reduserte sylinderkoordinatprojeksjonen $rcpr$ fra $M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r)$. Ved lemma 10.1 er da

$$|\bar{f}|^{-1}[l^r, t] \cong |rcpr|^{-1}[l^r, t].$$

\square

10.3 Del 2

I dette avsnittet skal vi vise at sylinderreduksjonen

$$T(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \xrightarrow{\text{red}} M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r)$$

er simpel. Observer først at det å oppfatte elementene γ i

$$P = (\Delta[m] \times \Delta[n])^\sharp$$

som ikke-tomme kjeder i den partielt ordnede mengden $[m] \times [n]$ gir oss følgende operasjoner. Hvis $v \in P$ kan vi ta unionen

$$\begin{aligned} P/v \times P/v &\rightarrow P/v \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cup \beta. \end{aligned}$$

For distinkte par $(\mu, \nu), (\zeta, \eta) \in \Delta[m]^\sharp \times \Delta[n]^\sharp$ med $\zeta \leq \mu$ og $\eta \leq \nu$ har vi den ordningsbevarende funksjonen

$$\begin{aligned} P^{\mu, \nu} &\rightarrow P \\ \gamma &\mapsto \gamma \setminus \text{Im } \zeta \times \text{Im } \eta \end{aligned}$$

som sender γ på et element i P/γ . Legg merke til at vi kan skrive

$$\gamma = (\gamma \cap \text{Im } \zeta \times \text{Im } \eta) \cup (\gamma \setminus \text{Im } \zeta \times \text{Im } \eta)$$

hvis $\gamma \in P_{\zeta, \eta}^{\mu, \nu}$.

Lemma 10.4. *Velg en k med $0 < k \leq r$. Den simplisielle avbildningen $N(\varphi_k/v)$ er simpel for alle $v \in V_k$.*

Bevis. Vi viser at $N(\varphi_k/v)$ er en homotopiekvivalens over målet. Anta at $v \in V_k$. Vi begynner med å konstruere et tverrsnitt

$$s : V_{k-1}/\varphi_k(v) \rightarrow V_k/v$$

av φ_k/v . La

$$L_j = \text{Im } z_j \times \text{Im } w_j,$$

for $0 \leq j \leq k$, og anta at $\beta \in V_{k-1}/\varphi_k(v)$. Se på unionen

$$\alpha = \beta \cup (v \setminus L_{k-1})$$

som er et element i P/v . Vi skal vise at α er inneholdt i den partielt ordnede delmengden V_k/v . Først skal vi vise at den øverste av likhetene

$$\text{Im } \alpha_1 = \text{Im } z_k \tag{2}$$

$$\text{Im } \alpha_2 = \text{Im } w_k \tag{3}$$

holder. Likning (3) kan bekreftes på samme måte, og dermed vil det følge at $\alpha \in P^{z_k, w_k}$. Anta at $t \in \text{Im } z_k$. Siden $v \in P^{z_k, w_k}$ finnes det en $i \in \text{dom } v$ slik at $v_1(i) = t$. Hvis $v(i) \notin L_{k-1}$ går α innom punktet $v(i)$ ettersom $v \setminus L_{k-1} \leq \alpha$, det vil si at $v_1(i) \in \text{Im } \alpha_1$. Hvis derimot $v(i) \in L_{k-1}$ finnes det siden β er en (z_{k-1}, w_{k-1}) -vei en $j \in \text{dom } \beta$ med $\beta_1(j) = v_1(i)$, og dermed er $v_1(i) \in \text{Im } \alpha_1$. Dette viser at $t \in \text{Im } \alpha_1$, altså er $\text{Im } \alpha_1 \supseteq \text{Im } z_k$, og det følger at likning (2) holder. For $0 \leq i < k$ er

$$\begin{aligned} \alpha \cap L_i &= (\beta \cup (v \setminus L_{k-1})) \cap L_i \\ &= (\beta \cap L_i) \cup ((v \setminus L_{k-1}) \cap L_i) \\ &= \beta \cap L_i. \end{aligned}$$

Siden β er en (z_{k-1}, w_{k-1}) -vei som er fullstendig med hensyn på

$$(z_0, w_0), \dots, (z_{k-2}, w_{k-2})$$

følger det at α er fullstendig med hensyn på

$$(z_0, w_0), \dots, (z_{k-1}, w_{k-1}).$$

Dermed er den ordningsbevarende funksjonen

$$\begin{aligned} s : V_{k-1}/\varphi_k(v) &\rightarrow V_k/v \\ \beta &\mapsto \beta \cup (v \setminus L_{k-1}). \end{aligned}$$

et tverrsnitt av φ_k/v . Hvis $\gamma \in V_k/v$ ser vi at

$$\gamma = (\gamma \cap L_{k-1}) \cup (\gamma \setminus L_{k-1}) \leq (\gamma \cap L_{k-1}) \cup (v \setminus L_{k-1}) = s \circ \varphi_k/v(\gamma),$$

det vil si at

$$1_{V_k/v} \leq s \circ \varphi_k/v.$$

Som vi bemerket i eksempel 8 på side 54 er det automatisk at $N(\varphi_k/v)$ er en homotopiekvivalens over målet. \square

Vi vil trenge følgende observasjon.

Lemma 10.5. *La C og D være endelige partielt ordnede mengder og anta at $\varphi : C \rightarrow D$ er en ordningsbevarende funksjon. Da er avbildningen*

$$N((\varphi \vee 1)/v) : N(C \cup_\varphi D/v) \rightarrow N(D/v)$$

simpel for alle $v \in C \cup_\varphi D$.

Bevis. Hvis $v \in D$ er $(\varphi \vee 1)/v$ identiteten. Se derfor på tilfellet $v \in C$. En kan kontrollere at

$$(C \cup_\varphi D)/v = C/v \cup_{\varphi/v} D/\varphi(v).$$

Vi kan derfor betrakte

$$(C \cup_{\varphi} D)/v \xrightarrow{(\varphi \vee 1)/v} D/\varphi(v)$$

som funksjonen

$$C/v \cup_{\varphi/v} D/\varphi(v) \xrightarrow{\varphi/v \vee 1} D/\varphi(v).$$

Av lemma 9.3 på side 67 følger det at nerven til funksjonen $\varphi/v \vee 1$ er simpel og dermed er $N((\varphi \vee 1)/v)$ simpel. \square

Proposisjon 10.6. *Sylinderreduksjonen*

$$T(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \xrightarrow{red} M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r)$$

er simpel.

