

STATISTICAL MEMOIR
INSTITUTE OF MATHEMATICS
University of Oslo

No 1
1982

FORSIKRINGSFONDET I LIVSFORSIKRING

av

Erling Sverdrup

Universitetet i Oslo

Kr. 16,-

FORSIKRINGSFONDET I LIVSFORSIKRING

ved Erling Sverdrup

Forord

Dette kompendium kommer istedenfor mitt stensilnotat nr. 1 til Fm 1 (ny versjon), mars 1980. Det overlapper noen avsnitt i mitt "Noen forsikringsmatematiske emner" (1976) samt Jordan, "Life Contingencies". Det har vært følt behov for en samlet fremstilling av det viktige emnet som her behandles.

Innhold

	Side
1. Innledning	1
2. Definisjon av premiereserven	3
3. Den prospektive og retrospektive premierreserve	4
4. Den dynamisk bestemte premierreserve	6
5. En differensiallikning for fondsdannelse	7
6. Sparepremie og risikopremie	9
7. Analyse av forsikringskontrakten ved differensiallikningen	11
8. Premiereserven og risiko	12
9. Fondet ved diskrete betalinger	14
10. Fondet ved årsoppgjøret	17
11. Premiereservens endring med rente, dødelighet og kontrakt	21
12. Brutto premiereserven	23
13. Premiereserven ved mange polisetilstander	29

FORSIKRINGSFONDET I LIVSFORSIKRING

1. INNLEDNING

Forsikringsfondet, eller premiereserven som den også kalles, er en viktig størrelse i livsforsikringsvirksomheten. Det utgjør oppsparte midler og gir uttrykk for at mange livsforsikringskontrakter er slik innrettet at det foregår en betydelig sparing gjenom premieinnbetalingene fra de forsikrede. For selskapene er fondet en passivapost, dvs en gjeldspost som må beregnes. Det er penger som selskapene forvalter for de forsikrede. Begrepsmessig er det sentralt i aktuariell tankegang.

Vi skal se på hvorledes forsikringsfondet defineres og beregnes. Vi antar at en nettopremie π er beregnet etter ekvivalensprinsippet og så gis et sikkerhetstillegg.

Bortsett fra det overskudd som det er en sjanse for at sikkerhetstillegget vil gi, vil altså ut- og innbetalingene i enhver lukket bestand stort sett balansere når hele bestanden er avviklet, dvs alle poliser er kontraktmessig opphørt.

Men over kortere perioder i bestandens liv vil det naturligvis ikke være balanse mellom utbetalingene og innbetalingene. Dette er åpenbart ved forsikringer tegnet mot innskudd en gang for alle på tegningstidspunktet.

Men det samme forhold gjør seg gjeldende i en vesentlig grad ved mange slags forsikringskontrakter med løpende premier. La oss som eksempel se på en bestand av enkle forsikringer tegnet mot konstant kontinuert premie i forsikringstiden. La det være N poliser tegnet samtidig med tegningsalder x_1, \dots, x_N og forsikringssummer henholdsvis S_1, \dots, S_N . Årlige nettopremier er da π_1, \dots, π_N , hvor

$$\pi_j = S_j \left(\frac{1}{\bar{a}_{x_j}} - \delta \right) \quad (1)$$

ifølge (31) og (10) i Fors.mat. emner *) , kap. II. Ifølge ulikheter (17) i samme skrift har vi da

$$\text{Utbetalingerne} = \sum S_j \mu_{x_j} dt < \sum S_j \left(\frac{1}{\bar{a}_{x_j}} - \delta \right) dt = \text{sum nettopremier.}$$

(Vi forutsetter overalt nedenfor at μ er en stigende funksjon av x .)

Generelt vil det i enhver lukket bestand av forsikringer av nevnte type, tegnet i det begrenset tidsintervall, være et overskudd av innbetalinger over utbetalinger den første tiden. Dødeligheten vil nemlig gjennomgående ikke gjøre seg sterkt gjeldende nær tegningstidspunktet, men først når de forsikrede er blitt eldre. Senere vil derfor utbetalingerne overstige innbetalingerne. Dette gjelder naturligvis også ved sammensatt livsforsikring hvor mange av forsikringene først kommer til utbetaling ved oppnådd alder.

Det overskudd som oppstår den første tid i en bestand, kan ikke disponeres fritt. Det må legges til side for å greie forpliktelsene når forsikringserstatningene overstiger premieinntektene. Den del av premieinntektene som således legges til side er premiereserven. I en lukket bestand vil derfor premiereserven vanligvis stige og senere avta mot 0. I et selskap som driver nytegning og hvor denne overstiger avgangen, vil premieinntektene gjennomgående overstige erstatningene. Premiereserven vil derfor stige. I et selskap hvor avgangen er dominerende, vil erstatningene overstige premieinntektene, og premiereserven vil avta.

Selskapet må altså til enhver tid ha rede på hvor meget det trenger i premiereserve for å greie sine fremtidige forpliktelser.

Ved en første refleksjon kunne det kanskje synes som dette er svært enkelt. Selskapet har jo regnet ut premiene ved polisens tegning. Da kan det bare bokføre ut- og innbetalinger og legge

*) Erling Sverdup: Noen forsikringsmatematiske emner. Stat.Mem. Inst. of Math. Univ. of Oslo, 1969, revised 1976.

til side differansen, som trenges senere. Med den metoden som er brukt ved premieberegningen vet selskapet at det høyst sannsynlig vil gå godt til slutt. Til dette resonnement er å innvende: På et gitt tidspunkt i polisens liv vet selskapet noe mer enn det visste ved tegningen. Det har jo allerede sett hvorledes dødsfallene har forløpt opptil tidspunktet. Det har derfor et bedre grunnlag for å bedømme den fremtidige risiko enn det hadde ved polisens tegning. Premieberegningen er en risikobedømmelse, og premiereserveberegningene er stadig fornyede risikobedømmelser etter hvert som selskapet ser hvorledes dødsfallene forløper.

2. DEFINISJON AV PREMIERESERVEN.

Den matematiske presise definisjon av begrepet premiereserve er følgende: Premiereserven V_t for en polise som er i kraft t år etter tegningen er forventet kontantverdi av de fremtidige utbetalinger minus forventet kontantverdi av de fremtidige premieinnbetalinger på polisen.

$$V_t = E(\text{kontantverdi av fremtidige utbetalinger}) - E(\text{kontantverdi av fremtidige innbetalinger}) \quad (2)$$

Ved en sammensatt livsforsikring med tegningsalder x , dødsfallerstatning S , samme erstatning ved oppnådd alder $x+n$, og konstant kontinuert betalt årspremie p , har vi således,

$$V_t = E(S v^T) - E(p \bar{a}_{\overline{T}}) = S A_{x+t} \bar{a}_{\overline{n-t}} - p \bar{a}_{x+t} \bar{a}_{\overline{n-t}} \quad (3)$$

hvor T er gjenstående forsikringstid for $(x+t)$ -åringen. De forventningsverdier som inngår er betingede forventninger gitt at den forsikrede er ilive i alder $x+t$. Det er åpenbart at V_t er det beløp som selskapet må ha til disposisjon for å greie de forventede fremtidige forpliktelser.

3. DEN PROSPEKTIVE OG RETROSPEKTIVE PREMIERESERVE

Hvis spesielt $p = \pi$ = nettopremien får vi nettopremiereserven

$$v_t = S \bar{A}_{n+t} \bar{n-t} - \pi \bar{a}_{x+t} \bar{n-t} \quad (4)$$

som forøvrig også kan skrives

$$v_t = S \left(1 - \bar{a}_{x+t} \bar{n-t} / \bar{a}_{xn} \right) \quad (5)$$

$$\text{siden } \pi = S \bar{A}_{xn} / \bar{a}_{xn} = S \left(\frac{1}{\bar{a}_{xn}} - \delta \right)$$

Nettopremiereserven v_t gitt ved (4) kunne også ha vært beregnet ved et annet resonnement. Vi betrakter ved tegningstidspunktet hva som kan skje innen t år. Forventet kontantverdi av nettopremiene over dette tidsintervall er åpenbart $\pi \bar{a}_{xt}$. Dette beløp skal brukes til å dekke

(i) Dødsfallerstatningen på S hvis den forsikrede dør før alder $x+t$. Forventet kontantverdi er åpenbart verdien av en temporær livsforsikring $S \bar{A}_{1_{xt}}$.

(ii) Et fondsopplegg på v_t såfremt den forsikrede overlever alder $x+t$. Forventet kontantverdi er $v_t v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$.

