ISBN 82-553-0496-7

No 4
1982

Forelesninger i

F O R N Y E L S E S T E O R I

ved

Terje Aven

STATISTICAL MEMOIRS
INSTITUTE OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF OSLO

Forelesninger i

F O R N Y E L S E S T E O R I

ved

Terje Aven

Forord

Dette notat om fornyelsesteori er utarbeidet i tilknytning til forelesningene over emnet "Optimale vedlikeholds strategier" som inngikk som en del av hovedfagskurset S380: Pålitelighetsteori, våren 1982. Hovedgrunnen til at notatet er utarbeidet er at ingen lærebok er funnet tilfredsstillende. Stoffet som gjennomgås dekker bare en liten del av fornyelsesteorien, for eksempel er Blackwell's teorem og "Key Renewal Theorem" ikke tatt med. Hovedresultatet som gis er R9 med påfølgende utvidelser.

Jeg vil takke Bent Natvig for verdifull assistanse ved utarbeidelsen av notatet.

Terje Aven

La $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en sekvens av ikke negative, endelige og uavhengige tilfeldige variable med en felles fordelingsfunksjon F. Anta

$$F(0) = P\{X_n=0\} < 1.$$

La

$$\mu = EX_n.$$

Vi ser at

$$0<\mu \leq \infty.$$

Sett $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$ og

$$N(t) = \sup\{n;\ S_n \leq t\}.$$

Vi sier at en fornyelse skjer ved t hvis $N(\cdot)$ hopper ved t. Vi observerer at

(1) $\quad N(t) \geq n \iff S_n \leq t.$

La

$$M(t) = EN(t).$$

Vi skal nå gi noen resultater knyttet til $N(t)$ og $M(t)$.

<u>R1</u> $\quad M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t),$

der F_i er i-te konvolusjon av F.

<u>Bevis</u>. La I_B betegne indikatorfunksjonen for hendelsen B. Ved å bruke monoton grensesetning og (1) får vi

$$M(t) = EN(t) = E\sum_{i=1}^{\infty} I_{\{i\leq N(t)\}} = \sum_{i=1}^{\infty} EI_{\{i\leq N(t)\}}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P\{N(t)\geq i\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{S_i \leq t\} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(t).$$

<u>R2</u> $\quad M(t) < \infty$ for alle $0 \leq t < \infty$.

<u>Bemerkning 1</u>. Faktisk har vi $E(N(t))^k < \infty$, $k = 1,2,\ldots,$ se for eksempel Prabhu (1965), side 155.

Bevis. La $\alpha>0$ være slik at $p = P\{X_n \geq \alpha\} > 0$ (en slik α eksisterer da $0 < P\{X_n > 0\} = P(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{X_n \geq \frac{1}{m}\}) = \lim_{m\to\infty} P\{X_n \geq \frac{1}{m}\})$.

Definer en ny fornyelsesprosess $\{\bar{X}_n\}$ ved

$$\bar{X}_n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } X_n < \alpha \\ \alpha & \text{hvis } X_n \geq \alpha \end{cases}$$

og la

$$\bar{N}(t) = \sup\{n;\ \bar{X}_1+\cdots+\bar{X}_n \leq t\}.$$

Da ser vi at for denne nye fornyelsesprosessen så kan fornyelser bare skje på tidspunktene $t = 0,\alpha,2\alpha,\cdots$. La Y_i (Y_0-1) være antall fornyelser på tidspunkt $i\alpha$ (0), $i = 1,2,\ldots$. Da kan vi skrive $\bar{N}(t) = Y_0-1+Y_1+\cdots Y_{[t/\alpha]}$, hvor $[t/\alpha]$ er største heltall mindre enn eller lik t/α. Fordelingen til Y_i $(i=0,1,2,\ldots)$ er gitt ved

$$P\{Y_i \geq k\} = (1-p)^{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

dvs. Y_i er geometrisk fordelt med parameter p. Ved nå å bruke at $EY_i = 1/p$ får vi

$$E\bar{N}(t) = \frac{1}{p}([t/\alpha]+1)-1 < \infty.$$

Siden $\bar{X}_n \leq X_n$, har vi $\bar{N}(t) \geq N(t)$ og det følger at $M(t) = EN(t) \leq E\bar{N}(t) < \infty$.

R3 $M(\cdot)$ er høyrekontinuerlig.