Bevis. Lemmaet over viser at kriteriet vi har (proposisjon 9.5 på side 70) for å avgjøre om nerven til en ordningsbevarende funksjon har simpel sylinderreduksjon, er oppfylt i tilfellet φ_r , så

$$red : T(N\varphi_r) \rightarrow M(N\varphi_r)$$

er simpel. Hvis $r = 1$ er vi ferdige, men ellers er det mer arbeid å gjøre. Anta at vi for en k med $1 \leq k < r$ har at sylinderreduksjonen

$$T(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r) \xrightarrow{red} M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r)$$

er simpel. Vi skal vise at det medfører at

$$T(N\varphi_k, \dots, N\varphi_r) \xrightarrow{red} M(N\varphi_k, \dots, N\varphi_r)$$

også er simpel. Den nederste sylinderreduksjonen kan faktoriseres slik:

$$\begin{array}{ccc} T(NV_{k-1} \leftarrow T(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r)) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & T(NV_{k-1} \leftarrow M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r)) & \\ & \swarrow & \\ M(NV_{k-1} \leftarrow M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r)) & & \end{array}$$

Her har avbildningen

$$T(NV_{k-1} \leftarrow T(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r)) \rightarrow T(NV_{k-1} \leftarrow M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r))$$

opphav i diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} T(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r) & \xrightarrow{pr} & NV_k & \xrightarrow{N\varphi_k} & NV_{k-1} \\ \downarrow red & & & & \downarrow 1 \\ M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r) & \xrightarrow{rpr} & NV_k & \xrightarrow{N\varphi_k} & NV_{k-1} \end{array}$$

og det følger av limelemmaet at den er simpel. Vi ønsker i tillegg å vise at sylinderreduksjonen

$$T(NV_{k-1} \leftarrow M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r)) \rightarrow M(NV_{k-1} \leftarrow M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r))$$

er simpel. Hvis vi kan gjøre det, vil det følge av komposisjonsloven for simple avbildninger at

$$T(N\varphi_k, \dots, N\varphi_r) \xrightarrow{red} M(N\varphi_k, \dots, N\varphi_r)$$

er simpel. Avbildningen

$$M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r) \rightarrow NV_{k-1}$$

er nerven til sammensetningen

$$P(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_r) \xrightarrow{\psi_{k+1} \vee 1} V_k \xrightarrow{\varphi_k} V_{k-1},$$

betegnet med ψ_k . I følge lemma 10.4 er $N(\varphi_k/w)$ er simpel for alle $w \in V_k$. Dessuten er $N((\psi_{k+1} \vee 1)/v)$ simpel for alle $v \in P(\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_r)$ i følge lemma 10.5. Ved kriteriet i proposisjon 9.5 har derfor

$$M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r) \rightarrow NV_{k-1}$$

simpel sylinderreduksjon. Som annonsert følger det av komposisjonsloven for simple avbildninger at sylinderreduksjonen

$$T(NV_{k-1} \leftarrow T(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r)) \xrightarrow{red} M(NV_{k-1} \leftarrow M(N\varphi_{k+1}, \dots, N\varphi_r))$$

er simpel og vi er nå ferdige med induksjonen. \square

10.4 Del 3

I dette kapitlet skal vi generalisere proposisjon 5.4 på side 36 som viste at $P^{m,n}$ er en kontraktibel partielt ordnet mengde. Av proposisjon 10.13 vil det følge at de partielt ordnede mengdene V_0, \dots, V_r definert i avsnitt 10.1 er kontraktible.

Definisjon La (z, w) være et r -simpleks

$$(z, w) \in N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp).$$

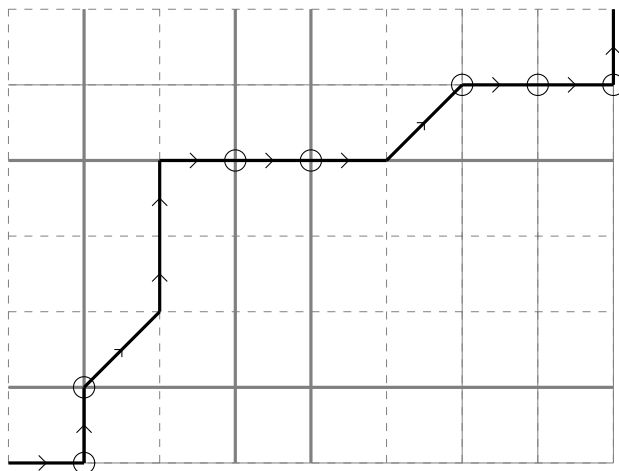
Vi skriver $z_j = z(j)$ og $w_j = w(j)$ for $0 \leq j \leq r$, og vi definerer en (z, w) -vei som en (z_r, w_r) -vei som er fullstendig med hensyn på

$$(z_0, w_0), \dots, (z_{r-1}, w_{r-1}).$$

La $P^{z,w}$ betegne mengden av (z, w) -veier, med den induserte partielle ordningen som delmengde av P^{z_r, w_r} .

Siden en (z, w) -vei er et eksempel på en (z_r, w_r) -vei kan den tenkes på som en ikke-tom kjede $x = \{x_0 < \dots < x_r\}$ i $[m] \times [n]$. Et objekt i $P^{z,w}$ tilfredsstiller $r + 1$ kompatibilitetskriterier der det $(r + 1)$ -te sier at objektet skal være en (z_r, w_r) -vei og der de r første begrenser hvordan denne veien *beveger seg*. Det j -te kompatibilitetskriteriet sier at veien må være (z_j, w_j) -fullstendig, og når vi tenker på veien som kjeden x innebærer dette at x må ha en delkjede som kan tenkes på som en (z_j, w_j) -vei.

Eksempel 15. Følgende er ment å symbolisere en (z, w) -vei, der $r = 2$.



De stiplede, de tynne og de tykkere grå strekene er ment å symbolisere henholdsvis de tre parene (z_2, w_2) , (z_1, w_1) og (z_0, w_0) av fasettoperatorer som veien er kompatibel med. Her er

$$\begin{aligned} z_2 &= \iota^8 \\ w_2 &= \iota^6 \\ \text{Im } z_1 &= \{1, 3, 4, 6, 7, 8\} \\ \text{Im } w_1 &= \{0, 1, 4, 5\} \\ \text{Im } z_0 &= \{1, 3, 4\} \\ \text{Im } w_0 &= \{1, 4\}, \end{aligned}$$

så veien er en $(8, 6)$ -vei. De syv sirklene på figuren er ment å illustrere at veien er (z_1, w_1) -fullstendig. De seks krysningpunktene mellom de tykkeste av de grå strekene nettopp billedmengden $\text{Im } z_0 \times \text{Im } w_0$ og leseren klarer selv å se at veien er (z_0, w_0) -fullstendig.

Som før lar vi $C^{m,n}$ betegne den partielt ordnede mengden av ikke-tomme kjeder i $[m] \times [n]$, ordnet under inklusjon. Legg merke til at vi for et r -simpleks $(z, w) \in N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp)$ har inklusjonene

$$P^{z,w} \subseteq P^{z_r, w_r} \subseteq C^{m,n}.$$

Hvis $(p, q) \in [m] \times [n]$ lar vi $C_{(p,q)}^{m,n}$ betegne den partielt ordnede delmengden av $C^{m,n}$ bestående av de kjedene som inneholder punktet (p, q) . Observer at vi har en isomorfi

$$C_{(p,q)}^{m,n} \xrightarrow{\cong} C_{(p,q)}^{p,q} \times C_{(0,0)}^{m-p,n-q}$$

