STATISTICAL MEMOIRS
Institute of Mathematics
University of Oslo

No. 4
August 1968

Noen grensesetninger i sannsynlighetsregningen.

av

Grete Usterud Fenstad.

INNHOLDSFORTEGNELSE

Noen grensesetninger i sannsynlighetsregningen.

1. Grense i sannsynlighet.

La $Z_1, Z_2, \ldots$ være en følge av stokastiske variable. Det er flere måter å definere en grense for følgen, og vi skal først ta for oss

Definisjon 1. Hvis for enhver $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|Z_n - a| < \varepsilon) = 1 \quad .$$

sier vi at $\{Z_n\}$ har a som grense i sannsynlighet eller at $\{Z_n\}$ konvergerer mot a i sannsynlighet og vi skriver

$$\operatorname*{plim}_{n \to \infty} Z_n = a \quad .$$

Hvis Z er en stokastisk variabel og $\operatorname*{plim}_{n \to \infty} (Z_n - Z) = 0$, sier vi at $\{Z_n\}$ har Z som grense i sannsynlighet og skriver

$$\operatorname*{plim}_{n \to \infty} Z_n = Z \quad .$$

La oss se på noen eksempler på følger av stokastiske variable som konvergerer i sannsynlighet. Tsjebysjeff's ulikhet (Sverdrup I, s.60 og s.115) kan ofte brukes til å bevise konvergens i sannsynlighet.

Eksempel 1. (Tsjebysjeff's lov om de store tall) $X_1, X_2, \ldots$ er uavhengige med samme forventning ξ og varians σ^2. Sett

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n \quad ,$$

da er ifølge Tsjebysjeff's ulikhet

$$P(|Z_n - \xi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad .$$

Det følger at $\lim_{n \to \infty} P(|Z_n - \xi| < \varepsilon) = 1$, dvs.

$$\operatorname*{plim}_{n} \bar{X}_n = \xi \quad .$$

<u>Eksempel 2</u> La X_n være χ^2- fordelt med n frihetsgrader. Sett

$$Z_n = \frac{X_n}{n}$$

og vi får ved Tsjebysjeff's ulikhet at

$$\operatorname*{plim}_n Z_n = 1 .$$

<u>Eksempel 3</u> La $\{c_n\}$ være en følge av reelle tall med $\lim\limits_n c_n = c$.
Vi skal vise at hvis $\operatorname*{plim}\limits_n Z_n = Z$ er $\operatorname*{plim}\limits_n c_n Z_n = cZ$:

siden $|c_n Z_n - cZ| \leq |c_n| \cdot |Z_n - Z| + |c_n - c| \cdot |Z|$,

er

$$P(|c_n Z_n - cZ| \geq \varepsilon) \leq P(|c_n| \cdot |Z_n - Z| + |c_n - c| \cdot |Z| \geq \varepsilon) .$$

Sett
$$A = (|c_n| \cdot |Z_n - Z| \geq \tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$B = (|c_n - c| \cdot |Z| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) .$$

$$C = (|c_n| \cdot |Z_n - Z| + |c_n - c| \cdot |Z| \geq \varepsilon) .$$

Da har vi

$$\bar{C} \supset \bar{A} \cap \bar{B} ,$$

eller

$$C \subset A \cup B$$

og videre

$$P(C) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) .$$

Sammen med ulikheten ovenfor gir dette

$$P(|c_n Z_n - cZ| \geq \varepsilon) \leq P(|c_n| \cdot |Z_n - Z| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) + P(|c_n - c| \cdot |Z| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) .$$

La M være slik at $|c_n| \leq M$ for alle n , da får vi

$$P(|c_n| \cdot |Z_n - Z| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) \leq P(M \cdot |Z_n - Z| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

siden $\underset{n}{\text{plim}}\ Z_n = Z$.

$$P(|c_n - c| \cdot |Z| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = P(|Z| \geq \frac{\varepsilon}{2|c_n - c|}) \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

siden Z er en stokastisk variabel, det vil si

$$P(|Z| < \infty) = 1 \ .$$

Vi har nå vist det vi skulle, nemlig at

$$P(|c_n Z_n - cZ| \geq \varepsilon) \underset{n \to \infty}{\to} 0 \ .$$

Som et spesialtilfelle får vi at $\underset{n}{\text{plim}}\ cZ_n = cZ$ hvis $\underset{n}{\text{plim}}\ Z_n = Z$.