Vi har derfor

$$\pi \bar{a}_{xt} = S \bar{A}_{1_{xt}} + \frac{D_{x+t}}{D_x} v_t \quad (6)$$

Herav

$$v_t = \frac{D_x}{D_{x+t}} (\pi \bar{a}_{xt} - S \bar{A}_{1_{xt}}) \quad (7)$$

eller

$$v_t = \frac{1}{D_{x+t}} (\pi (\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}) - S (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t}))$$

Ved å innsette uttrykket for v_t gitt ved (4) i (6), ser vi lett

at (4) og (7) gir den samme bestemmelse av V_t . Vi finner nemlig for høyre side av (6), ved å innsette uttrykket for V_t fra (4),

$$\begin{aligned} S \bar{A}_{\overline{x+t}} + S \frac{\bar{A}_{x+t}}{\bar{A}_x} \bar{A}_{\overline{x+t+n-t}} - \pi \frac{\bar{A}_{x+t}}{\bar{A}_x} \bar{a}_{\overline{x+t+n-t}} \\ = S \bar{A}_{\overline{x+n}} - \pi \frac{\bar{A}_{x+t}}{\bar{A}_x} \bar{a}_{\overline{x+t+n-t}} = \pi \bar{a}_{\overline{x+n}} - \pi \frac{\bar{A}_{x+t}}{\bar{A}_x} \bar{a}_{\overline{x+t+n-t}} \end{aligned}$$

ifølge bestemmelsen av π ved ekviyalensprinsippet. Men siste uttrykk er åpenbart lik venstre side av (6).

Premiereserven gitt ved (4) sies å være bestemt ved et prospektivt resonnement, idet man har sett på hva slags ut-og innbetalinger som vil finne sted etter alder $x+t$. Premiereserven gitt ved (7) er bestemt ved et retrospektivt resonnement idet man har sett på hva slags betalinger og fondsavsetninger som har funnet sted før alder $x+t$.

Som et annet eksempel la oss betrakte en oppsatt livrente til en x -åring som er kontinuert betalt fra alder $x+n$ med en utbetaling av beløp Sdt i et intervall av lengde dt . Premien π betales kontinuert de n første år (men bortfaller ved død). La tegningsalderen være x . Da har vi for nettopremien

$$\pi \bar{a}_{\overline{x+n}} = S \frac{\bar{l}_{x+n}}{\bar{l}_x} e^{-\delta n} \bar{a}_{\overline{x+n}} \quad (8)$$

Premiereserven er ved et prospektivt resonnement

$$V_t = S \frac{\bar{l}_{x+n}}{\bar{l}_{x+t}} e^{-\delta(n-t)} \bar{a}_{\overline{x+n}} - \pi \bar{a}_{\overline{x+t+n-t}}; \quad t < n \quad (9)$$

$$V_t = S \bar{a}_{\overline{x+t}} \quad t \geq n$$

Ved et retrospektivt resonnement blir den gitt ved,

$$\pi \bar{a}_{x|t} = \frac{D_{x+t}}{D_x} v_t ; \quad t < n \quad (10)$$

$$\pi \bar{a}_{x|n} = S \frac{D_{x+n}}{D_x} \bar{a}_{x+n} \bar{a}_{t-n} + \frac{D_{x+t}}{D_x} v_t ; \quad t \geq n$$

Vi ser at alt etter omstendighetene vil prospektive eller det retrospektive resonnement gi det enkleste matematiske uttrykk for reserven.

4. DEN DYNAMISK BESTEMTE PREMIERESERVE

Foruten å bestemme fondet for en polise på et gitt tidspunkt ved et prospektivt eller retrospektivt resonnement, kan man også bestemme den ved et dynamisk resonnement dvs man studerer reservens utvikling over tid (varighet siden polisens tegning). Man finner en sammenheng mellom reservene v_t og v_{t+dt} på henholdsvis tidspunktene t og $t+dt$.

La oss spesielt se på den sammensatte livsforsikring som vi har behandlet ovenfor, hvor v_t ble bestemt ved (4).

Anta N like kontrakter for N personer som var x år ved tegningen. La v_t være premiereserven. Vi kan stille opp følgende regnskap for forventede inn- og utbetalinger i intervallet $(t, t+dt)$:

Inntekter	Utgifter
Reserve på tidspunktet t Nv_t	Erstatninger $NS\mu_{x+t} dt$
Premieinntekter $N\pi dt$	Reserve på tidspunkt $t+dt$
Renteinntekter $N(v_t + \pi dt) \delta dt$	$v_{t+dt} N(1 - \mu_{x+t} dt)$

Ved å sette sum inntekt til sum utgift finner vi herav

$$V_t' = (\delta + \mu_{x+t})V_t + \pi - S\mu_{x+t} \quad (11)$$

som er Thieles differensiallikning.

Vi har $V_0 = 0$ og $V_n = S$ som bestemmer integrasjonskonstanten og premien π .

Ved et tilsvarende resonnement finner vi at premiereserven V_t for en oppsatt livrente med løpende premie i opprettelses-tiden gitt ved (9), tilfredsstiller differensiallikningen

$$V_t' = (\delta + \mu_{x+t})V_t + \pi \quad ; \quad t < n \quad (12)$$

$$V_t' = (\delta + \mu_{x+t})V_t - S \quad ; \quad t \geq n$$

5. EN DIFFERENSIALLIKNING FOR FONDSDANNELSE

La oss generelt tenke oss et fond V_t som utvikler seg ved forrentning samt inn- og utbetalinger. La "rente"-intensiteten være g_t og "innbetalings"-intensiteten være h_t på tids-punktet t . Vi finner da

$$V_t' = g_t V_t + h_t \quad (13)$$

Vi har nemlig

$$V_{t+dt}' = V_t (1 + g_t dt) + h_t dt$$

som gir uttrykk for at det i tidsintervallet $(t, t+dt)$ innbetaltes $h_t dt$ og at fondet i $(t, t+dt)$ forrentes etter en rentefot $g_t dt$.

Av (13) finner vi etter vanlige løsningsmetoder

$$V_t = V_0 e^{\int_0^t g_r dr} + \int_0^t h_s e^{\int_s^t g_r dr} ds \quad (14)$$

Spesielt ved ren forrentning, dvs $h_t = 0$,

$$V_t = V_0 e^{\int_0^t g_r dr} \quad (15)$$

$e^{\int_0^t g_r dr}$ er altså forrentningsfaktoren når g_t er rente-intensi-teten.

Åpenbart blir da $e^{\int_0^t g_r dr}$ diskontofaktoren.

Herav sees at (14) kan stilles opp direkte. Første ledd er fondet på tidspunktet 0 forrentet opp til t. Integranden i annet ledd er innbetaling $h_s ds$ i intervallet $(s, s+ds)$ (hvor $s < t$) forrentet opp til t. Annest ledd er altså summen av innbetalingene med renter og rentes rente.

Av (14) finner vi

$$e^{\int_0^t g_r dr} V_t = \int_0^t h_s e^{\int_0^s g_r dr} ds + V_0 \quad (16)$$

Settes her $t = n$ hvoretter (16) subtraheres, finnes

$$e^{\int_0^t g_r dr} V_t - e^{\int_0^n g_r dr} V_n = \int_t^n h_s e^{\int_0^s g_r dr} ds .$$

Altså

$$V_t = V_n e^{\int_t^n g_r dr} - \int_t^n h_s e^{\int_t^s g_r dr} ds \quad (17)$$

som lett kan tolkes direkte.

Ved å sette $g_t = \delta + \mu_{x+t}$, $h_t = \pi - s\mu_{x+t}$ blir (13) identisk med (11) og vi finner at (4) og (6) kan avledes av henholdsvis (17) og (14).

6. SPAREPREMIE OG RISIKOPREMIE

Som antydet i innledningen (avsnitt 1) vil mange polise-kontrakter inneholde et sterkt moment av sparing og premiereser-vene vil være de oppsparte midler. Samtidig er naturligvis kon-trakten også en risikoforretning. La oss nå se nærmere på hva som spares til en hver tid og hva som brukes til å dekke risikoen.