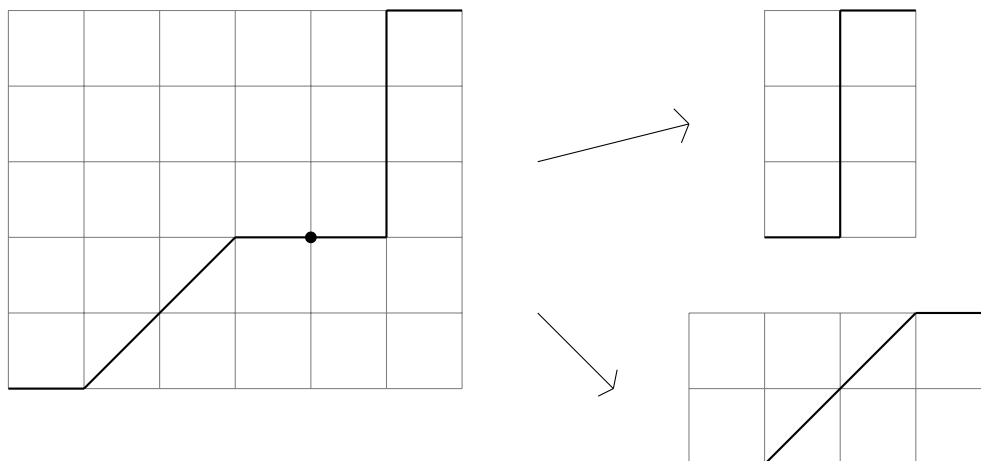
som sender en kjede

$$x = \{x_0 < \dots < x_l < \dots < x_k\}$$

av lengde k med $x_l = (p, q)$ på paret

$$(\{x_0 < \dots < x_l\}, \{x_l - (p, q) < \dots < x_k - (p, q)\}).$$

Dette svarer til at hvis en har en (m, n) -vei $\gamma : [k] \rightarrow [m] \times [n]$ som går innom et punkt (p, q) kan en tenke på γ som et par (γ^1, γ^2) der γ^1 er en (p, q) -vei og der γ^2 er en $(m-p, n-q)$ -vei, for eksempel slik som i figuren under.



Vi skal vise at hvis $(z, w) \in N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp)$ er et r -simpleks, så kan en skrive den partielt ordnede mengden $P_{(p,q)}^{z,w}$ av (z, w) -veier som går innom (p, q) som et produkt, basert på denne ideen. Vi skal senere bruke dette til å vise at vi for alle simplekser

$$(z, w) \in N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp)$$

har at $P^{z,w}$ er en kontraktibel kategori.

La M_*^2 betegne mengden av par (μ, p) der μ er en fasettoperator og $p \in \text{Im } \mu$. La LF betegne delmengden av $M_*^2 \times M_*^2$ bestående av par $((\mu_1 : [k_1] \rightarrow [m_1], m_1), (\mu_2, 0))$. Et element i LF blir normalt bare betegnet ved (μ_1, μ_2) .

Lemma 10.7. Hvis $(\mu, p) \in M_*^2$ og $\text{cod } \mu = [m]$ kan vi la μ^1 og μ^2 være fasettoperatorene med

$$\begin{aligned} \text{cod } \mu^1 &= [p] \\ \text{cod } \mu^2 &= [m-p] \end{aligned}$$

og med billedmengde de elementene i $\text{Im } \mu$ som er mindre enn eller lik p og de elementene $j - p$ for alle $j \in \text{Im } \mu$ slik at $j \geq p$, henholdsvis. Funksjonen

$$\begin{aligned} M_*^2 &\rightarrow LF \\ (\mu, p) &\mapsto (\mu^1, \mu^2) \end{aligned}$$

er en bijeksjon.

Bevis. Hvis $(\mu^1, \mu^2) \in LF$, hvis $\text{cod } \mu^1 = [m^1]$ og $\text{cod } \mu^2 = [m^2]$ kan vi definere fasettopoperatoren

$$\mu : [\dim \mu^1 + \dim \mu^2] \rightarrow [m^1 + m^2]$$

ved

$$\mu(i) = \begin{cases} \mu^1(i), & i \leq \dim \mu^1 \\ \mu^2(i - \dim \mu^1) + m^1, & i \geq \dim \mu^1 \end{cases}$$

Fasettopoperatoren μ er veldefinert siden

$$\mu^1(\dim \mu^1) = m^1 = 0 + m^1 = \mu^2(0) + m^1 = \mu^2(\dim \mu^2 - \dim \mu^2) + m^1.$$

Vi får en funksjon

$$\begin{aligned} LF &\rightarrow M_*^2 \\ (\mu^1, \mu^2) &\mapsto (\mu, p) \end{aligned}$$

Det følger direkte fra konstruksjonen at funksjonene $M_*^2 \rightarrow LF$ og $LF \rightarrow M_*^2$ er inverse. \square

Lemma 10.8. *Anta at (μ, p) og (ν, q) svarer til henholdsvis (μ^1, μ^2) og (ν^1, ν^2) under bijeksjonen $M_*^2 \rightarrow LF$. Anta at $x = \{x_0 < \dots < x_k\} \in C_{(p,q)}^{m,n}$ og at (x^1, x^2) svarer til x under isomorfien*

$$C_{(p,q)}^{m,n} \cong C_{(p,q)}^{p,q} \times C_{(0,0)}^{m-p,n-q}.$$

Da er x en (μ, ν) -vei hvis og bare hvis x^1 er en (μ^1, ν^1) -vei og x^2 er en (μ^2, ν^2) -vei.

Bevis. La $pr_1 : [m] \times [n] \rightarrow [m]$ og $pr_2 : [m] \times [n] \rightarrow [n]$ være projeksjonene. Definisjonen av en (μ, ν) -vei innebærer at x er en (μ, ν) -vei hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} \{pr_1(x_0) \leq \dots \leq pr_1(x_k)\} &= \text{Im } \mu \\ \{pr_2(x_0) \leq \dots \leq pr_2(x_k)\} &= \text{Im } \nu. \end{aligned}$$

Tilsvarende, hvis l er det entydige naturlige tallet med $0 \leq l \leq k$ som er slik at $x_l = (p, q)$, er x^1 en (μ^1, ν^1) -vei og x^2 en (μ^2, ν^2) -vei hvis og bare hvis henholdsvis

$$\begin{aligned} \{pr_1(x_0) \leq \dots \leq pr_1(x_l)\} &= \text{Im } \mu^1 \\ \{pr_2(x_0) \leq \dots \leq pr_2(x_l)\} &= \text{Im } \nu^1 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \{pr_1(x_l - (p, q)) \leq \dots \leq pr_1(x_k - (p, q))\} &= \text{Im } \mu^2 \\ \{pr_2(x_l - (p, q)) \leq \dots \leq pr_2(x_k - (p, q))\} &= \text{Im } \nu^2 \end{aligned}$$

Fra konstruksjonen av bijeksjonen $M_*^2 \rightarrow LF$ ser vi at det at de to øverste likningene er oppfylt er ekvivalent med at de fire nederste likningene er oppfylt ettersom

$$\begin{aligned} \text{Im } \mu^1 &= \{j \in \text{Im } \mu \mid j \leq p\} && \subseteq [p] \\ \text{Im } \mu^2 &= \{j - p \mid j \in \text{Im } \mu \text{ og } j \geq p\} && \subseteq [m - p] \end{aligned}$$

og tilsvarende for ν^1 og ν^2 . □

Korollar 10.9. For $0 \leq j \leq r$, la

$$(z, w) \in N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp)$$

være et r -simpleks som er slik at $(p, q) \in \text{Im } z_0 \times \text{Im } w_0$. La $((z_j^1, z_j^2), (w_j^1, w_j^2))$ betegne parer som svarer til $((z_j, p), (w_j, q))$ under bijeksjonen $M_*^2 \times M_*^2 \rightarrow LF \times LF$. Dette definerer to r -simplekser

$$\begin{aligned} (z^1, w^1) &\in N(\Delta[p]^\sharp) \times N(\Delta[q]^\sharp) \\ (z^2, w^2) &\in N(\Delta[m - p]^\sharp) \times N(\Delta[n - q]^\sharp). \end{aligned}$$