Bevis. Da $N(\cdot)$ er ikke-avtagende og høyrekontinuerlig og $M(t) < \infty\ \forall t$, så følger det ved den dominerte grensesetning at $\lim_{h\downarrow 0} EN(t+h) = E \lim_{h\downarrow 0} N(t+h) = EN(t)$, dvs. $M(t)$ er høyrekontinuerlig.

R4 La g og h være Borel-målbare funksjoner fra $[0,\infty)$ til $(-\infty,\infty)$ som er begrenset på endelige intervaller. Anta

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-u)dF(u), \quad 0\leq t<\infty \quad (\int_0^t = \int_{[0,t]}), \text{ dvs.}$$

$$g = h + g*F.$$

Da er

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-u)dM(u) \qquad 0 \leq t < \infty, \quad \text{dvs.}$$

$$g = h + h*M.$$

<u>Bevis</u>. La $g_1 = h + h*M$. Da er opplagt g_1 begrenset på endelige intervaller, og ved Fubinis teorem er g_1 Borel-målbar. Enn videre er $g_1 = h + g_1*F$. Beviset for denne påstanden følger. Ved å bruke resultatet gitt i appendikset finner vi at

$$h + g_1*F = h + (h+h*M)*F = h + h*F + (h*M)*F$$
$$= h + h*F + h*(M*F) = h + h*(F+M*F).$$

Da $F + M*F = F + (\sum_{n=1}^{\infty} F_n)*F = F + \sum_{n=1}^{\infty} F_n*F = F + \sum_{n=2}^{\infty} F_n = M$, følger det at $g_1 = h + g_1*F$.

Vi skal nå vise at $g = g_1$.

Vi har

$$g = h + g*F \quad \text{og}$$
$$g_1 = h + g_1*F;$$

dette gir

$$g-g_1 = (g-g_1)*F = ((g-g_1)*F)*F = (g-g_1)*F_2$$

(den siste likheten følger av resultatet gitt i appendikset).

Ved induksjon får vi at

$$g-g_1 = (g-g_1)*F_n \quad \text{for alle } n.$$

Siden g og g_1 er begrensede på endelige intervaller vil det eksistere en $K < \infty$ slik at $|(g-g_1)(u)| \leq K$, $u \leq t$.

Vi har da

$$|(g-g_1)(t)| = |\int_0^t (g-g_1)(t-u)dF_n(u)| \leq \int_0^t |(g-g_1)(t-u)|dF_n(u)$$
$$\leq KF_n(t) \quad \text{for alle } n.$$

Nå vil $F_n(t) \to 0$ når $n \to \infty$ da $M(t) = \sum_n F_n(t) < \infty$, og vi må derfor ha $g(t) = g_1(t)$. R4 er dermed bevist.

R5.

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \quad \text{når} \quad t \to \infty \quad \text{med sannsynlighet} \quad 1.$$

Bevis. Ved definisjonen av $N(t)$ har vi

$$S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1} .$$

Derav får vi

$$(2) \qquad \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} .$$

Vi har at $P\{\lim_{t\to\infty} N(t)<\infty\} = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n=\infty\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n=\infty\} = 0$, dvs. $N(t) \to \infty$ når $t \to \infty$ med sannsynlighet 1; dermed følger det av store talls sterke lov at

$$(3) \qquad \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu \quad \text{når} \quad t \to \infty \quad \text{med sannsynlighet} \quad 1.$$

Da $\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)}$, ser vi også at

$$(4) \qquad \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \to \mu \quad \text{når} \quad t \to \infty \quad \text{med sannsynlighet} \quad 1.$$

R5 følger nå fra (2), (3) og (4).

Før vi går videre i fornyelsesteorien skal vi vise følgende generelle setning.

R6 (Wald's ligning). La $X_1, X_2, \ldots$ være uavhengige, identisk fordelte tilfeldige variable. La videre N være en tilfeldig variabel som antar verdier i $\{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ slik at begivenheten $\{N \leq n\}$ er uavhengig av X_{n+1}, $n = 1,2,\ldots$. Da er

$$E \sum_{i=1}^{N} X_i = ENEX_1$$

hvis enten

(i) $X_i \geq 0$ eller

(ii) $E|X_i| < \infty$ og $EN < \infty$.

Bevis. (i) Siden $\{N \leq n\}$ er uavhengig av X_{n+1}, så er

$EI_{\{N \geq i\}} X_i = E(1-I_{\{N \leq i-1\}}) X_i = E(1-I_{\{N \leq i-1\}}) EX_i = EI_{\{N \geq i\}} EX_i$.