La oss anvende dette på et nytt eksempel.

Eksempel 4. La $X_1, X_2, \ldots$ være uavhengige og identisk fordelte $N(\xi, \sigma)$.

Da er

$$\frac{Z_n}{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2}$$

χ^2-fordelt med $n-1$ frihetsgrader. Ifølge Eksempel 2 er

$$\underset{n}{\text{plim}}\ \frac{Z_n}{(n-1)\sigma^2} = 1$$ eller ved å multiplisere med konstanten σ^2 (se Eksempel 3)

$$\underset{n}{\text{plim}}\ \frac{Z_n}{n-1} = \sigma^2 \ .$$

Vi har også at

$$\underset{n}{\text{plim}}\ \frac{Z_n}{n} = \sigma^2$$

ved å anvende Eksempel 3 med $c_n = \frac{n-1}{n}$.

Altså er både $\frac{Z_n}{n-1}$ og $\frac{Z_n}{n}$ konsistente estimatorer for σ^2 .

Eksempel 1 kan generaliseres til

Setning 1 (Tsjebysjeff) La $X_1, X_2, \ldots$ være uavhengige stokastiske variable slik at

$$EX_n = \xi_n \text{ og } \operatorname{var} X_n = \sigma_n^2 , \quad n=1,2, \ldots \text{ eksisterer,}$$

og slik at

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \to 0 \text{ når } n \to \infty .$$

Da er

$$\operatorname*{plim}_n \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] = 0 .$$

Bevis. Anvender Tsjebysjeff's ulikhet på $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|<\varepsilon\right) \geq 1-\frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{\varepsilon^2} \to 1 \text{ når } n \to \infty .$$

q.e.d.

Legg merke til at det ikke forutsettes at

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ har noen grense når $n \to \infty$, men hvis grensen eksisterer, gjelder

Korollar. La forutsetningene være som i Setning 1 og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \xi ,$$

da er

$$\operatorname*{plim}_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \xi .$$

Bevis. Sett $\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ og $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Til enhver $\varepsilon > 0$ finnes det en N_ε slik at hvis $n \geq N_\varepsilon$ er $|\bar{\xi}_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$. For $n \geq N_\varepsilon$ gjelder

$$P(|\bar{X}_n-\xi|<\varepsilon) \geq P(|\bar{X}_n-\bar{\xi}_n|+|\bar{\xi}_n-\xi|<\varepsilon) \geq P(|\bar{X}_n-\bar{\xi}_n|<\frac{\varepsilon}{2}) \to 1 \text{ når } n \to \infty .$$

q.e.d.

Følgende lemma kan nyttes i forbindelse med Korollar :

Lemma : Hvis $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$, så er $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \xi$. Det omvendte gjelder ikke alltid.

Bevis. Til enhver $\varepsilon > o$ finnes en N_ε slik at bare $n > N_\varepsilon$ er $|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon$.

La nå $n > N_\varepsilon$:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \xi\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \xi)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - \xi|$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}|\xi_i - \xi| + \frac{1}{n}\sum_{i=N_\varepsilon+1}^{n}|\xi_i - \xi|$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}|\xi_i - \xi| + \frac{n-N_\varepsilon}{n}\varepsilon \quad < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

bare n er tilstrekkelig stor.

At det omvendte ikke alltid gjelder, sees av følgende moteksempel :

$\xi_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Denne følgen har ingen grense, - men

$$\bar{\xi}_{2m} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{2m}\xi_n = o \quad \text{og} \quad \bar{\xi}_{2m+1} = \frac{1}{2m+1}\sum_{n=1}^{2m+1}\xi_n = -\frac{1}{2m+1}$$

slik at

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\xi}_n = o \quad .$$

q.e.d.