Hvis $(p, q) \in \text{Im } z_0 \times \text{Im } w_0$ restrikerer isomorfien

$$C_{(p,q)}^{m,n} \xrightarrow{\cong} C_{(p,q)}^{p,q} \times C_{(0,0)}^{m-p,n-q}$$

til en isomorfi

$$P_{(p,q)}^{z,w} \xrightarrow{\cong} P^{z^1,w^1} \times P^{z^2,w^2}.$$

Her er $P_{(p,q)}^{z,w}$ den partielt ordnede mengden av (z, w) -veier som går innom (p, q) . Videre, hvis $(p', q') \in \text{Im } z_0 \times \text{Im } w_0$ er slik at $(p', q') \leq (p, q)$ kan vi på tilsvarende måte identifisere

$$P_{(p',q'),(p,q)}^{z,w} \cong P^{z^1,w^1} \times P^{z^2,w^2} \times P^{z^3,w^3}$$

for passende r -simplekser

$$\begin{aligned} (z^1, w^1) &\in N(\Delta[p']^\sharp) \times N(\Delta[q']^\sharp) \\ (z^2, w^2) &\in N(\Delta[p - p']^\sharp) \times N(\Delta[q - q']^\sharp) \\ (z^3, w^3) &\in N(\Delta[m - p]^\sharp) \times N(\Delta[n - q]^\sharp). \end{aligned}$$

Bevis. Anta at $x \in C_{(p,q)}^{m,n}$ og at (x^1, x^2) svarer til x under isomorfien

$$C_{(p,q)}^{m,n} \cong C_{(p,q)}^{p,q} \times C_{(0,0)}^{m-p,n-q}.$$

Vi vet fra lemmaet over at x er en (z_r, w_r) -vei hvis og bare hvis x^1 er en (z_r^1, w_r^1) -vei og x^2 er en (z_r^2, w_r^2) -vei. Hvis x er en (z_r, w_r) -vei som er (z_j, w_j) -fullstendig for en j med $0 \leq j \leq r$, så har x en delkjede y som er en (z_j, w_j) -vei y . Denne svarer til et par (y^1, y^2) under isomorfin

$$C_{(p,q)}^{m,n} \cong C_{(p,q)}^{p,q} \times C_{(0,0)}^{m-p,n-q}$$

og vi har ved lemmaet over at y^1 er en (z_j^1, w_j^1) -vei og at y^2 er en (z_j^2, w_j^2) -vei. Siden y^1 er en delkjede av x^1 er x^1 (z_j^1, w_j^1) -fullstendig og siden y^2 er en delkjede av x^2 er x^2 (z_j^2, w_j^2) -fullstendig. Omvendt, hvis x er en (z_r, w_r) -vei, hvis x^1 er (z_j^1, w_j^1) -fullstendig og x^2 er (z_j^2, w_j^2) -fullstendig kan vi vise at x er (z_j, w_j) -fullstendig. Det følger at isomorfin over restrikerer til

$$P_{(p,q)}^{z,w} \cong P^{z^1, w^1} \times P^{z^2, w^2}.$$

Deretter kan vi identifisere

$$P_{(p',q')}^{z^1, w^1} \cong P^{z'^1, w'^1} \times P^{z'^2, w'^2}.$$

Kjeden

$$x = \{x_0 < \dots < x_l < \dots < x_k\} \in P_{(p,q)}^{z,w}$$

med $x_l = (p, q)$ inneholder (p', q') hvis og bare hvis delkjeden $\{x_0 < \dots < x_l\}$ inneholder (p', q') , så vi får

$$P_{(p',q'),(p,q)}^{z,w} \cong P_{(p',q')}^{z^1, w^1} \times P^{z^2, w^2} \cong P^{z'^1, w'^1} \times P^{z'^2, w'^2} \times P^{z^2, w^2}$$

og vi kan deretter navngi r -simpleksene som inngår i produktet på nytt. \square

Vi vil komme til å trenge følgende resultat om kombinatorikken til veiene.

Lemma 10.10. *Enhver (μ, ν) -vei, med $\dim \mu = s$ og $\dim \nu = t$, går innom punktene $(\mu(0), \nu(0))$ og $(\mu(s), \nu(t))$.*

Bevis. Anta at γ er en (μ, ν) -vei og at γ er bildet av en (s, t) -vei α under isomorfin

$$P^{s,t} \xrightarrow{\cong} P^{\mu,\nu}$$

fra beviset for lemma 5.3. Ved lemma 5.6 på side 38 går α innom $(0, 0)$ og (s, t) og siden $\gamma = (\mu\alpha_1, \nu\alpha_2)$ har vi

$$\gamma(0) = (\mu\alpha_1(0), \nu\alpha_2(0)) = (\mu(\alpha_1(0)), \nu(\alpha_2(0))) = (\mu(0), \nu(0))$$

og tilsvarende, hvis γ er av lengde k er

$$\gamma(k) = (\mu\alpha_1(k), \nu\alpha_2(k)) = (\mu(\alpha_1(k)), \nu(\alpha_2(k))) = (\mu(s), \nu(t)).$$

\square

Korollar 10.11. Hvis γ er en (μ, ν) -vei som er (ζ, η) -fullstendig og hvis $\dim \zeta = s$, $\dim \eta = t$, så går γ innom punktene $(\zeta(0), \eta(0))$ og $(\zeta(s), \eta(t))$.

Bevis. Resultatet følger umiddelbart fra lemmaet. □

Det siste hjelperesultatet vi trenger er fra oppgave 4.G.4 i [Ha01] og benytter seg av følgende begrep.

Definisjon La Z være et topologisk rom og

$$\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

en overdekning av Z . Simplisialkomplekset K med simplekser de endelige delmengdene $k \subseteq \Lambda$ slik at

$$\bigcap_{\lambda \in k} U_\lambda \neq \emptyset$$

er **nerven til overdekningen** \mathfrak{U} og betegnes med $N\mathfrak{U}$.

Proposisjon 10.12. La Z være et CW-kompleks og anta at \mathfrak{U} er en overdekning av Z bestående av underkomplekser. Hvis ethvert ikke-tomt snitt av endelig mange av underkompleksene i \mathfrak{U} er kontraktibelt, så er Z homotopiekvivalent med nerven til \mathfrak{U} .

Bevis. Se beviset for proposisjon 4G.2. i [Ha01, side 459] og dens korollar. □

På dette tidspunktet kan det være lurt å ha sett på det alternative beviset for proposisjon 5.4 siden vi vil bruke ideene derfra i beviset for den neste proposisjonen.

Proposisjon 10.13. Kategorien $P^{z,w}$ er for hvert r -simpleks

$$(z, w) \in N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp)$$

en kontraktibel kategori.