Vi bruker igjen den sammensatte forsikring som vi har stu-dert ovenfor, som eksempel. I løpet av et tidsintervall $(t, t+dt)$ i polisens liv mottar selskapet πdt i premie. Denne premie skal til dels benyttes til premiereserveavsetning, til dels til å dekke risikoen for død. Hvis den forsikrede dør i intervallet, må selskapet ut med S . Nå har selskapet lagt opp en nettopremie-reserve på V_{t+dt} , som kan oppfattes som den forsikredes tilgode-havende. Det udekkede beløp som selskapet må ut med er $S - V_{t+dt}$. Dette er risikosummen. Premien, ifølge ekvivalensprinsippet, til dekning av den eventualitet at risikosummen kommer til utbetaling i $(t, t+dt)$, er

$$\pi_t^{ri} dt = (S - V_{t+dt}) \mu_{x+t} dt \quad (18)$$

idet sannsynligheten for utbetalingen er $\mu_{x+t} dt$. π_t^{ri} kalles risikopremien (retttere: risikopremieintensiteten).

Likegyldig enten den forsikrede dør eller ikke, må altså sel-skapet på tidspunktet $t+dt$ ha en premiereserve V_{t+dt} . Hvis den forsikrede ikke dør, trenges dette beløp til å holde polisen ved-like. Hvis den forsikrede dør, trenges beløpet som et supplement til risikosummen $S - V_{t+dt}$. Nå var reserven på tidspunktet t lik V_t . Med renter stiger dette beløp til $V_t \cdot (1 + \delta dt)$. For å greie fondsopplegningen trenges derfor i tidsintervallet $(t, t+dt)$ et beløp

$$\pi_t^{sp} dt = v_{t+dt} - v_t (1 + \delta dt) \quad (19)$$

π_t^{sp} er sparepremien. Premien πdt må til dels gå til dekning av risikoen, til dels til oppsparing i en premiereserve. Vi må derfor ha

$$\pi = \pi_t^{ri} + \pi_t^{sp} \quad (20)$$

Dermed har vi altså spaltet premien i risikodelen og sparedelen.

Ved å løse differensiallikningen (19) og benytte $v_0 = 0$, får vi

$$v_t = \int_0^t e^{\delta(t-\rho)} \pi_\rho^{sp} d\rho \quad (21)$$

som klart viser at premiereserven på tidspunktet t er summen av sparepremiene med renter og rentesrente opptil tidspunktet t.

Ved å innsette (18) og (19) i (20), får vi igjen Thieles differensiallikning for premiereserven

$$v'_t = (\delta + \mu_{x+t}) v_t + \pi - S \mu_{x+t} \quad (22)$$

Som et annet eksempel på bruken av begrepene risikosum, risikopremie og sparepremie, skal vi se på tidligere omtalte livsvarig livrente oppsatt i n år, hvor premiereserven er gitt ved (9).

Vi betrakter et tidsintervall $(t, t+dt)$. Anta $t < n$. Da innkommer en premie πdt i dette intervall. Denne spaltes i en spredel

$$\pi_t^{sp} dt = v_{t+dt} - v_t (1 + \delta dt) \quad (23)$$

analogt med tidligere. Hvis den forsikrede dør i intervallet, skal han intet ha og premiereserven v_{t+dt} tilfaller selskapet. Risikosummen er altså negativ og lik $-v_{t+dt}$. Det er det negative beløp

selskapet må "ut med". Risikopremien er derfor

$$\pi_t^{ri} dt = -V_{t+dt} \mu_{x+t} dt \quad (24)$$

Vi har naturligvis $\pi = \pi_t^{sp} + \pi_t^{ri}$ som før. Hvis $t > n$, er
(23) og (24) fremdeles gyldige, mens $\pi = -S$. Vi har derfor

$$\pi_t^{sp} = -S - \pi_t^{ri} = S(\mu_{x+t} \bar{a}_{x+t} - 1) \quad (25)$$

når livrenten er løpende.

7. ANALYSE AV FORSIKRINGSKONTRAKTEN VED DIFFERENSIALLIKNINGEN

La oss først foreta en relativt triviell generalisering av det vi har utviklet i avsnitt 4.

La tidspunktet for forsikringens tegning være 0 og forsikredes alder ved tegningen x. På tidspunktet n skal utbetales S hvis den forsikrede da lever. Kontrakten er videre slik at forventningsverdien på tidspunktet t ($0 < t < n$) av utbetalingen i intervallet $(t, t+dt)$ er $c_t dt$. Ved en kontinuert betalbar livrente på 1 pr. år er $c_t = 1$. Ved en livsforsikring med dødsfallserstatning på 1 er $c_t = \mu_{x+t}$. Ved en stigende livsforsikring med utbetaling av t ved død på tidspunktet t er $c_t = t \cdot \mu_{x+t}$. Premieinnbetalingen i $(t, t+dt)$ er $\pi_t dt$, dvs at π_t er premieintensiteten.

Vi finner da ved tilsvarende resonnement som i avsnitt 4

$$V'_t = (\mu_{x+t} + \delta)V_t + \pi_t - c_t \quad (26)$$

Betydningen av Thieles differensiallikning ligger først og fremst i det den kan avsløre om en forsikringskontrakts struktur.

Vi skal etterhvert gi en rekke eksempler på det. Foreløpig nøyer vi oss med et enkelt eksempel. Anta (se Jordan^{*} s. 123-124) at forsikringssummen $S_t = 1 + \text{premiereserven } V_t$ skal utbetales straks ved død ($0 < t < 1$). Hvis forsikrede lever til alder $x+n$ skal han ha $S = 1$. Premieintensiteten er konstant, $\pi_t = \pi$.

Vi ser at $c_t = \mu_{x+t}(1+V_t)$. Herav

$$V'_t = (\delta + \mu_{x+t})V_t + \pi - (1+V_t)\mu_{x+t}$$

dvs

$$V'_t = \delta V_t + \pi - \mu_{x+t} \quad (27)$$

"Nettoinnbetalingen" $\pi - \mu_{x+t}$ kan altså betraktes som en sikker (risikofri) innbetaling som skal forrentes etter δ . Herav, se (17)

$$V_t = \int_t^n \mu_{x+s} v^{s-t} ds - \pi \bar{a}_{n-t} + v^{n-t} \quad (28)$$

π bestemmes ved å sette $t = 0$. Siden $V_0 = 0$ finner vi

$$\pi \bar{a}_{n-t} = v^n + \int_0^n \mu_{x+t} v^t dt \quad (29)$$

Bemerk spesielt resultatet når $\mu_x = \alpha + \beta c^x$.

8. PREMIERESERVEN OG RISIKO

Som nevnt i Fors.mat. emner II,D må premiene belastes med et sikkerhetsbidrag som tillegg til nettopremien π . Vi vil for enkelthets skyld gå ut fra at det skjer ved et konstant prosentvis bidrag slik at den sikkerhetsbelastede premie blir $p = \pi(1+\lambda)$. Av (3) og (4) ser vi at premiereserven for den ovenomtalte sammensatte livsforsikring med årspremie da blir

$$V_t - \pi \lambda \bar{a}_{x+t} \bar{n-t} \quad (30)$$

^{*}) Jordan: Life Contingencies. The Society of Actuaries.

Det har vært vanlig i praktisk livsforsikring å gå ut fra at et selskap må ha dekning for hele netto premiereserven V_t . Spørsmålet oppstår da om dette innebærer tilstrekkelig sikkerhet. Vil dette garantere mot underskudd i fremtiden? Er det mulig for selskapet å oppnå dekning for V_t ? Vi skal besvare det første spørsmålet først. Vi antar som i Fors.mat. emner II.D at alle forsikringssummer ligger mellom s_o og \bar{s} . Vi vil videre anta at intet aktuelt medlem av forsikringsbestanden er eldre enn r år, hvor $l_r > 0$.

I en bestand av sammensatte forsikringer antar vi nå at på et bestemt tidspunkt er det N gjenværende poliser. Polise nr. j ble tegnet for t_j år siden av en person i alder x_j med en forsikringssum S_j og premie p_j ; $j = 1, 2, \dots, N$. Anta at polisetager nr. j vil dø på et fremtidig tidspunkt T_{t_j} . Kontantverdien av selskapets fortjeneste er da

$$G = \sum (p_j \bar{a}_{T_{t_j}} - S_j v^{T_{t_j}} + V_{t_j}) = \sum g_j \quad (31)$$

idet selskapet kan innkassere V_{t_j} etter å ha gjort opp med den forsikrede. Herav, siden $\bar{a}_x \geq c > 0$,

$$\frac{1}{N} \sum E g_j = \frac{1}{N} EG = \frac{\lambda}{N} \sum \pi_j \bar{a}_{x_j + t_j} \geq \frac{c}{N} \sum S_j \mu_{x_j} \geq k_1 \bar{S} \geq k_1 s_o \quad (32)$$

hvor k_1 er en positiv konstant, uavhengig av N . Videre er

$$\text{var } g_j = \left(\frac{p_j}{\delta} + S_j \right)^2 \text{var } v^{T_{t_j}} \leq k_2 S_j^2 \leq k_2 s_o^2 \quad (33)$$

Vi ser at forutsetningene for bruk av lemmaet i Fors.mat. emner II.D er oppfylt, altså :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr(G \geq 0) = 1 \quad (34)$$

Hvis m.a.o. selskapet har aktiva nok til å dekke samlet nettopremiereserve, vil sannsynligheten for overskudd gå mot 1 når antall poliser går mot uendelig.