Hvis vi i Setning 1 forlanger at alle X_1, X_2, ... er identisk fordelte, kan vi sløyfe kravet om at variansen skal eksistere.

Setning 2. (Khintchin) Hvis X_1, X_2, ... er uavhengige og identisk fordelte med forventning ξ, er

$$\operatorname{plim}_n \bar{X}_n = \xi \ .$$

Denne setningen vil ikke bli bevist her. Hvis leseren er kjent med karakteristiske funksjoner, finner han et enkelt bevis for Setning 2 i f.eks. S.S.Wilks : Mathematical Statistics s. 254, ellers kan setningen bevises ved elementære metoder som i W. Feller : An Introduction to Probability Theory and its Applications s. 232.

Eksempel 5. $X_1, X_2, \ldots$ er uavhengige og identisk fordelte. Hvis r-te ordens moment eksisterer, sett

$$\lambda_r = E(X_1-c)^r$$
$$L_r(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-c)^r \ .$$

Ved å anvende Setning 2 (eller Eksempel 1 hvis λ_{2r} eksisterer) på $(X_n-c)^r$, $n=1,2,\ldots$ får vi

$$\operatorname{plim}_n L_r(n) = \lambda_r \ .$$

Spesielt gjelder for

1) $c = o$ at $\operatorname{plim}_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,r} = EX_1^{\,r}$, og

2) $c = EX_1 = \xi$ at $\operatorname{plim}_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\xi)^r = E(X_1-\xi)^r$.

Setning 3. (Slutsky) Hvis g er en reell kontinuerlig funksjon av en variabel og $\operatorname{plim}_n X_n = X$, så er

$$\operatorname{plim}_n g(X_n) = g(X) \ .$$

Bevis. Siden g er kontinuerlig, er g uniformt kontinuerlig i ethvert lukket og begrenset intervall, $[-M, +M]$. Det vil si at hvis $x \varepsilon [-M, +M]$ og $x_n \varepsilon [-M, +M]$ så vil det til enhver $\varepsilon > o$ finnes en $\delta_\varepsilon > o$ slik at

$$|x_n - x| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |g(x_n) - g(x)| < \varepsilon \quad .$$

Dette er ekvivalent med :

hvis $|g(x_n) - g(x)| \geq \varepsilon$, må enten $|x_n - x| \geq \delta_\varepsilon$

eller $x \notin [-M, +M]$ eller $x_n \notin [-M, +M]$.

Vi får derfor

$$P(|g(X_n) - g(X)| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \delta_\varepsilon) + P(|X| > M) + P(|X_n| > M) \quad .$$

Lar først $n \to \infty$:

$$\lim_n \sup \; P(|g(X) - g(X)| \geq \varepsilon) \leq$$

$$\lim_n \sup \; P(|X_n - X| \geq \delta_\varepsilon) + P(|X| > M) + \lim_n \sup \; P(|X_n| > M)$$

$$\leq P(|X| > M) + P(|X| > \tfrac{M}{2})$$

(se Appendiks A, setning 2(ii) og Setning 1) ,

siden

$$P(|X_n| > M) \leq P(|X_n - X| > \tfrac{M}{2}) + P(|X| > \tfrac{M}{2})$$

medfører at

$$\lim_n \; P(|X_n| > M) \leq P(|X| > \tfrac{M}{2}) \; .$$

Ulikheten gjelder for alle $M > o$, vi kan derfor la $M \to \infty$:

$$o \le \limsup_n P(|g(X_n) - g(X)| \ge \varepsilon) \le \lim_{M\to\infty} P(|X| > M) + \lim_{M\to\infty} P(|X| > \frac{M}{2}) = o\ .$$

Altså eksisterer $\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n) - g(X)| \ge \varepsilon)$

og er lik o. q.e.d.

Setning 3 kan generaliseres til at g er en reell kontinuerlig funksjon av flere variable. Beviset går som for én variabel.