Bevis. Vi skal bruke induksjon på r . Denne induksjonen skal vi omtale som den *ytre induksjonen*. Proposisjon 5.4 sammen med lemma 5.3 på side 33 viser at påstanden i proposisjonen holder for $r = 0$ og utgjør grunntrinnet i den ytre induksjonen. Ytre induksjonshypotese er at påstanden holder for det naturlige tallet $r = k$. Observer at en kan konstruere et hvilket som helst $(k + 1)$ -simpleks

$$(x, y) \in N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[n]^\sharp)$$

ved å begynne med et k -simpleks (z, w) og så føye til et par av fasettoperatorer (ζ, η) slik at $\zeta \leq z_0$ og $\eta \leq w_0$. Hvis $\xi : [k] \rightarrow [k + 1]$ er fasettoperatoren med billedmengde lik $\{1, \dots, k + 1\}$ er da z den *bakre fasetten*

$$[k] \xrightarrow{\xi} [k + 1] \xrightarrow{x} \Delta[m]^\sharp$$

og w er den bakre fasetten

$$[k] \xrightarrow{\xi} [k+1] \xrightarrow{y} \Delta[n]^\sharp.$$

Ved en dobbel induksjon på dimensjonene til fasettoperatorene ζ og η , heretter kalt den *indre induksjonen*, skal vi vise at påstanden i formuleringen av proposisjonen holder for $r = k + 1$. Legg merke til at de (z, w) -veiene som er fullstendige med hensyn på (ζ, η) er nettopp (x, y) -veiene, det vil si

$$P^{x,y} = P_{\zeta,\eta}^{z,w}.$$

Vi skal flere ganger gjøre identifikasjoner av typen

$$P_{(p,q)}^{x,y} \cong P^{x^1,y^1} \times P^{x^2,y^2}$$

ved hjelp av korollar 10.9 og da vil vi gjennomgående betegne de bakre fasettene gitt ved

$$[k] \xrightarrow{\xi} [k+1] \xrightarrow{x^1} \Delta[p]^\sharp$$

og

$$[k] \xrightarrow{\xi} [k+1] \xrightarrow{x^2} \Delta[m-p]^\sharp$$

med henholdsvis z^1 og z^2 . De tilsvarende bakre fasettene av dimensjon k til y^1 og y^2 vil vi betegne med henholdsvis w^1 og w^2 . Endelig vil vi la $\zeta^j = x_0^j$ og $\eta^j = y_0^j$ for $j = 1, 2$.

Indre grunntrekk:

Anta at minst en av fasettoperatorene ζ og η har dimensjon lik 0 eller 1. Se først på tilfellet

$$\begin{aligned} \dim \zeta &= 0 \\ \dim \eta &= t. \end{aligned}$$

Anta at γ er en (z, w) -vei som går innom punktene $(\zeta(0), \eta(0))$ og $(\zeta(0), \eta(t))$. Hvis j_0 og j_t er slik at

$$\begin{aligned} (w_0)(j_0) &= \eta(0) \\ (w_0)(j_t) &= \eta(t) \end{aligned}$$

går γ innom punktene

$$(\zeta(0), (w_0)(j_0)), (\zeta(0), (w_0)(j_0 + 1)), \dots, (\zeta(0), (w_0)(j_t))$$

siden γ er (z_0, w_0) -fullstendig. Blant punktene over er punktene

$$(\zeta(0), \eta(1)), (\zeta(0), \eta(2)), \dots, (\zeta(0), \eta(t-1)).$$

Det følger at γ er en (x, y) -vei. I dette tilfellet er altså (x, y) -veiene nettopp (z, w) -veiene som går innom punktene $(\zeta(0), \eta(0))$ og $(\zeta(0), \eta(t))$, det vil si

$$P^{x,y} = P_{(\zeta(0), \eta(0)), (\zeta(0), \eta(t))}^{z,w}.$$

Hvis $t = 0$ er $(\zeta(0), \eta(0)) = (\zeta(0), \eta(t))$ og da bruker vi korollar 10.9 i punktet $(\zeta(0), \eta(0))$ til å identifisere

$$P_{(\zeta(0), \eta(0))}^{z, w} \cong P^{z^1, w^1} \times P^{z^2, w^2}$$

der (z^1, w^1) og (z^2, w^2) begge er k -simplekser. Hvis $t \neq 0$ bruker vi samme resultat i punktene $(\zeta(0), \eta(0)), (\zeta(0), \eta(t))$ til å identifisere

$$P_{(\zeta(0), \eta(0)), (\zeta(0), \eta(t))}^{z, w} \cong P^{z^1, w^1} \times P^{z^2, w^2} \times P^{z^3, w^3}$$

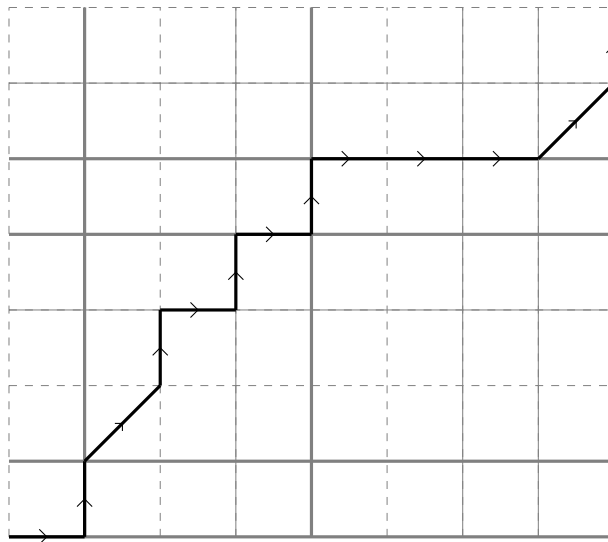
der $(z^1, w^1), (z^2, w^2)$ og (z^3, w^3) er k -simplekser. I begge tilfeller er $P_{(\zeta(0), \eta(0)), (\zeta(0), \eta(t))}^{z, w}$ kontraktibel ved ytre induksjonshypotese. Tilfellet

$$\begin{aligned} \dim \zeta &= s \\ \dim \eta &= 0 \end{aligned}$$

er analogt. Se nå på tilfellet

$$\begin{aligned} \dim \zeta &= 1 \\ \dim \eta &= t > 0. \end{aligned}$$

En (x, y) -vei kan for eksempel se ut som på figuren under, der $t = 3$. Legg merke til at veien går innom punktene $(\zeta(0), \eta(1))$ og $(\zeta(1), \eta(2))$.