Så var det spørsmålet om selskapet er i stand til å legge til side V_t for hver polise. Har dødsfallene i fortiden ført slik at dette er mulig? Besvarelsen av dette spørsmål fører til den retrospektive betraktningsmåte.

Som i Fors.mat.emner II.D betrakter vi N poliser tegnet i et visst begrenset tidsintervall $(0, \theta_0)$. Vi studerer situasjonen på et tidspunkt $\theta > \theta_0$.

For en vilkårlig polise tegnet på tidspunkt τ med forsikringssum S har vi nå ifølge (6)

$$\pi \bar{a}_{x\bar{\rho}} = S \bar{A}'_{x\bar{\rho}} + V_\rho v^\rho \frac{1}{l_x} \frac{x+\rho}{1} \quad (35)$$

hvor $\rho = \theta - \tau$. I tillegg til nettopremien π betaler den forsikrede sikkerhetstillegg $\lambda\pi$, slik at premien er $p = \pi(1+\lambda)$.

Hvis T er forsikringstiden, er altså kontantverdien på tidspunkt 0 av overskuddet

$$F = v^\tau (p \bar{a}_{\bar{\rho}} - V_\rho v^\rho) \quad \text{hvis } T > \rho \quad (36)$$

$$F = v^\tau (p \bar{a}_{\bar{T}} - S v^T) \quad \text{hvis } T \leq \rho$$

Med utgangspunkt i (36) bevises nå analogt med utviklingen i Fors. mat. emner II.D at når $N \rightarrow \infty$ vil sannsynligheten for at det samlede overskudd skal være negativt gå mot 0.

9. FONDET VED DISKRETE BETALINGER

Vi skal i de etterfølgende avsnitt (inntil avsnitt 13) holde oss til sammensatte livsforsikringer med utbetaling av samme beløp ved død som ved oppnådd alder.

Når betalingsformene er diskrete, går vi ut fra at ved død skal forsikringssummen S bli utbetalt ved første årsdag for tegningen etter døden (på tross av at så ikke vil være tilfellet i praksis). Premien vil være konstante forskuddsvise i terminer av lengde $\frac{1}{m}$; $m = 1, 2, \dots$; i forsikringstiden.

Ved helårige terminer ($m = 1$) vil netto årspremien π være bestemt av

$$\pi \bar{a}_{x\bar{n}} = S A_{x\bar{n}} \quad (37)$$

såfremt tegningsalderen er x og høyeste utbetalingsalder er $x + n$.

Premiereserven V_t på et helårlig tidspunkt t (dvs t år etter tegningen) er bestemt ved en prospektiv betraktningsmåte til

$$V_t = S A_{x+t \bar{n-t}} - \pi \tilde{a}_{x+t \bar{n-t}} \quad (38)$$

Bemerk at den premie π som innbetales på tidspunktet t , regnes, konvensjonelt, som en fremtidig premie. Ved en retrospektiv betrakning er V_t bestemt ved

$$\pi \tilde{a}_{x\bar{t}} = S A_{x\bar{t}} + \frac{D_{x+t}}{D_x} V_t \quad (39)$$

På et vilkårlig tidspunkt $t + h$, t helt tall $0 < h < 1$, finner vi (eksakt)

$$V_{t+h} = v^{1-h} \frac{1}{1-h} q_{x+t+h} + v^{1-h} (1 - \frac{1}{1-h} q_{x+t+h}) V_{t+1} \quad (40)$$

Tilsvarende differensiallikningen for den kontinuerlige reserve, kan vi finne en differensiallikning (rekursjonsformel), for V_t . Hvis N personer har identiske poliser tegnet for t (helt tall) år siden i alder x , så vil disse ha et samlet fond på $N V_t$.

Dette fond samt de premier $N\pi$ som umiddelbart innbetales, skal med renter være nok til å dekke selskapets kontraktmessige forpliktelser og fondsavsetninger over tidsintervallet t til $t+1$, altså

$$(NV_t + N\pi)(1+i) = SNq_{x+t} + V_{t+1}(1-q_{x+t})N$$

siden det forventede antall døde $N q_{x+t}$ hver skal ha en sum på S på tidspunktet $t+1$, mens det for de forventede antall levende $N(1-q_{x+t})$ hver skal ha et fond på V_t .

Herav

$$V_{t+1}v(1-q_{x+t}) = V_t + \pi + S v q_{x+t} \quad (41)$$

Denne likningen kan også skrives

$$\begin{aligned} \pi &= v q_{x+t} (S - V_{t+1}) + (v V_{t+1} - V_t) \\ &= \pi_t^{ri} + \pi_t^{sp} \end{aligned} \quad (42)$$

som viser hvordan premien kan splittes i en risikopremie $v q_{x+t} (S - V_{t+1})$ og en sparepremie $v V_{t+1} - V_t$, analogt med det kontinuerte tilfellet. Vi innser lett at summen av fortidige sparepremier med renter og rentesrente nettopp er premiereserven

$$K = \sum_{j=0}^{t-1} p_j^S (1+i)^{t-j} = \sum_{j=0}^{t-1} (V_{j+1}(1+i)^{t-j-1} - V_j(1+i)^{t-j}) .$$

Hvis vi her innfører $w_j = V_j(1+i)^{t-j}$, får vi

$$K = \sum_{j=0}^{t-1} (w_{j+1} - w_j) = w_t - w_0 = V_t .$$

Ovenstående kan trivielt generaliseres til tilfellet med hyppigere premieterminer enn årlige. Vi anfører bare at med m terminer pr. år har vi for $t = N/m ; N=1, 2, \dots$,

$$v_t^{(m)} = s A_{x+t} \frac{1}{n-t} - \pi^{(m)} \bar{a}_{x+t}^{(m)} \frac{1}{n-t} \quad (43)$$

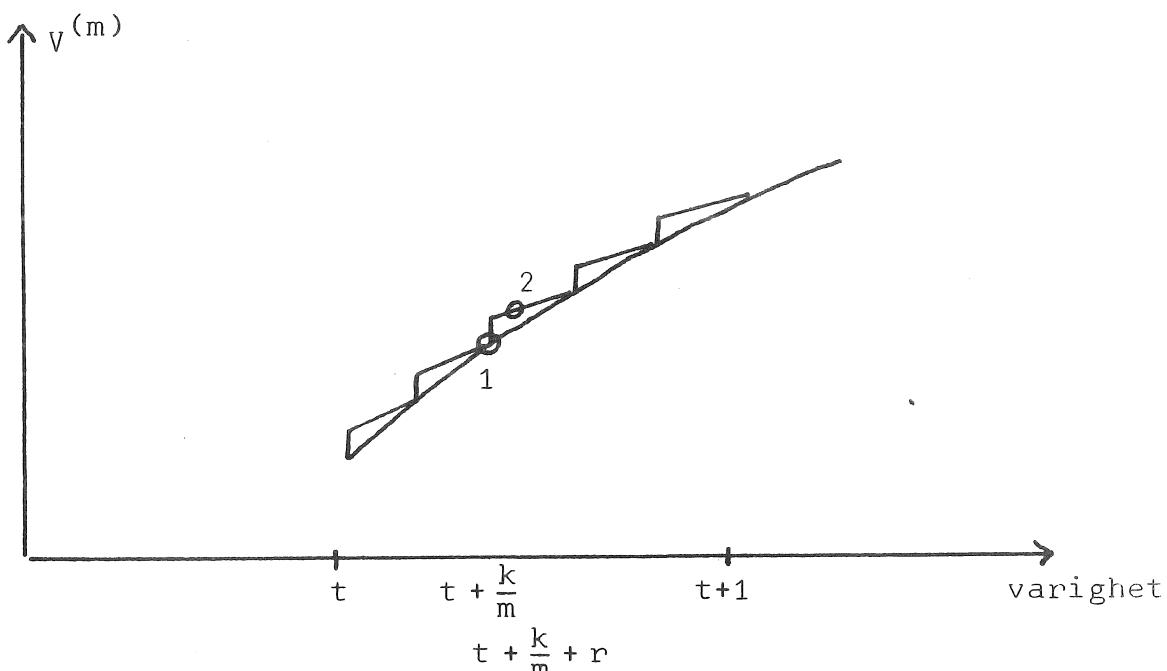
og at v_{t+r} , $0 < r < \frac{1}{m}$, lett kan nedskrives (se likning (40)).
Her er $\pi^{(m)}$ årlig premie. ($\pi^{(m)}/m$ terminpremie).