Setning 3*. Hvis g er en reell kontinuerlig funksjon av k variable, og

$$\operatorname{plim}_n X_n^{(j)} = X^{(j)} \quad , \ j = 1,2,\ldots, k \qquad ,$$

så er $\operatorname{plim}_n g(X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(k)}) = g(X^{(1)},\ldots,X^{(k)})$.

Legg merke til at det ikke er sagt noe om at $X_n^{(1)},\ldots,X_n^{(k)}$ skal være stokastisk uavhengige.

Eksempel 6. Hvis $\operatorname{plim}_n X_n = X$ og $\operatorname{plim}_n Y_n = Y$, er $\operatorname{plim}_n X_n^2 = X^2$, $\operatorname{plim}_n (X_n + Y_n) = X + Y$ og $\operatorname{plim}_n X_n \cdot Y_n = X \cdot Y$.

Eksempel 7. La $X_1, X_2, \ldots,$ være uavhengige og identisk fordelte med forventning ξ. Sett

$$\mu_r = E(X_1 - \xi)^r$$

$$M_r(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^r \qquad .$$

Vi skal vise at

$$\operatorname{plim}_n M_r(n) = \mu_r \qquad .$$

Dette følger lett av Eksempel 5 og Setning 3* ,hvis vi skriver $M_r(n)$ på en annen måte :

$$M_r(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\xi) - (X_n-\xi)\right]^r$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=o}^{r}\binom{r}{k}(X_i-\xi)^k \cdot (-1)^{r-k}(\bar{X}_n-\xi)^{r-k}$$

$$= \sum_{k=o}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}(\bar{X}_n-\xi)^{r-k}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\xi)^k$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\xi)^r + \sum_{k=o}^{r-1}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}(\bar{X}_n-\xi)^{r-k}\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\xi)^k$$

$$\operatorname*{plim}_n M_r(n) = \operatorname*{plim}_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\xi)^r + \sum_{k=o}^{r-1}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}\left[\operatorname*{plim}_n(\bar{X}_n-\xi)\right]^{r-k}$$

$$\cdot \operatorname*{plim}_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_n-\xi)^k$$

$$= \mu_r + \sum_{k=o}^{r-1}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}\,0^{r-k}\,\mu_k = \mu_r \quad .$$

Spesielt for $r = 2$ får vi

$$\operatorname*{plim}_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \text{var } X_1 ,$$

Eksempel 8. Anta at $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\dots$ er uavhengige og identisk fordelte og at EX_1, EY_1, EX_1^2, EX_1Y_1, EY_1^2 eksisterer .

$$R_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y}_n)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y}_n)^2}} = \frac{a_n}{\sqrt{b_n\cdot c_n}}$$

blir ofte brukt som estimator for

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X_1,Y_1)}{\sqrt{\text{var } X_1 \cdot \text{var } Y_1}} \quad .$$

Vi ser at R_n er en kontinuerlig funksjon av a_n, b_n, c_n. I Eksempel 7 fant vi at

$$\operatorname*{plim}_n b_n = \operatorname{var} X_1 \quad \text{og}$$

$$\operatorname*{plim}_n c_n = \operatorname{var} Y_1 .$$

$$\operatorname*{plim}_n a_n = \operatorname*{plim}_n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \bar{X}_n \cdot \bar{Y}_n \right] = EX_1Y_1 - EX_1 \cdot EY_1$$

$$= \operatorname{cov}(X_1, Y_1)$$

ved anvendelse av Setning 2. Setning 3* gir nå

$$\operatorname*{plim}_n R_n = \frac{\operatorname*{plim}_n a_n}{\sqrt{\operatorname*{plim}_n b_n \cdot \operatorname*{plim}_n c_n}} = \frac{\operatorname{cov}(X_1, Y_1)}{\sqrt{\operatorname{var} X_1 \cdot \operatorname{var} Y_1}} = \rho .$$

Av at $\operatorname*{plim}_n Z_n = a$ er det fristende å trekke den slutning at hvis EZ_n eksisterer må $\lim_n EZ_n = a$. At dette ikke er riktig ser vi av følgende moteksempel :