I eksempelet illustrert av figuren må enhver (x, y) -vei gå innom de to punktene $(\zeta(0), \eta(j))$ og $(\zeta(1), \eta(j+1))$ for en $j \in \{0, 1, 2\}$. Vi skal se at dette fenomenet holder mer generelt. Anta at $\gamma \in P^{x, y}$. Se på $\beta = \gamma \cap \text{Im } \zeta \times \text{Im } \eta$. Vi så i lemma 5.7 på side 39 at enhver $(1, t)$ -vei går innom $(0, j)$ og $(1, j+1)$

for en j med $0 \leq j < t$. Hvis nå β svarer til en $(1, t)$ -vei α , som går innom $(0, j)$ og $(1, j + 1)$, under isomorfin

$$P^{1,t} \xrightarrow{\cong} P^{\zeta,\eta}$$

fra beviset for lemma 5.3 er $\beta = (\zeta\alpha_1, \eta\alpha_2)$ og derfor må β gå innom $(\zeta(0), \eta(j))$ og $(\zeta(1), \eta(j + 1))$. Vi skal utnytte dette om litt. Hvis det ikke er riktig at

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= \eta(0) = 0 \\ \eta(1) &= m \\ \eta(t) &= n\end{aligned}$$

kan vi bruke korollar 10.9 i punktene $(\zeta(0), \eta(0))$ $(\zeta(1), \eta(t))$ til å identifisere

$$P^{x,y} \cong P^{x^1,y^1} \times P^{x^2,y^2} \times P^{x^3,y^3}.$$

De partielt ordnede mengdene P^{x^1,y^1} og P^{x^3,y^3} er kontraktible ved arbeidet vi allerede har gjort siden $\dim \zeta^1 = \dim \zeta^3 = 0$. Dessuten er

$$(x^2, y^2) \in N(\Delta[\zeta(1) - \zeta(0)]^\sharp) \times N(\Delta[\eta(t) - \eta(0)]^\sharp)$$

og vi har

$$\begin{aligned}\zeta^2(0) &= \eta^2(0) = 0 \\ \zeta^2(1) &= \zeta(1) - \zeta(0) \\ \eta^2(t) &= \eta(t) - \eta(0).\end{aligned}$$

Det følger at vi kan anta at

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= \eta(0) = 0 \\ \eta(1) &= m \\ \eta(t) &= n.\end{aligned}$$

og jobbe videre med $P^{x,y}$. La

$$Q_j = P_{(\zeta(0), \eta(j)), (\zeta(1), \eta(j+1))}^{x,y},$$

for $0 \leq j < t$. Enhver (x, y) -vei må gå innom de to punktene $(\zeta(0), \eta(j))$ og $(\zeta(1), \eta(j + 1))$ for en eller annen j med $0 \leq j < t$, så vi har at

$$P^{x,y} = Q_0 \cup \dots \cup Q_{t-1}.$$

Observer at Q_j , $0 \leq j < t$, er et filter i $P^{x,y}$. Det følger at $\{NQ_j\}_{0 \leq j < t}$ er en overdekning av $NP^{x,y}$. Vi kan bruke korollar 10.9 i punktene $(\zeta(0), \eta(j))$ og $(\zeta(1), \eta(j + 1))$ til å identifisere

$$Q_j \cong P^{x^1,y^1} \times P^{x^2,y^2} \times P^{x^3,y^3}.$$

der (x^1, y^1) , (x^2, y^2) og (x^3, y^3) alle er $(k + 1)$ -simplekser. Dimensjonen til ζ^1 og ζ^3 er 0, så P^{x^1,y^1} og P^{x^3,y^3} er kontraktible. Legg merke til at (x^2, y^2) lever

i $N(\Delta[m]^\sharp) \times N(\Delta[\eta(j+1) - \eta(j)]^\sharp)$. Husk at vi kan skrive $P^{x^2, y^2} = P_{\zeta^2, \eta^2}^{z^2, w^2}$ og at (z^2, w^2) er et k -simpleks. Legg merke til at

$$\dim \zeta^2 = \dim \eta^2 = 1$$

og at

$$\begin{aligned} \zeta^2(0) &= \eta^2(0) &= 0 \\ \zeta^2(1) &= m \\ \eta^2(1) &= \eta(j+1) - \eta(j). \end{aligned}$$

Siden

$$\zeta^2 = x_0^2 \leq x_1^2 = z_0^2$$

må vi ha at

$$\zeta^2(0) = (z_0^2)(j)$$

for en eller annen j og ettersom $\zeta^2(0) = 0$ må $j = 0$. Tilsvarende er

$$\eta^2 = y_0^2 \leq y_1^2 = w_0^2$$

som medfører at det finnes en j slik at

$$\eta^2(0) = (w_0^2)(j)$$

og siden $\eta^2(0) = 0$ må $j = 0$. Hvis $\dim z_0^2 = p$ og $\dim w_0^2 = q$ er

$$\begin{aligned} (z_0^2)(p) &= \zeta^2(1) \\ (w_0^2)(q) &= \eta^2(1). \end{aligned}$$

Nå følger det av korollar 10.11 at enhver (z^2, w^2) -vei går innom punktene $(\zeta^2(0), \eta^2(0))$ og $(\zeta^2(1), \eta^2(1))$ og er dermed (ζ^2, η^2) -fullstendig. Altså er $P^{x^2, y^2} = P^{z^2, w^2}$ i dette tilfellet og P^{z^2, w^2} er kontraktibel ved ytre induksjonshypotese. Det følger at Q_j er kontraktibel. Vi fortsetter med å se på snittene av de partielt ordnede delmengdene Q_j , $0 \leq j < t$, av $P^{x, y}$. Hvis $0 \leq j < t - 1$ kan ingen (x, y) -vei gå innom både $(\zeta(1), \eta(j+1))$ og $(\zeta(0), \eta(j+2))$, så

$$Q_j \cap Q_{j+2} = \emptyset.$$

Den partielt ordnede mengden $Q_j \cap Q_{j+1}$ har et terminalt element ettersom

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= \eta(0) &= 0 \\ \eta(1) &= m \\ \eta(t) &= n. \end{aligned}$$

Hvis i er slik at

$$y_{k+1}(i) = \eta(j+1)$$

og

$$\begin{aligned} u &= \dim x_{k+1} \\ v &= \dim y_{k+1} \end{aligned}$$

er det terminale elementet i $Q_j \cap Q_{j+1}$ den (x, y) -veien som går innom

$$\begin{aligned}
 (0, 0) &= (x_{k+1}(0), y_{k+1}(0)), \\
 &\dots, \\
 &(x_{k+1}(0), y_{k+1}(i)), \\
 &(x_{k+1}(1), y_{k+1}(i)), \\
 &\dots, \\
 &(x_{k+1}(u), y_{k+1}(i)), \\
 &(x_{k+1}(u), y_{k+1}(i+1)), \\
 &\dots, \\
 (m, n) &= (x_{k+1}(u), y_{k+1}(v)).
 \end{aligned}$$

Det følger at vi for alle j med $0 \leq j < t$ har at $Q_j \cap Q_{j+1}$ er kontraktibel. Faktisk må enhver (x, y) -vei som går innom punktene

$$(\zeta(0), \eta(j)), (\zeta(0), \eta(j+1)), (\zeta(1), \eta(j+1)), (\zeta(1), \eta(j+2))$$

gå innom alle punktene i lista over, så $Q_j \cap Q_{j+1}$ inneholder bare ett element. Vi har nå at

$$|P^{x,y}| \simeq |N(\{|Q_j|\}_{0 \leq j < t})|.$$

Hver av mengdene $|Q_j|$ gir oss et hjørne v_j i simplisialkomplekset $N(\{|Q_j|\}_{0 \leq j < t})$ og $\{v_j, v_{j+1}\}$ er et 1-simpleks for alle j med $0 \leq j < t$. Flere simplekser er det ikke i $N(\{|Q_j|\}_{0 \leq j < t})$, så det følger at $|N(\{|Q_j|\}_{0 \leq j < t})|$ er homeomorft med et linjestykke. Vi er nå ferdige med indre grunntrekk.