10. FONDET VED ÅRSOPPGJØRET

Hvert år f. eks. pr. 31/12 må et forsikringsselskap beregne den samlede premiereserve for sin bestand. Siden antall poliser er stort, må arbeidet rasjonaliseres. Vi skal illustrere hvorledes rasjonaliseringen kan foregå ved å se på en bestand av sammen- satte diskrete livsforsikringer hvor premieforfall er årlig, halv- årlig, kvartårlig osv. Premiereserven for en polise med en årlig termin er $v_{t+\frac{k}{m}+r}^{(m)}$, hvor t er et helt tall, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, $0 < r < \frac{1}{m}$. $\frac{k}{m} + r$ er tidsavstanden fra siste årsdag for tegningen frem til årsoppgjørsdagen. Tegningsalder x , forsikringssum s , $\frac{k}{m} + r$, m , n , varierer fra polise til polise.

Vi skal altså finne $\sum v_{t+\frac{k}{m}+r}^{(m)}$.

Vi vil først finne $v_{t+\frac{k}{m}+r}^{(m)}$ uttrykt ved $v_t^{(m)}$ og $v_{t+1}^{(m)}$.



Den brudne kurve på det grafiske bildet angir premiereservens forløp. Ved hvert hopp er premiereserven $V^{(m)}$ ordinatverdien under hoppet, mens hoppets høyde er $\pi^{(m)}/m$. Vi interpolerer oss først frem til $V_{t+\frac{k}{m}}$ (punkt 1)

$$V_{t+\frac{k}{m}}^{(m)} = \left(1 - \frac{k}{m}\right)V_t^{(m)} + \frac{k}{m} V_{t+1}^{(m)} \quad (44)$$

Dernest interpolerer vi oss frem til

$$V_{t+\frac{k}{m}+r}^{(m)} = m\left(\frac{1}{m} - r\right)\left(V_{t+\frac{k}{m}}^{(m)} + \frac{\pi^{(m)}}{m}\right) + m r V_{t+\frac{k+1}{m}}^{(m)} \quad (45)$$

idet man må interpolere mellom en hoppkant og frem til under neste hopp. Vi innsetter nå (44) med k og $k+1$ i (45) og finner

$$V_{t+\rho}^{(m)} = (1-\rho)V_t^{(m)} + \rho V_{t+1}^{(m)} + \left(\frac{1}{m} - r\right)\pi^{(m)} \quad (46)$$

hvor $\rho = \frac{k}{m} + r$.

Med tegningspunktene jevnt fordelt over året kan man gå ut fra at ρ er rektangulært fordelt over $(0,1)$. Dette medfører at r blir rektangulært fordelt over $(0, \frac{1}{m})$ og at forventningsverdiene av ρ og r blir henholdsvis $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2m}$. Ved i (46) å erstatte ρ og r med sine forventningsverdier $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2m}$ finner vi da som en gjennomsnittlig tilnærrelsесverdi for $V_{t+\rho}^{(m)}$

$$EV_{t+\rho}^{(m)} = \frac{1}{2}(V_t^{(m)} + V_{t+1}^{(m)}) + \frac{1}{2m}\pi^{(m)} \quad (47)$$

og spesielt med årspremier ($m=1$),

$$EV_{t+\rho} = \frac{1}{2}(V_t + V_{t+1}) + \frac{1}{2}\pi \quad (47)$$

Vi vil holde oss til tilfellet $m = 1$, og skal se på beregningen av $\sum EV_{t+\rho}$. Vi kan oppnå store besparelser i summasjonsarbeidet ved å gruppere addendene på en rasjonell måte. Vi skal se på to

metoder.

(i) Gruppering etter tegningsalder x og tegningsår.

Da er aktuell alder $x+t$ ved siste årsdag for tegningen også konstant innen gruppen. Vi ser på det retrospektive uttrykk for premiereserven

$$v_t = \frac{\pi(N_x - N_{x+t}) - S(M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}} \quad (48)$$

Hvis vi nå summerer over alle poliser med fast x og $x+t$, finner vi av (47) og (48)

$$\Sigma EV_{t+\rho} = \frac{1}{2}(1 + \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} + \frac{N_x - N_{x+t+1}}{D_{x+t+1}})\Sigma\pi - \frac{1}{2}(\frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} + \frac{M_x - M_{x+t+1}}{D_{x+t+1}})\Sigma S \quad (49)$$

Man trenger altså bare å finne $\Sigma\pi$ og ΣS i en polisekortbunke hvor alle kort har samme $(x, x+t)$, dvs samme tegningsalder og fødselsår. Det trenges ingen nysortering ved hvert årsoppgjør og $\Sigma\pi$ og ΣS kan finnes av fjorårets summer ved å korrigere for nytegning og avgang. (π, S) er kortkonstantene, mens uttrykkene i M, N og D er gruppekonstanter.

(ii) Gruppering etter fødselsår, dvs aktuell alder x+t.

Vi ordner leddene i (48) etter fotskrift og får

$$v_t = \frac{SM_{x+t} - \pi N_{x+t} + \pi N_x - SM_x}{D_{x+t}}$$

eller

$$v_t = SA_{x+t} - \pi \tilde{a}_{x+t} + \frac{\theta}{D_{x+t}} \quad (50)$$

hvor $\theta = \pi N_x - SM_x$.

Hvert polisekort påføres nå kortkonstanten θ ved tegningen.

Vi finner nå

$$\begin{aligned} \sum_{\text{innen gruppe}} EV_{t+\rho} &= \frac{1}{2}(A_{x+t} + A_{x+t+1})\Sigma S - \frac{1}{2}(1+\tilde{a}_{x+t} + \tilde{a}_{x+t+1})\Sigma \pi \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_{x+t}} + \frac{1}{D_{x+t+1}}\right)\Sigma \theta \end{aligned}$$

I denne sum varierer altså tegningsalder x fra ledd til ledd. S , π og θ er kortkonstantene.

Istedentfor i de to gruppemetoder nevnt ovenfor å operere med "gjennomsnittlig" tilnærmelsesverdi (likn. (47)), kunne man operere med de nøyaktige årsdager for tegningen definert ved ρ , slik som i likning (46). Med årspremie ($m=1$), får vi da, $\rho = r$ og

$$V_{t+\rho} = (1-\rho)V_t + \rho V_{t+1} + (1-\rho)\pi \quad (51)$$

Vi får da ved gruppemetode (ii)

$$\begin{aligned} \sum_{\text{innen gruppe}} V_{t+\rho} &= A_{x+t}\Sigma(1-\rho)S + A_{x+t+1}\Sigma\rho S - \\ &\quad - (1+\tilde{a}_{x+t})\Sigma(1-\rho)\pi + \tilde{a}_{x+t+1}\Sigma\rho\pi + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D_{x+t}}\Sigma(1-\rho)\theta + \frac{1}{D_{x+t+1}}\Sigma\rho\theta\right) \end{aligned} \quad (52)$$

I tillegg til kortkonstantene S , π , θ , trenger man da også ρS , $\rho\pi$, $\rho\theta$.

Med kortere terminer enn ett år ($m > 1$), blir gruppemetodene analoge, men med litt mer komplisert algebra. Man benytter tilnærmelsen

$$\tilde{a}_{x+t}^{(m)} = \tilde{a}_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+t}}{D_x}\right)$$

(se likn. (48) samt (46)).

11. PREMIERESERVENS ENDRING MED RENTE, DØDELIGHET OG KONTRAKT

Vi vender tilbake til studiet av den individuelle premiereserve. Anta at beregningsgrunnlaget er gitt ved de ett-årige dødssannsynligheter q_x og rentefoten i . Premiebetalingsplanen er gitt ved P_t , dvs at det ved begynnelsen av det t 'te forsikringsår skal betales P_t i premie. Endelig går vi ut fra at utbetaling av eventuelle erstatninger finner sted på en årsdag for tegningen og at forventningen på t 'te årsdag for tegningen av utbetalingen på årsdag $t+1$ (ikke diskontert) er h_t . (Hvis f.eks. det skal betales en dødsfallerstatning på S på årsdag $t+1$ ved død i intervallet $(t, t+1)$ er $h_t = q_{x+t} S$). Premiereserven V_t på t 'te årsdag er da gitt ved

$$(V_t + P_t)(1+i) = h_t + (1 - q_{x+t})V_{t+1} \quad (53)$$

med $V_0 = 0$.