Det følger at

$$E \sum_{i=1}^{N} X_i = E \sum_{i=1}^{\infty} X_i I_{\{N \geq i\}} = \sum_{i=1}^{\infty} EI_{\{N \geq i\}} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} EI_{\{N \geq i\}} EX_i$$

$$= EX_1 \sum_{i=1}^{\infty} P\{N \geq i\} = EX_1 EN$$

(ii) Beviset er som over - at vi har lov til å bytte om E og $\sum$ følger av dominerte grensesetning siden $\left| \sum_{i=1}^{m} X_i I_{\{N \geq i\}} \right|$ $\leq \sum_{i=1}^{m} |X_i| I_{\{N \geq i\}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |X_i| I_{\{N \geq i\}}$ for alle m og $E \sum_{i=1}^{\infty} |X_i| I_{\{N \geq i\}} = E|X_i| EN < \infty$.

Vi vender nå tilbake til fornyelsesteorien.

R7. Korollar.

$$E \sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i = ES_{N(t)+1} = \mu(M(t)+1).$$

Bevis. Da $N(t)+1 \leq n \iff N(t) < n \iff S_n > t$, følger det at begivenheten $\{N(t)+1 \leq n\}$ er uavhengig av X_{n+1}. Det er nå lett å se at R7 er en konsekvens av R6.

R8. Det elementære fornyelsesteorem

$$\frac{M(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \quad \text{når} \quad t \to \infty.$$

Bevis. Anta først at $\mu < \infty$. Vi har alltid $S_{N(t)+1} \geq t$. Dette gir ved R7,

$$\mu(M(t)+1) \geq t ,$$

dvs.

$$\frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} .$$

Det følger at

(5) $$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} .$$

La nå M være en konstant. Vi definerer en ny fornyelses-prosess $\{\bar{X}_n\}$ ved å la

$$\bar{X}_n = \min(X_n, M) .$$

La $\bar{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i$ og $\bar{N}(t) = \sup\{n; \bar{S}_n \leq t\}$. Siden $\bar{X}_i$-ene er begrenset av M er det klart at

$$\bar{S}_{\bar{N}(t)+1} \leq t + M .$$

Ved R7 vil derfor

(6) $$(\bar{M}(t)+1)\mu_M \leq t + M ,$$

hvor $\mu_M = E\bar{X}_n$ og $\bar{M}(t) = E\bar{N}(t)$.

Av ulikheten (6) følger at

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\bar{M}(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M} .$$

Siden $\bar{N}(t) \geq N(t)$ (vi har jo $\bar{S}_n \leq S_n$), vil $\bar{M}(t) \geq M(t)$. Vi har derfor

(7) $$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_M} .$$

Lar vi nå $M \to \infty$ så følger det at $\mu_M = E \min(X_n, M) \to EX_n = \mu$ (monoton grensesetning), altså må

(8) $$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu} .$$

Fra (5) og (8) følger nå resultatet R8.

La så $\mu = \infty$. Betrakt igjen $\{\bar{X}_n\}$. Siden $\mu_M \to \mu$ når $M \to \infty$, kan vi slutte R8 fra (7).

Fornyelses kostnads prosesser

Betrakt en fornyelsesprosess $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Anta at en kostnad Y_n $(-\infty<Y_n<\infty)$ er assosiert med tidspunktet for den n-te fornyelsen. Vi antar at parene (X_n,Y_n), $n = 1,2,...$ er uavhengige og identiske fordelte.

La

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n .$$

Da betegner $Y(t)$ total kostnad i $[0,t]$.

Vi skal vise følgende resultat.

R9. Hvis $E|Y_n| < \infty$, da gjelder

(i) $Y(t)/t \to EY_1/EX_1$ når $t \to \infty$ med sannsynlighet 1

(ii) $EY(t)/t \to EY_1/EX_1$ når $t \to \infty$.

Bevis. (i) Vi har

$$\frac{Y(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{N(t)} \frac{N(t)}{t}$$

og (i) følger siden $\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n/N(t) \to EY_1$ når $t \to \infty$ med sannsynlighet 1 (store talls sterke lov - husk at $N(t) \to \infty$ når $t \to \infty$ med sannsynlighet 1, se beviset for R5) og $N(t)/t \to 1/EX_1$ når $t \to \infty$ med sannsynlighet 1 (R5).