Indre induksjonstrinn:

Anta at vi for naturlige tall $s > 0$ og $t' > 0$ har at hvis

$$\begin{aligned}
 \dim \zeta &\leq s \\
 \dim \eta &\leq t',
 \end{aligned}$$

så er $P^{x,y}$ kontraktibel. Dette er *indre induksjonshypotese*. Vi skal vise at samme påstand holder for $\dim \zeta = s + 1$ og $0 < \dim \eta = t \leq t'$. La

$$Q_j = P_{(\zeta(s), \eta(j))}^{x,y}$$

for $j \in \text{dom } \eta$. Da er

$$P^{x,y} = Q_0 \cup \dots \cup Q_t.$$

Siden Q_j er et filter i $P^{x,y}$, $0 \leq j \leq t$, er $\{NQ_j\}_{j \in \text{dom } \eta}$ en overdekning av $NP^{x,y}$. Vi kan bruke korollar 10.9 i punktet $(\zeta(s), \eta(j))$ til å identifisere

$$Q_j \cong P^{x^1, y^1} \times P^{x^2, y^2}.$$

Her er (x^1, y^1) et $(k+1)$ -simpleks og vi har at

$$\begin{aligned}
 \dim \zeta^1 &= s \\
 \dim \eta^1 &= j.
 \end{aligned}$$

Det følger av indre induksjonshypotese at P^{x^1, y^1} er kontraktibel. Vi har dessuten at

$$\begin{aligned}\dim \zeta^2 &= 1 \\ \dim \eta^2 &= t - j,\end{aligned}$$

så det følger av arbeidet vi gjorde under indre grunntrinn at P^{x^2, y^2} også er kontraktibel og dermed er Q_j kontraktibel. Hvis

$$i_0, i_1, \dots, i_q \in \text{dom } \eta$$

er slik at $i = i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_q = j$ vil enhver vei som går innom punktene $(\zeta(s), \eta(i))$ og $(\zeta(s), \eta(j))$ også gå innom $(\zeta(s), \eta(i_p))$ for $0 \leq p \leq q$, så

$$Q_i \cap Q_j = Q_{i_0} \cap \dots \cap Q_{i_q}.$$

Med andre ord er alle snitt i overdekningen enkeltsnitt eller dobbeltsnitt. Videre kan vi bruke korollar 10.9 i de to punktene $(\zeta(s), \eta(i))$ og $(\zeta(s), \eta(j))$ til å skrive snittet $Q_i \cap Q_j$ for $0 \leq i < j \leq t$ som et trippelprodukt

$$Q_i \cap Q_j \cong P^{x^1, y^1} \times P^{x^2, y^2} \times P^{x^3, y^3},$$

der P^{x^1, y^1} er kontraktibel ved indre induksjonshypotese. De to andre faktorene er kontraktible ved arbeidet vi gjorde under indre grunntrinn. Av proposisjon 10.12 følger det at

$$|P^{x, y}| \simeq |N(\{|Q_j|_{j \in \text{dom } \eta})|.$$

I $N(\{|Q_j|_{j \in \text{dom } \eta})$ har vi ett hjørne v_j for hver mengde $|Q_j|$, $j \in \text{dom } \eta$. En delmengde av hjørnemengden utspenner alltid et simpleks siden vi har vist at ethvert snitt er et dobbeltsnitt og siden alle dobbeltsnitt er ikke-tomme. Det følger at den geometriske realiseringen av $N(\{|Q_j|_{j \in \text{dom } \eta})$ kan identifiseres med standard t -simplekset og dermed er rommet $|P^{x, y}|$ kontraktibelt. Nå er vi så godt som ferdige. Husk at indre induksjonshypotese er at hvis

$$\begin{aligned}\dim \zeta &\leq s \\ \dim \eta &\leq t',\end{aligned}$$

så er $P^{x, y}$ kontraktibel. Det gjenstår å se på tilfellet der $0 < \dim \zeta = s' \leq s$ og $\dim \eta = t' + 1$. Isomorfin

$$\begin{aligned}[m] \times [n] &\xrightarrow{\cong} [n] \times [m] \\ (i, j) &\mapsto (j, i)\end{aligned}$$

innebærer at $P^{x, y} \cong P^{y, x}$. Argumentasjonen over kan gjenbrukes til å vise at $P^{y, x}$ er kontraktibel. \square

10.5 Syntese

Målet vårt har vært å vise at avbildningen

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

er simpel for alle endelige simplisielle mengder X og Y . Korollar 8.2 på side 57 reduserte problemet til tilfellet der X og Y er standardsimplekser og teorem 10.15 på neste side gir derfor det ønskede resultatet. Først summerer vi opp arbeidet vi har gjort siden avsnitt 10.1.

Proposisjon 10.14. *Den reduserte sylinderkoordinatprojeksjonen*

$$rcpr : M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \xrightarrow{\simeq_s} \Delta[r]$$

er simpel.

Bevis. For j med $0 \leq j \leq r$, definer j -simplekset (x_j, y_j) i $Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$ på følgende måte. La $\xi : [j] \rightarrow [r]$ være fasettoperatoren med billedmengde $\{0, \dots, j\}$. La x_j være den fremre fasetten

$$[j] \xrightarrow{\xi} [r] \xrightarrow{z} \Delta[m]^\#$$

og la y_j være den fremre fasetten

$$[j] \xrightarrow{\xi} [r] \xrightarrow{w} \Delta[m]^\#.$$

Vi har nå at $V_j = P^{x_j, y_j}$ og spesielt er $V_r = P^{z, w}$. Lemma 5.3 på side 33 sammen med proposisjon 5.4 på side 36 viste oss at V_0 er kontraktibel. Det følger av proposisjon 10.13 at V_j er kontraktibel også for $0 < j \leq r$. Dette var del 3 av beviset. Sammen med lemma 6.1 på side 43 som sier at hver punktinvær til den geometriske realiseringen av

$$cpr : T(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \rightarrow T^r$$

er homeomorf med ett av rommene $|V_0|, \dots, |V_r|$ gir dette at cpr er simpel. Under del 2, i proposisjon 10.6, viste vi at sylinderreduksjonen

$$red : T(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \rightarrow M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r)$$

er simpel. Dermed har vi det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} T(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) & \xrightarrow[\simeq_s]{red} & M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \\ \simeq_s \downarrow cpr & & \downarrow rcpr \\ T^r & \xrightarrow[\simeq_s]{red} & M^r \end{array}$$

siden eksempel 13 på side 75 viste at sylinderreduksjonen $T^r \rightarrow M^r$ er simpel. Det følger av høyrekanselleringsloven at den reduserte sylinderekoordinatprojeksjonen $rcpr$ er simpel. \square

Teorem 10.15. *Avbildningen*

$$f : Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) \xrightarrow{\cong_s} Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$$

er simpel.