La oss nå anta at vi ønsker å se på virkningen av å endre det ordinære beregningsgrunnlag (i, q_{x+t}) og kontraktsforhold (P_t, h_t) til et spesielt (i', q'_{x+t}, P'_t, h'_t). Vi ønsker på en enkel måte å kunne si noe om virkningen av en slik endring på premiereserven. La oss kalle den endrede (spesielle) reserve V'_t . Vi antar $V_n = V'_n$. Denne reserven er gitt ved en likning (53) som fremkommer ved å sette topkskrift overalt i (53). La oss nå sette

$$V'_t - V_t = R_t \quad P'_t - P_t = p_t \quad (54)$$

Vi finner av (53)

$$(V_t + R_t + P_t + p_t)(1+i') = h'_t + (1 - q'_{x+t})(V_{t+1} + R_{t+1}) \quad (55)$$

Ved å subtrahere (53) finner vi

$$R_t(1+i') + S_t = (1 - q'_{x+t})R_{t+1} \quad (56)$$

hvor

$$S_t = (V_t + P_t)(i' - i) + P_t(1+i') - [h'_t - h_t - (q'_{x+t} - q_{x+t})V_{t+1}] \quad (57)$$

Bemerk at siden $R_0 = R_n = 0$ kan ikke alle S_t ; $t = 1, 2, \dots, n-1$, ha samme fortegn. For hvis de alle var positive, ville det følge etter tur av (4) at R_1 er positiv, R_2 er positiv osv inntil $R > 0$, hvilket strider mot at $R_n = 0$. Tilsvarende hvis alle S_t var negative. Bemerk også at det følger herav at hvis S_t er konstant, må S_t være 0. Vi har nå følgende setning :

Setning A: Hvis S_t gitt ved (57) er først positiv og så blir, og forblir, negativ er $R_t = V'_t - V_t > 0$ for alle $t = 1, 2, \dots, n-1$. Hvis S_t er først negativ og så blir og forblir, positive, så er $R_t < 0$ for $t = 1, 2, \dots, n-1$.

Bevis: Anta at den første mulighet gjelder for S_t . Da vil, ifølge (56), $R_{t+1} > 0$ så lenge $S_t > 0$. Men etterat S_t er blitt < 0 , kan allikevel ikke $R_{t+1} < 0$. For i så fall ville alle etterfølgende R_τ ; $\tau > t+1$, være < 0 , altså $R_n < 0$, hvilket er umulig. Tilsvarende hvis den andre mulighet gjelder for S_t .

Setning B (Lidstone): Anta at samme forutsetninger som ovenfor, men premiene er konstante i forsikringstiden både under den spesielle og ordinære kontrakt, $P_t = P$, $P'_t = P'$. Hvis da

$$c_t = (V_t + P)(i' - i) - [h'_t - h_t - (q'_{x+t} - q_{x+t})V_{x+t}] \quad (58)$$

er avtagende, er $V'_t > V_t$; $t = 1, 2, \dots, n-1$, hvis c_t er tiltagende er $V'_t < V_t$; $t = 1, 2, \dots, n-1$.

Bevis: Vi finner av (57) og (58) med $p = P' - P$,

$$S_t = c_t + (1 + i')p$$

og benytter setning A.

Som eksempel på bruk av setning A la oss spesielt se på tilfellet $i' = i$, $q'_{x+t} = q_{x+t}$, $h'_t = h_t$ slik at det bare er premieplanene som er forskjellige. Vi finner da $S_t = P'_t - P_t$. Anta nå at ved død i t'te forsikringsår skal B_t utbetales ved slutten av året. Da er altså $h_t = h'_t = q_{x+t} \cdot B_t$. La den "ordinære" premieplan være med konstant premie $P_t = \pi$, mens den "spesielle" er med "naturlig" premie $P'_t = vq_t B_t$. Da er $V'_t = 0$ og vi får et kriterium til å avgjøre om V_t er positiv, resp. negativ, for alle t . Hvis $S_t = vq_{x+t} B_t - \pi$ er først positiv og så blir negativ, vil V_t være negativ for alle t . Man kan f.eks. spesielt la $B_t = n-t+1$.

Anta en sammensatt forsikring med konstant premie, og at (kontrakten og) dødeligheten er den samme ved den vanlige og spesielle reserve, mens beregningsrentene er forskjellige $i' \neq i$, $q'_{x+t} = q_{x+t}$, $h'_t = h_t$. Vi finner da med setning B

$$c_t = (V_t + P)(i' - i)$$

Nå er det kjent at V_t stiger med t slik at den spesielle reserve er mindre enn den vanlige hvis den spesielle rentefot er større enn den spesielle.

Anta så fremdeles en sammensatt forsikring med konstant premie uendret rente, men at $q'_{x+t} = q_{x+t} + k$. Da får vi

$$c_t = -k(1 - V_{t+1})$$

slik at hvis den spesielle dødelighet fremkommer ved å øke den vanlige med et konstant beløp, vil den spesielle reserve være mindre enn den vanlige.

12. BRUTTO PREMIERESERVEN

Vi har hittil sett bort fra de omkostninger som påløper selskapet ved forvaltning av forsikringene. Selskapet må ha dekning for disse omkostningene ved å gjøre et tillegg til netto premien, dermed

fremkommer bruttopremien. Omkostningene klassifiserer man vanligvis som (i), engangs-omkostninger ved forsikringens tegning; (ii) omkostninger ved inkasso av premiene; (iii) administrasjonsomkostninger forøvrig, bl.a. ved anbringelse av fondsmidlene. Det er åpenbart at omkostningstypene (ii) og (iii) er stokastiske siden de bl.a. er avhengige av hvorvidt forsikringen er i kraft eller ikke, dvs av liv eller død. Det er på den annen side åpenbart at hvorvidt bruttotillegget faktisk tilføres selskapet gjennom premiebelastning også er underkastet tilfeldigheter.

Disse betraktninger tilsier at omkostningene behandles som en ytelse til den forsikrede, som matematisk står på like linje med de kontraktmessige ytelser. Vi utvider ekvivalensprinsippet slik at forventet konstantverdi av bruttopremien skal være lik forventet konstantverdi av de kontraktmessige ytelser samt de omkostninger som påføres selskapet.

La oss konkretisere ved å se på en sammensatt livsforsikring til en person med tegningsalder x , hvor forsikringssummen S betales straks ved død før alder $x+n$ eller straks ved overlevelse av alder $x+n$. Premien på B årlig er konstant og betales kontinuert inntil alder $x+m$ ($m \leq n$), men bortfaller ved død.

Ved en slik forsikring har det vært vanlig å beskrive omkostningenes forløp slik

(i) Engangsomkostningene settes proporsjonalt med forsikringssummen S , altså lik $S\alpha$. Dette er noe forenklet sammenlignet med virkeligheten, idet det f.eks. er engangsomkostninger som er uavhengige av forsikringens størrelse (stykke-omkostninger). Men et viktig element i engangsomkostningene, nemlig agentprovisjonen ved tegninger, er ofte proporsjonale med forsikringssummen. α kan være av størrelsesorden 3 til 6%.

(ii) Innkassoomkostningene ved innkrevning av premiene er løpende i premiebetalingstiden og proporsjonal med bruttopremien B , den settes lik $B\beta$. Dvs at ved innkassering av premien Bdt over et tidsintervall av lengde dt , påføres en utgift på $B\beta dt$. β kan være av størrelsesorden 4-10%.

(iii) Administrasjonsomkostningene er løpende i forsikringstiden og regnes ofte proporsjonal med forsikringssummen lik yS . Dvs at det i løpet av et tidsintervall $(t, t+dt)$ i forsikringstiden påføres selskapet en utgift på $Sydt$. y kan være av størrelsesorden på 0,2%.

Utvilsomt er også omkostningsbeskrivelsen i (ii) og (iii) forenklet sammenlignet med virkeligheten. Men omkostningenes relative betydning tatt i betrakning, har man funnet det hensiktsmessig å bruke en relativt grovkornet modell angitt ved (i), (ii) og (iii).