$\{a_n\}$ er en følge av positive reelle tall med $\lim_n a_n = a$, og sannsynlighetsfordelingen for Z_n er gitt ved

$$P(Z_n = n \cdot a_n) = \frac{1}{n} \quad , \quad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} .$$

Vi finner at

$$\lim_n EZ_n = \lim_n a_n = a .$$

Hvis følgen $\{a_n\}$ er slik at $n \cdot a_n \geq c > 0$ for alle n, vil for alle ε, $0 < \varepsilon < c$,

$$P(|Z_n|<\varepsilon) = P(Z_n = o) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 ,$$

det vil si at

$$\operatorname*{plim}_n Z_n = o .$$

Hvis $a_n = n$ får vi $\lim_n EZ_n = \infty$, og hvis $a_n = 1$ får vi $\lim_n EZ_n = 1$, mens $\operatorname*{plim}_n Z_n = o$ i begge tilfelle.

Vi har imidlertid følgende

Setning 4. Hvis $\operatorname*{plim}_n Z_n = a$ og $P(|Z_n|\leq A) = 1$ for alle n, er $\lim_n EZ_n = a$.

Bevis. Anta at Z_n er absolutt kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet f_n (beviset går på tilsvarende måte hvis Z_n er diskret fordelt).

$$|EZ_n - a| = |\int (z-a)\, f_n(z)dz| \leq \int |z-a| f_n(z)dz$$

$$= \int_{|z-a|\leq\varepsilon} |z-a|\, f_n(z)dz + \int_{|z-a|>\varepsilon} |z-a| f_n(z)dz$$

$$\leq \varepsilon \cdot P(|Z_n - a| \leq \varepsilon) + (A + |a|)\, P(|Z_n - a| > \varepsilon) .$$

Vi ser at bare n er stor nok kan vi få høyre side $\leq 2\varepsilon$ q.e.d.

Eksempel 9. $X_1, X_2, \ldots$ er uavhengige og identisk fordelte med

$P(X_j = 1) = p$, $P(X_j = o) = 1-p$. Da er (Eksempel 1)

$$\operatorname*{plim}_n \bar{X}_n = p .$$

Hvis g er en reell kontinuerlig funksjon på $[o,1]$, er

$$\operatorname*{plim}_n \; g(\bar{X}_n) = g(p) \qquad \text{(Setning 3)}$$

og $$P(|g(\bar{X}_n)| \leq A) = 1$$

hvis $A = \sup_p |g(p)|$. Setning 4 gir da

$$\lim_n \; E\, g(\bar{X}_n) = g(p) \quad \text{, eller}$$

$$\lim_n \sum_{j=o}^{n} g(\tfrac{j}{n}) \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = g(p) \quad .$$

Det kan vises at grensen er uniform i p ; dette kalles Weierstrass' approksimeringssats.

2. Grense i fordeling.

Vi skal nå se på en annen type konvergens av en følge $\{Z_n\}$ av stokastiske variable. Sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel X betegner vi med F_X.

Definisjon 2. Hvis

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$$

for alle kontinuitetspunkt til F_Z, sier vi at $\{Z_n\}$ konvergerer mot Z i fordeling . F_Z kalles følgens grense-fordeling.

Det er to ting å legge merke til i denne definisjonen : (i) vi forlanger at F_{Z_n} skal konvergere mot en sannsynlighetsfordeling, (ii) men bare for de punkter hvor F_Z er kontinuerlig.

Hvis Z_n er rektangulært fordelt $[o,n]$, er

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} o & x < o \\ \dfrac{x}{n} & o \leq x \leq n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

og

$$\lim_n F_{Z_n}(x) = 0 \qquad \text{for} \quad -\infty < x < \infty \quad ,$$

men dette er ingen sannsynlighetsfordeling. Det er slike tilfelle (i) utelukker.