(ii) Vi har at begivenheten $\{N(t)+1 \leq n\} = \{S_n > t\}$ er uavhengig av Y_{n+1}. Det følger dermed ved R6 at

$$E \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n = E \sum_{n=1}^{N(t)+1} Y_n - EY_{N(t)+1} = (M(t)+1)EY_1 - EY_{N(t)+1} ,$$

dvs.

$$\frac{EY(t)}{t} = \frac{M(t)+1}{t} EY_1 - \frac{EY_{N(t)+1}}{t} .$$

Resultatet følger nå ved R8 hvis vi kan vise at $EY_{N(t)+1}/t \to 0$ når $t \to \infty$ (dette er ikke trivielt - vi kan nemlig ikke slutte at $EY_{N(t)+1} = EY_n$).

La $g(t) = EY_{N(t)+1}$. Vi observerer at $|g(t)| = |EY_{N(t)+1}| \leq E|Y_{N(t)+1}| \leq E\sum_{n=1}^{N(t)+1} |Y_n| = (M(t)+1)E|Y_1| < \infty$. Funksjonen $g(t)$ er dessuten høyrekontinuerlig (og dermed Borel-målbar); for ved dominerte grensesetning har vi $\lim_{t\downarrow t'} g(t) = \lim_{t\downarrow t'} EY_{N(t)+1} = E \lim_{t\downarrow t'} Y_{N(t)+1} = EY_{N(t')+1} = g(t')$.

Betinger med hensyn på X_1 og får

$$g(t) = \int E[Y_{N(t)+1}|X_1=x]dF(x).$$

Men ved nå å bruke at prosessen starter på nytt på tidspunkt X_1 finner vi at

$$E[Y_{N(t)+1}|X_1=x] = \begin{cases} g(t-x) & x \leq t \\ E[Y_1/X_1=x] & x > t \end{cases} .$$

Det følger at

$$g(t) = \int_0^t g(t-x)dF(x) + h(t) ,$$

der $h(t) = \int_t^\infty E[Y_1|X_1=x]dF(x) \quad (\int_t^\infty = \int_{(t,\infty)})$.

Vi ser at $|h(t)| \leq E|Y_1| < \infty$ for alle t.

Fra R4 får vi at

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dM(x).$$

La nå $\varepsilon > 0$ være vilkårlig. Siden $h(t) \to 0$ når $t \to \infty$, kan vi velge en T slik at $|h(t)| < \varepsilon$ for $t \geq T$. Dermed vil

$$\begin{aligned}|g(t)|/t &\leq |h(t)|/t + \int_0^{t-T} \frac{|h(t-x)|}{t} dM(x) + \int_{t-T}^t \frac{|h(t-x)|}{t} dM(x) \\ &\leq \varepsilon/t + \varepsilon M(t-T)/t + E|Y_1|(M(t) - M(t-T))/t \\ &\to \varepsilon/EX_1 \quad \text{når } t \to \infty\end{aligned}$$

ved R8. Det følger at $g(t)/t \to 0$ og dermed er beviset komplett.

Bemerkning 2. Resultatene (i) og (ii) holder også dersom $E\max(Y_n,0) = \infty$, $E\max(-Y_n,0) < \infty$ (eller $E\max(Y_n,0) < \infty$, $E\max(-Y_n,0) = \infty$) og $EX_n < \infty$.

Beviset for (i) er som før. Beviset for (ii) følger av R9 (ii) ved å bruke et trunkeringsargument. Vi skal gjennomføre beviset for (ii) i det tilfellet at $Y_n \geq 0$.

La M være en konstant. Da har vi

$$\frac{E\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{t} \geq \frac{E\sum_{n=1}^{N(t)} \min(Y_n,M)}{t}$$

Ved nå å anvende R9 (ii), så får vi

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{E\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{t} \geq \frac{E\min(Y_1,M)}{EX_1} .$$

Ved å la $M \to \infty$, ser vi at

$$\frac{E\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{t} \to \frac{EY_1}{EX_1} = \infty \quad \text{når} \quad t \to \infty .$$