Bevis. Under del 1 viste vi at sammensetningen

$$N(V_0 \cup \dots \cup V_r) \rightarrow N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r}) \xrightarrow{\bar{f}} \Delta[r]$$

kan sees på som den reduserte sylindervektorprosjeksjonen

$$rcpr : M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \rightarrow \Delta[r]$$

og at vi dermed har det kommutative diagrammet

$$\begin{array}{ccc} Sd(\Delta[m] \times \Delta[n]) & \xrightarrow{f} & Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n] \\ \uparrow & & \uparrow \overline{(z,w)} \\ N(\cup_{i=0}^r P^{z_i, w_i}) & \xrightarrow{\bar{f}} & \Delta[r] \\ \uparrow & \nearrow \cong_s & \\ M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) & \xrightarrow{rcpr} & \end{array}$$

der kvadratet er et pullback-diagram og der

$$M(N\varphi_1, \dots, N\varphi_r) \rightarrow N(P^{z_0, w_0} \cup \dots \cup P^{z_r, w_r})$$

er en kofibrering. Videre viste vi at for et indre punkt $t \in \Delta^r$, så er inversbildet $|f|^{-1}[(z, w), t]$ homeomorft med fiberen $|rcpr|^{-1}[t^r, t]$ i og med at

$$|\bar{f}|^{-1}[t^r, t] \subseteq |V_0 \cup \dots \cup V_r|.$$

Fiberen $|rcpr|^{-1}[t^r, t]$ er kontraktibel, for vi har nettopp begrunnet at $rcpr$ er simpel. Det ikke-degenererte r -simplekset $(z, w) \in Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]$ og det indre punktet $t \in \Delta^r$ ble vilkårlig valgt og ethvert punkt i en åpen r -celle i CW-komplekset $|Sd \Delta[m] \times Sd \Delta[n]|$ er entydig representert av et slikt minimalt par. Endelig viste lemma 5.3 sammen med proposisjon 5.4 at inversbildet under $|f|$ av en 0-celle er kontraktibelt, så det følger at f er simpel. \square

Korollar 10.16. *(hovedresultat) La X og Y være simplisielle mengder. Normal oppdeling brukt på projeksjonene av produktet av X og Y ned på henholdsvis første og annen faktor gir avbildninger vi kan kombinere i en simplisiell avbildning*

$$Sd(X \times Y) \rightarrow Sd X \times Sd Y$$

fra oppdelingen av produktet av X og Y til produktet av oppdelingen av X med oppdelingen av Y . Hvis X og Y er endelige simplisielle mengder er denne avbildningen simpel.

Bevis. Kombiner teorem 10.15 med korollar 8.2 på side 57.

□

11 En konsekvens for forbedringsfunktoren

Waldhausen, Jahren og Rognes viser i [WJR08, avsnitt 2.5] at det finnes en såkalt *forbedringsfunktor* I , definert ved hjelp av den *op-normale oppdelingen* $Sd^{op}(X) = Sd(X)^{op}$, som tar en endelig simplisiell mengde X til den endelige ikke-singulære simplisielle mengden $B(Sd^{op}(X))$ gitt ved å ta op-normal oppdeling etterfulgt av Barratt-nerven, og at det finnes en naturlig simpel avbildning $s_X : I(X) \rightarrow X$. Funktoren I bevarer i følge [WJR08, teorem 2.5.2.] simple avbildninger og kofibreringer. Videre er den geometriske realiseringen av $I(f)$ en homotopiekvivalens hvis f er en simplisiell avbildning slik at den geometriske realiseringen av f er en homotopiekvivalens. Hovedresultatet vårt, korollar 10.16, medfører at forbedringsfunktoren kommuterer med endelig produkt av endelige simplisielle mengder opp til en simpel avbildning.

Den op-normale oppdelingen til en endelig simplisiell mengde er i følge lemma 2.2.9. i [WJR08] endelig. Prosjeksjonsavbildningene gir et diagram

$$\begin{array}{ccc}
 & Sd(Sd^{op} X \times Sd^{op} Y) & \\
 & \nearrow & \searrow \simeq_s \\
 Sd(Sd^{op}(X \times Y)) & \xrightarrow{\quad} & Sd(Sd^{op} X) \times Sd(Sd^{op} Y)
 \end{array}$$

der korollar 10.16 medfører at avbildning nummer to er simpel. Den op-normale oppdelingen og den normale oppdelingen til en simplisiell mengde har naturlig homeomorfe geometriske realiseringer og normal oppdeling bevarer i følge [WJR08, prop. 2.3.3.] simple avbildninger. Det følger av korollar 10.16 at også

$$Sd(Sd^{op}(X \times Y)) \xrightarrow{\simeq_s} Sd(Sd^{op} X \times Sd^{op} Y)$$

er simpel. Vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc}
 Sd(Sd^{op}(X \times Y)) & \xrightarrow{\simeq_s} & Sd(Sd^{op} X) \times Sd(Sd^{op} Y) \\
 b_{Sd^{op}(X \times Y)} \downarrow & & \downarrow b_{Sd^{op} X} \times b_{Sd^{op} Y} \\
 B(Sd^{op}(X \times Y)) & \xrightarrow{\quad} & B(Sd^{op} X) \times B(Sd^{op} Y)
 \end{array}$$

siden avbildningen $b_{Sd^{op}(X \times Y)}$, her definert i avsnitt 4.3, er naturlig. I følge lemma 2.5.5. i [WJR08] er den op-normale oppdelingen av en simplisiell mengde *op-regulær* (motsatt av regulær, se [WJR08, def. 2.5.3.]) og i dette tilfellet sier proposisjon 2.5.8. i [WJR08] at de tre avbildningene $b_{Sd^{op}(X \times Y)}$, $b_{Sd^{op} X}$ og $b_{Sd^{op} Y}$ er simple. Det følger av sammensetningsloven - og høyrekanselleringsloven for simple avbildninger at

$$I(X \times Y) \xrightarrow{\simeq_s} I(X) \times I(Y)$$

også er simpel.

Referanser

- [Ba56] Michael G. Barratt: *Simplicial and semisimplicial complexes*, upublisert manuskript, Princeton University (1956).
- [Bo94] Francis Borceux: *Handbook of Categorical Algebra 1 - Basic Category Theory*, Cambridge University Press, Great Britain, Cambridge, 1994.
- [EZ50] Samuel Eilenberg and Joseph A. Zilber: *Semi-simplicial complexes and singular homology*, Ann. of Math. (2) 51 (1950), 499-513.
- [FP90] Rudolf Fritsch og Renzo A. Piccinini: *Cellular structures in topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 19, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Ha01] Allen E. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, New York, 2001.
- [Ka57] Daniel M. Kan: *On c.s.s. complexes*, Amer. J. Math. vol. 79, 449-476, 1957.
- [La69a] R. Chris Lacher: *Cell-like spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 20, 598-602, 1969.
- [La69b] R. Chris Lacher: *Cell-like mappings, I*, Pacific J. Math. vol. 30, 717-731, 1969.
- [Ma98] Saunders Mac Lane: *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics volume 5, New York, 1998.
- [Qu73] Daniel Quillen: *Higher algebraic K-theory: I* (1973), 85-147, Lecture Notes in Math., Vol. 341.
- [Se68] Graeme Segal: *Classifying spaces and spectral sequences*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. (1968) 105-112.
- [St97] Richard P. Stanley: *Enumerative Combinatorics Volume I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics vol. 49, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [Wh39] John Henry Constantine Whitehead: *Simplicial Spaces, Nuclei and m -Groups*, Proc. London Mathematical Society vol. s2-45, 1939.
- [WJR08] Friedhelm Waldhausen, Bjørn Jahren og John Rognes: *Spaces of PL manifolds and categories of simple maps*, innsendt til publikasjon, 2008.