På den annen side ønsker vi heller ikke å være for strenge i våre krav til konvergens. Hvis vi hadde forlangt at F_{Z_n} skulle konvergere for alle x, ville ikke følgen $Z_1, Z_2, \ldots$ hvor Z_n er normalfordelt $(0, \sigma_n)$, $n=1,2,\ldots$ og $\lim_n \sigma_n = 0$ konvergere i fordeling. Vi får nemlig

$$F_{Z_n}(x) = G(\frac{x}{\sigma_n}) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{hvis} \quad x = 0 \\ 0 & \text{hvis} \quad x < 0 \end{cases} \quad ,$$

men funksjonen på høyre side er ingen sannsynlighetsfordeling, fordi den ikke er kontiuerlig fra høyre i $x = 0$ (se E.Sverdrup, I, s.91) .

Derimot er

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{hvis} \quad x < 0 \end{cases}$$

en sannsynlighetsfordeling og

$$\lim_n F_{Z_n}(x) = F(x) \quad \text{for alle kontinuitetspunkt til } F.$$

(F er sannsynlighetsfordelingen til en sikker variabel Z, $P(Z=0) = 1$)

<u>Setning 5</u>. Hvis følgen Z_1, Z_2, konvergerer i sannsynlighet mot Z, så konvergerer følgen også i fordeling mot Z.

<u>Bevis.</u> Vi må vise to ting : (i) $\lim_n F_{Z_n}(x)$ eksisterer i alle kontinuitetspunkt for F_Z, og (ii) $\lim_n F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$.

La x_0 være et kontinuitetspunkt for F_Z .

1) $x' < x_o$

$$F_Z(x') = P(Z \leq x') =$$

$$= P(Z \leq x' \cap Z_n \leq x_o) + P(Z \leq x' \cap Z_n > x_o)$$

$$\leq P(Z_n \leq x_o) + P(|Z_n - Z| > x_o - x')$$

$$= F_{Z_n}(x_o) + P(|Z_n - Z| > x_o - x')$$

Tar så $\liminf_n$ på begge sider :

$$F_Z(x') \leq \liminf_n \left[F_{Z_n}(x_o) + P(|Z_n - Z| > x_o - x') \right]$$

$$\leq \liminf_n F_{Z_n}(x) + \limsup_n P(|Z_n - Z| > x_o - x')$$

$$= \liminf_n F_{Z_n}(x_o) \quad .$$

2) $x'' > x_o$

$$1 - F_Z(x'') = P(Z > x'')$$

$$= P(Z > x'' \cap Z_n > x_o) + P(Z > x'' \cap Z_n \leq x_o)$$

$$\leq P(Z_n > x_o) + P(|Z_n - Z| > x'' - x_o)$$

dvs.

$$F_Z(x'') \geq F_{Z_n}(x_o) - P(|Z_n - Z| > x'' - x_o) \quad .$$

Tar så $\limsup_n$ på begge sider :

$$F_Z(x'') \geq \limsup_n F_{Z_n}(x_o) - \lim_n P(|Z_n - Z| > x'' - x_o)$$

$$= \limsup_n F_{Z_n}(x_o) \quad .$$

Tilsammen gir 1) og 2)

$$F_Z(x') \leq \liminf_n F_{Z_n}(x_o) \leq \limsup_n F_{Z_n}(x_o) \leq F_Z(x'') \quad .$$

Siden F_Z er kontinuerlig i x_o, kan vi la $x' \uparrow x_o$ og $x'' \downarrow x_o$ og vi får

$F_Z(x_o) = \liminf_n F_{Z_n}(x_o) = \limsup_n F_{Z_n}(x_o)$. Det vil si at $\lim_n F_{Z_n}(x_o)$ eksisterer og er lik $F_Z(x_o)$. q.e.d.

Følgende eksempel viser at omvendingen av Setning 5 ikke gjelder :

La $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ være uavhengige og identisk normalfordelte (o,1) . Det er klart at $Z_1, Z_2, \ldots$ konvergerer mot Z i fordeling, men

$$P(|Z_n - Z| < \varepsilon) = G\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) - G\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$$

slik at $\lim_n P(|Z_n - Z| < \varepsilon) < 1$.