Bemerkning 3. Anta nå at kostnadene "lides" gradvis gjennom en syklus (en syklus er tiden mellom to påfølgende fornyelser). La $Y(t)$ være total kostnad i $[0,t]$ og anta først at alle kostnader er ikke-negative. Da er

$$(9) \qquad \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n}{t} \leq \frac{Y(t)}{t} \leq \frac{\sum_{n=1}^{N(t)+1} Y_n}{t}$$

hvor Y_n = kostnad i n-te syklus. Vi ser av (9) at R9 fremdeles holder (se beviset for R9); vi forutsetter at $EY_n < \infty$. Anta så generelle kostnader. La $Y_n = Y_n^+ - Y_n^-$ og $Y(t) = Y^+(t) - Y^-(t)$ hvor

Y_n^+	= den totale positive kostnad i n-te syklus,					
Y_n^-	=	"	"	negative	"	" ,
$Y^+(t)$	=	"	"	positive	"	i $[0,t]$,
$Y^-(t)$	=	"	"	negative	"	" .

Vi antar at (X_n, Y_n^+, Y_n^-), $n = 1,2,\dots$ er uavhengige og identiske fordelte og at $EY_n^+ < \infty$ og $EY_n^- < \infty$.
Vi finner nå at

(i) $$\frac{Y(t)}{t} = \frac{Y^+(t)}{t} - \frac{Y^-(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{EY_1^+}{EX_1} - \frac{EY_1^-}{EX_1} = \frac{EY_1}{EX_1}.$$

(ii) $$\frac{EY(t)}{t} = \frac{EY^+(t)}{t} - \frac{EY^-(t)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} \frac{EY_1^+}{EX_1} - \frac{EY_1^-}{EX_1} = \frac{EY_1}{EX_1},$$

Altså holder R9 (i) og (ii) fremdeles.

Til slutt nevner vi at resultatene (i) og (ii) også holder dersom $EY_n^+ = \infty$, $EY_n^- < \infty$ (eller $EY_n^+ < \infty$, $EY^- = \infty$) og $EX_n < \infty$ (jfr. Bemerkning 2).

<u>Appendix</u>. La G_1 og G_2 være voksende, høyrekontinuerlige funksjoner fra $[0,\infty)$ til $(-\infty,\infty)$. Videre la h være en Borel-målbar funksjon fra $[0,\infty)$ til $(-\infty,\infty)$ som er begrenset på endelige intervaller. Da har vi

$$\int_0^t h(t-z)d(G_1 * G_2)(z) = \int_0^t \int_0^{t-y} h(t-x-y)dG_1(x)dG_2(y),$$

der

$$G_1 * G_2(t) = \int_0^t G_1(t-x)dG_2(x).$$

<u>Bevis</u>. La $a(z) = h(t-z)$ hvis $z \leq t$ og 0 ellers.
Vi skal vise at

(A) $$\int_0^\infty a(z)d(G_1 * G_2)(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty a(x+y)dG_1(x)dG_2(y).$$

La $\mathcal{B}$ betegne Borelmengdene på $[0,\infty)$ og la for hver $B \in \mathcal{B}$,

$$B-y = \{x-y;\ x \geq y,\ x \in B\} \quad (y \geq 0)$$

og

$$\mu(B) = \int_0^\infty G_1\{B-y\}dG_2(y)\ ,$$

hvor $G_1\{B\}$ er Lebesgue-Stieltjes målet på $\mathcal{B}$ generert ved $G_1\{(a,b]\} = G_1(b) - G_1(a)$. Vi har at μ er et mål på $\mathcal{B}$ og er lik Lebesgue-Stieltjes målet bestemt av $(G_1 * G_2)(t)$.

Hvis nå a er en indikator funksjon, I_B, da er $a(x+y) = I_{B-y}(x)$ for hver y. Det er lett å se at (A) holder i dette tilfellet - både høyre og venstre side reduserer seg til $\mu(B)$. Generelt holder nå (A) ved standard utvidelses prosedyre fra indikator funksjoner til enkle funksjoner og monotone grenser av enkle funksjoner osv.

Referanser

Ash, R.B. (1972) Real Analysis and Probability. Academie Press. New York.

Chow, Y.S. og Teicher, H. (1978) Probability Theory. Springer-Verlag, Berlin.

Feller, W. (1971) An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol II, sec. ed. Wiley, New York.

Karlin, S. og Taylor, H.M. (1975) A First Course in Stochastic Processes. Sec. ed. Academic Press, New York.

Prabhu, N.U. (1965) Stochastic Processes. The MacMillan Comp. New York.

Ross, S. (1970) Applied Probability Models with Optimization Applications. Holden-Day.