Vi ser nå lett at ifølge vårt utvidede ekvivalensprinsipp er B gitt ved

$$B \bar{a}_{x\bar{n}} = S \bar{A}_{x\bar{n}} + Sa + B\beta \bar{a}_{x\bar{n}} + Sy \bar{a}_{x\bar{n}} \quad (59)$$

idet de tre siste ledd er forventet kontantverdi av de administrasjonsomkostninger som polisen påfører selskapet. I det etterfølgende setter vi $S = 1$, slik at B er premien pr. enhet av forsikringssummen.

Vi løser nå (59) mhp B og får

$$B = \frac{1}{1-\beta} \left(\pi + \frac{\alpha}{\bar{a}_{x\bar{n}}} + y \frac{\bar{a}_{x\bar{n}}}{\bar{a}_{x\bar{n}}} \right), \text{ hvor } \pi = \bar{A}_{x\bar{n}} / \bar{a}_{x\bar{n}} \quad (60)$$

Ved premiebetaling i forsikringstiden ($m = n$), får vi spesielt

$$B = \frac{1}{1-\beta} \left(\pi + \frac{\alpha}{\bar{a}_{x\bar{n}}} + y \right) \quad (61)$$

Men nå vet vi at $\pi = \frac{1}{\bar{a}_{x\bar{n}}} - \delta$, dvs $1/\bar{a}_{x\bar{n}} = \pi + \delta$. Innsettes dette i (61) finner vi

$$B = \frac{1+\alpha}{1-\beta} \pi + \frac{\alpha \delta + \gamma}{1-\beta} = F \pi + G \quad (62)$$

hvor F og G er konstanter uavhengige av x og n . $B = F\pi + G$ har vært en vanlig generell skipperskjønnsmessig regel for bruttobelastning av nettopremien π , uten hensyn til forsikringsform. (Bemerk at i (62) avhenger G av renteforten δ).

Bruttopremiereserven W_t , t år etter tegningen, defineres nå helt analogt med nettopremiereserven. Den skal dekke forventet kontantverdi av selskapets samlede utlegg, kontraktmessige og omkostninger, etter fradrag av forventet kontantverdi av de fremtidige premier. Vi finner herav for ovennevnte sammensatte forsikring.

$$W_t = \bar{A}_{x+tn-t} - B(1-\beta)\bar{a}_{x+t\bar{m}-t} + \gamma\bar{a}_{x+t\bar{n}-t} \quad (63)$$

som gir W_t ved en prospektiv betraktning. Ved retrospektiv betraktningsmåte, finner vi

$$W_t = \frac{D_x}{D_{x+t}}(B(1-\beta)\bar{a}_{x\bar{t}}) - \alpha - \gamma\bar{a}_{x\bar{t}} - \bar{A}_{x\bar{t}} \quad (64)$$

såfremt $t < m$. Tilsvarende uttrykk for W_t når $t \geq m$ nedskrives lett. W_t gitt ved (63) og (64) blir identiske siden B er bestemt ved ekvivalensprinsippet (59).

Ved innsetting av (60) i (63), finner vi

$$W_t = V_t - \frac{\alpha}{\bar{a}_{x\bar{m}}}\bar{a}_{x+t\bar{m}-t} - \gamma\left(\frac{\bar{a}_{x\bar{n}}}{\bar{a}_{x\bar{m}}}\bar{a}_{x+t\bar{m}-t} - \bar{a}_{x+t\bar{n}-t}\right) \quad (65)$$

hvor

$$V_t = A_{x+t\bar{n}-t} - \pi \bar{a}_{x+t\bar{n}-t} \quad (66)$$

er nettopremiereserven t år etter tegningen. Hvis det er premiebetaling i hele forsikringstiden, dvs $m = n$, finner vi

$$W_t = V_t - \frac{\alpha}{\bar{a}_{x\bar{n}}} \bar{a}_{x+t\bar{n}-t} \quad (67)$$

Vi ser altså at bruttoreserven er lik nettoreserven minus forventet kontantverdi av ikke amortiserte engangskostninger.

Bruttoreserven er altså alltid mindre enn nettoreserven når det er premiebetaling i forsikringstiden.

Vi har forøvrig når $m = n$,

$$V_t = 1 - \frac{\bar{a}_{x+t\bar{n}-t}}{\bar{a}_{xn}}$$

slik at vi finner

$$W_t = V_t - \alpha(1-V_t) = V_t(1+\alpha) - \alpha \quad (68)$$

Bemerk at for $t = 0$ er premiereserven $W_0 = -\alpha$ negativ.

Når $m < n$ kan $W_t > V_t$. Dette gjelder spesielt når $t > m$, hvor

$$W_t = V_t + \gamma \bar{a}_{x+t\bar{n}-t} \quad (69)$$

som også gjelder for alle $t > 0$ når forsikringen er mot engangspremie, dvs for $m = 1$.

La oss nå sette opp differensiallikningen for W_t ved tilsvarende resonnement som i avsnitt 4 ovenfor. Vi tenker oss at vi har N identiske poliser for personer som alle har tegnet forsikring for t år siden i alder x . Vinnings- og tapskonto for et etterfølgende tidsintervall av lengde dt blir,

Inntekter		Utgifter	
Reserve på tidspunktet t NW_t		Erstatninger	$1 \cdot N \mu_{x+t} dt$
Premieinntekter	$N B dt$	Inkassoomkostninger	$N B \beta dt$
Renteinntekter $N(W_t + B dt) \delta dt$		Administrasjonsomkostninger	$\gamma N dt$
		Reserve på tidspunktet $t+dt$	$N(1-\mu_{x+t} dt) W_{t+dt}$

Ved å sette utgift = inntekt finner man herav

$$W'_t = (\delta + \mu_{x+t}) W_t + B(1-\beta) - \gamma - \mu_{x+t} \quad (70)$$

såfremt $t < m$. Initialbetingelsen blir i dette tilfellet $W_{0+} = -\alpha$

Som illustrert i avsnitt 7 ovenfor kan slike differensiallikninger brukes til å analysere forsikringskontrakter. Som eksempel la oss tenke oss at administrasjonsomkostningene regnes proporsjonalt med fondet, ikke forsikringssummen. Det kan hende at dette er mer realistisk, siden det er fondet W_t som forvaltes av selskapet, ikke forsikringssummen. I vinnings- og tapskontoen ovenfor må man da erstatte utgiftsposten $\gamma N dt$ med $W_t \gamma N dt$ og vi får istedetfor (70)

$$W'_t = (\delta + \mu_{x+t}) W_t + B(1-\beta) - \gamma W_t - \mu_{x+t} \quad (71)$$

som imidlertid også kan skrives

$$W'_t = (\delta - \gamma + \mu_{x+t}) W_t + B(1-\beta) - \mu_{x+t} \quad (72)$$

Hele virkningen av den måte å regne med administrasjonsomkostningene på, vil altså bli at man skal regne med rentefot $\delta - \gamma$ istedetfor δ .

Det betyr at vi har (se likning (63))

$$W_t = \bar{A}_{x+t \ n-t} - B(1-\beta) \bar{a}_{x+t \ m-t} \quad (73)$$

hvor \bar{A} og \bar{a} er regnet ut på grunnlag av rentefot $\delta - \gamma$, ikke δ .

Premien B finner vi ved i () å sette $t = 0$, $w_0 = -\alpha$. Da finner vi

$$B = \frac{1}{1-\beta} (\bar{A}_{x\bar{n}} + \alpha) / \bar{a}_{x\bar{n}} \quad (74)$$

Å regne med administrasjonsomkostninger proporsjonale med premiereserven, kan i første omgang synes uhyre kompliserende, idet det da synes nødvendig ved premieberegningen å trekke inn premiereserven som i sin tur avhenger av premien, altså slik

$$(1-\beta)B \bar{a}_{x\bar{n}} = \bar{A}_{x\bar{n}} + \alpha + \gamma \int_0^n \frac{D_{x+t}}{D_x} w_t dt \quad (75)$$

hvor

$$w_t = \bar{A}_{x+t \bar{n-t}} - B(1-\beta) \bar{a}_{x+t \bar{n-t}} - \gamma \int_t^n \frac{D_{x+s}}{D_{x+t}} w_s ds \quad (76)$$

hvor \bar{A} og \bar{a} her er beregnet med rentefot δ . Det er naturligvis meget enklere å benytte (73). (Ved å derivere w_t finner man forøvrig (72).)