Hvis Z er en sikker variabel, $P(Z = a) = 1$, betegner vi sannsynlighetsfordelingen for Z med F_a , dvs.

$$F_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \geq a \\ o & \text{hvis } x < a \end{cases}$$

I dette spesielle tilfelle gjelder

<u>Setning 6.</u> Følgen $Z_1, Z_2, \ldots$ konvergerer mot a i sannsynlighet hvis og bare hvis følgen konvergerer mot a i fordeling.

<u>Bevis.</u> På grunn av <u>Setning 5</u> behøver vi bare vise at

hvis $\lim_n F_{Z_n}(x) = F_a(x)$ for alle $x \neq a$ så er $\operatorname{plim}_n Z_n = a$

$$P(|Z_n - a| < \varepsilon) \geq P(|Z_n - a| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}) \geq P(a - \tfrac{\varepsilon}{2} < Z_n \leq a + \tfrac{\varepsilon}{2})$$

$$= F_{Z_n}(a + \tfrac{\varepsilon}{2}) - F_{Z_n}(a - \tfrac{\varepsilon}{2}) \longrightarrow 1 - o = 1 .$$

q.e.d.

Vi skal se noen eksempler på hvordan Setning 3^* og Setning 5 kan kombineres.

Eksempel 1o. Hvis $\text{plim}_n X_n = X$: og $\text{plim}_n Y_n = Y$, så er

$$\lim_n F_{X_n+Y_n} = F_{X+Y} \quad \text{og} \quad \lim_n F_{X_n \cdot Y_n} = F_{X \cdot Y} \quad .$$

Hvis spesielt Y er en sikker variabel :

1) $Y = o$ $\qquad \lim_n F_{X_n+Y_n} = F_X$

2) $Y = 1$ $\qquad \lim_n F_{X_n \cdot Y_n} = F_X$

Setning 7. (Cramér) La $X_1, X_2, \dots$ og $Y_1, Y_2, \dots$ være to følger av stokastiske variable. Hvis $\text{plim}_n (X_n - Y_n) = 0$ og $X_1, X_2, \dots$ konvergerer i fordeling, så konvergerer $Y_1, Y_2, \dots$ i fordeling og grense-fordelingen for $\{Y_n\}$ er lik grense-fordelingen for $\{X_n\}$.

Bevis. Sett $Z_n = X_n - Y_n$,n=1,2,..., og la F være grense-fordelingen for $X_1, X_2, \dots$. La y_o være et kontinuitetspunkt for F .

1) La $y' > y_o$ være et kontinuitetspunkt for F

$$F_{Y_n}(y_o) = P(Y_n \leq y_o) = P(X_n \leq y_o + Z_n)$$

$$= P(X_n \leq y_o + Z_n \cap Z_n < y' - y_o) + P(X_n \leq y_o + Z_n \cap Z_n \geq y' - y_o)$$

$$\leq P(X_n \leq y') + P(Z_n \geq y' - y_o) \; .$$

Tar $\limsup_n$ på begge sider :

$$\limsup_n F_{Y_n}(y_o) \leq \limsup_n F_{X_n}(y') + \limsup_n P(Z_n \geq y' - y_o) = F(y')$$

2) La $y'' < y_o$ være et kontinuitetspunkt for F

$$1 - F_{Y_n}(y_o) = P(X_n > y_o + Z_n)$$

$$= P(X_n > y_o + Z_n \cap Z_n \leq -(y_o - y'')) + P(X_n > y_o + Z_n \cap Z_n > -(y_o - y''))$$

$$\leq P(Z_n \leq -(y_o - y'')) + P(X_n > y'')$$

dvs. $$F_{Y_n}(y_o) \geq - P(Z_n \leq -(y_o - y'')) + F_{X_n}(y'')$$

Tar $\lim_n \inf$ på begge sider :

$$\lim_n \inf F_{Y_n}(y_o) \geq - \lim_n \sup P(Z_n \leq -(y_o - y'')) + \lim_n \inf F_{X_n}(y'') = F(y'')$$