13. PREMIERESERVEN VED MANGE POLISETILSTANDER

Ved noen forsikringsformer kan polisen være i kraft på mange måter og premiereservens størrelse vil være avhengig av måten dvs tilstanden. Ved en straksbegynnende eventuell enkepensjon på 1 pr. år (mot engangspremie) vil premiereserven være $\bar{a}_{y+t} - \bar{a}_{x+t} y+t$ år etter tegningen såfremt begge ektefeller lever, hvis bare hustruen lever, vil den være \bar{a}_{y+t} (Her er x og y aldrene til mann og hustru ved polisens tegning). Ved en sammensatt livs forsikring på 1 mot en årspremie (kontinuert) på π pr. år med premiefritagelse ved invaliditet er premiereserven t år etter tegningen $\bar{A}_{x+t \bar{n-t}} - \pi \bar{a}_{x+t \bar{n-t}}^{aa}$ såfremt den forsikrede er aktiv,

mens premiereserven er $\bar{A}_{x+t} \bar{n-t} - \pi \bar{a}_{x+t}^{ia} \bar{n-t}$ hvis den forsikrede er invalid (Her er x tegningsalderen og $x+n$ høyeste utbetalingsalder).

Generelt vil vi anta at på et hvert tidspunkt i forsikrings-tiden kan forsikringen være i en av tilstandene $i = 1, 2, \dots, r$. Nedenfor skriver vi ikke aldrerne eksplisitt, og vi lar t betegne varighet siden forsikringens tegning $\mu_{ij}(t)$ betegner overgangs-intensiteten fra tilstand i til tilstand j . Avgangsintensiteten fra tilstand i blir da

$$\mu_i(t) = \sum_{j:j \neq i} \mu_{ij}(t) \quad (77)$$

Summasjonen er her over $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, r$ for gitt i .

$P_{ij}(s, t)$ betegner sannsynligheten for å være i tilstand j på t gitt at man er i tilstand på $s < t$. Vi finner

$$\frac{\partial P_{ij}(s, t)}{\partial t} = -\mu_j(t)P_{ij}(s, t) + \sum_{k:k \neq j} P_{ik}(s, t)\mu_{kj}(t) \quad (78)$$

La nå den forsikrede få $B_j(t)dt$ i "livrente" når han i $(t, t+dt)$ er i tilstand j . Spesielt kan $B_j(t) < 0$, slik at $-B_j(t)$ er premien. La videre $B_{ij}(t)$ være en "erstatning" som utbetaltes umiddelbart hvis polisen på tidspunktet t går over fra tilstand i til tilstand j .

Hvis polisen på tidspunkt s er i tilstand j , vil premiereserven være

$$V_j(s) = \int_s^\infty \sum_{i=1}^r P_{ji}(s, t)B_i(t)v^{t-s}dt + \\ + \int_s^\infty \sum_{ik:i \neq k} P_{ji}(s, t)\mu_{ik}(t)B_{jk}(t)v^{t-s}dt \quad (79)$$

Vi har også

$$v_j(s) = \int_s^\infty v^{t-s} e^{-\int_s^t \mu_j(\tau)d\tau} \{B_j(t) + \sum_{i:i \neq j} \mu_{ji}(t)(B_{ji}(t) + v_i(t))\} dt \quad (80)$$

$e^{-\int_s^t \mu_j(\tau)d\tau}$ er nemlig sannsynligheten på s for at polisen uavbrutt skal være i tilstand j til tidspunktet t . I så fall skal han ha $B_j(t)dt$ over tidsintervallet $(t, t+dt)$. Betinget av at han på t er i tilstand j , er sannsynlighet for at i $(t, t+dt)$ går over i tilstand i lik $\mu_{ji}(t)dt$. I så fall skal han ha en erstatning på $B_{ji}(t)$. Hvis man dessuten godskriver ham $v_i(t)$ ved overgangen, har man dekning for alle transaksjoner etter t .

Deriverer vi (80), får vi

$$\begin{aligned} v_j'(s) &= -B_j(s) - \sum_{i:i \neq j} \mu_{ji}(s)(B_{ji}(s) + v_i(s)) + \delta v_j(s) + \\ &+ \int_s^\infty v^{t-s} e^{-\int_s^t \mu_j(\tau)d\tau} \mu_j(s)[B_j(t) + \sum_{i:i \neq j} \mu_{ji}(t)(B_{ji}(t) + \\ &+ v_i(t))] dt \end{aligned}$$

Men ved å sammenligne siste ledd med (80) ser vi at det er lik $\mu_j(s)v_j(s)$.

Av (80) finner vi da,

$$v_j'(s) = \delta v_j(s) - B_j(s) - \sum_{i:i \neq j} \mu_{ji}(s)(B_{ji}(s) + v_i(s) - v_j(s)) \quad (81)$$

som er en fundamental likning. (81) kan avledes ved å se på vinnings- og tapskonto over $(s, s+ds)$ for N identiske poliser i tilstand j s år etter tegningen.

Inntekter	Utgifter
Gammel reserve $NV_j(s)$	Løpende livrenter $NB_j(s)ds$
Renter $NV_j(s)\delta ds$	Overgangserstatninger $N\sum_i B_{ji}(s)\mu_{ji}(s)ds$ Ny reserve for poliser som forblir i i tilstanden $N(1-\sum_i \mu_{ji}(s)ds)V_j(s+ds)$ Ny reserve for poliser som går over i andre tilstander $N\sum_i \mu_{ji}(s)ds V_i(s+ds)$

Herav finnes (81) ved å sette utgift lik inntekt. Vi ser forøvrig at (81) kan skrives,

$$V'_j(s) = (\delta + \mu_j(s))V_j(s) - B_j(s) - \sum_{i:i \neq j} \mu_{ji}(s)(B_{ji}(s) + V_i(s)) \quad (82)$$

Eksempler: Vedmannens død skal hustruen, hvis hun er i live, ha en kontinuert betalt konstant livrente på 1 pr. år så lenge hun lever. For dette skal erlegges en kontinuert betalt premie på π pr. år så lenge mann og hustru lever. Lamannens og hustruens alder ved tegningen være x og y . Premien π er bestemt ved $\bar{a}_{xy}\pi = \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$. La tilstand 1 = begge ektefeller lever, 2 = bare hustruen lever. Av (82) kan vi direkte nedskrive

$$V'_1(s) = (\delta + \mu_{x+s} + \mu_{y+s})V_1(s) + \pi - \mu_{x+s}V_2(s)$$

$$V_2(s) = (\delta + \mu_{y+s})V_2(s) - 1$$

Alle $B_{ji}(s)$ fra (82) er 0.

Anta at kontrakten er som ovenfor beskrevet, men med den endring at hvis hustruen dør før mannen, skal mannen ha tilbake premiereserven.

La da tilstanden 3 = bare mannen lever. Da er åpenbart $B_{13}(t) = V_1(t)$, mens alle andre $B_{ij}(s) = 0$. Vi finner direkte

av (82)

$$V_1^!(s) = (\delta + \mu_{x+s} + \mu_{y+s}) V_1(s) + \pi - \mu_{y+s} V_1(s) - \mu_{x+s} V_2(s)$$

$$V_2^!(s) = (\delta + \mu_{y+s}) V_2(s) - 1$$

$$V_3^!(s) = 0$$

I likningen for $V_1^!(s)$ faller leddene med μ_{y+s} bort, dessuten er $V_2(s) = \bar{a}_{y+s}$, dvs

$$V_1^!(s) = (\delta + \mu_{x+s}) V_1(s) + \pi - \mu_{x+s} \bar{a}_{y+s} \quad (83)$$

som avslører for oss hvorledes beregningene kan foregå. Vi kan oppfatte dette slik at vi har en "enkel livsforsikring" med løpende premie påmannens liv med "utbetaling" av forsikringssum \bar{a}_{y+s} ved død s år etter tegningen. Men da blir premiereserven gitt ved

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \int_t^\infty v^{s-t} \bar{a}_{y+s} \mu_{x+s} \frac{1}{1-x+t} ds - \pi \bar{a}_{x+t} = \\ &= \frac{1}{D_{x+t}} \int_{x+t}^\infty \mu_\xi^D \bar{a}_{\xi-v} d\xi - \pi \bar{a}_{x+t} \end{aligned} \quad (84)$$

hvor $v = x-y$. Ved å sette $t = 0$, $V_1(0) = 0$, finner vi

$$\pi \bar{a}_x = \frac{1}{D_x} \int_x^\infty \mu_\xi^D \bar{a}_{\xi-v} d\xi \quad (85)$$

Vi ser at for løpende beregningsformål er det bare å utarbeide en tabell over

$$G_{xv} = \int_x^\infty \mu_\xi^D \bar{a}_{\xi-v} d\xi$$

for $x = 20, 21, \dots, 60$; $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.