Tilsammen gir 1) og 2)

$$F(y'') \leq \lim_n \inf F_{Y_n}(y_o) \leq \lim_n \sup F_{Y_n}(y_o) \leq F(y') .$$

I Appendiks B blir det vist at en sannsynlighetsfordeling kan ha høyst et tellbart antall diskontinuitetspunkt. Altså finnes det følger av kontinuitetspunkt for F , $\{y_n''\}$ og $\{y_n'\}$, slik at

$y_n'' \uparrow y_o$ og $y_n' \downarrow y_o$ og vi får at $\lim_n F_{Y_n}(y_o)$ eksisterer og er lik $F(y_o)$.

q.e.d.

<u>Eksempel 11.</u> $X_1, X_2, \ldots$ er uavhengige og identisk normalfordelte$(\xi,1)$. Vi vet a priori at $\xi > o$, og skal finne en estimator for ξ .

$\hat{\xi}_n = \bar{X}_n$ er en forventningsrett estimator og $\operatorname{plim}_n \hat{\xi}_n = \xi$, - men den kan komme til å estimere ξ som er positiv med et negativt tall. Dette ansees som uheldig, og i stedet foreslåes estimatoren

$$\xi_n^* = \begin{cases} \bar{X}_n & \text{hvis } \bar{X}_n > o \\ o & \text{hvis } \bar{X}_n \leq o \end{cases} .$$

Vi innfører funksjonen g definert ved

$$g(u) = \begin{cases} u & \text{hvis } u > o \\ o & \text{hvis } u \leq o \end{cases} ,$$

g er opplagt kontinuerlig. Ifølge Setning 3 er da

$$\operatorname*{plim}_n \xi_n^* = \operatorname*{plim}_n g(\bar{X}_n) = g(\xi) = \xi$$

siden $\xi > o$, slik at også ξ_n^* er konsistent .

Selv om $\hat{\xi}_n$ og ξ_n^* har forskjellige egenskaper for endelige n(ξ_n^* er ikke forventningsrett f.eks.), så skal vi vise at de har samme grense-fordelinger.

Vi vet at $\sqrt{n}\,(\hat{\xi}_n - \xi)$ er $N(o,1)$, og dette er altså også grense-fordelingen. Hvis vi kan vise at

$$\operatorname*{plim}_n \left[\sqrt{n}\,(\hat{\xi}_n - \xi) - \sqrt{n}\,(\xi_n^* - \xi) \right] = o,$$

følger av Setning 7 at også $\sqrt{n}\,(\xi_n^* - \xi)$ har grensefordelingen $N(o,1)$ og vi er fremme.

Vi innfører en ny stokastisk variabel I_n ved

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \bar{X}_n > o \\ o & \text{hvis } \bar{X}_n \leq o \end{cases} .$$

Siden $\xi_n^* = I_n \cdot \hat{\xi}_n$, er

$$\sqrt{n}\,(\hat{\xi}_n - \xi) - \sqrt{n}\,(\xi_n^* - \xi) = \sqrt{n}\,(1 - I_n)\,\hat{\xi}_n .$$

En finner for $\varepsilon < 1$

$$P(|\sqrt{n}\,(1-I_n)\,|<\varepsilon) = P(I_n=1) = P(\bar{X}_n > o) = 1-G(-\sqrt{n}\,\xi) \longrightarrow 1 \text{ når } n \to \infty$$

slik at

$$\operatorname*{plim}_n \sqrt{n}\,(1-I_n) = o \text{ . Ifølge Setning } 3^{*} \text{ får en at}$$

$$\operatorname*{plim}_n \sqrt{n}\,(1-I_n) \cdot \hat{\xi}_n = o \cdot \xi = o \quad .$$

Følgende to setninger er ofte nyttige for anvendelsen av Setning 7:

Setning 8. Hvis $\{X_n\}$ konvergerer mot X i fordeling og hvis $\operatorname*{plim}_n Y_n = o$, er

$$\operatorname*{plim}_n X_n \cdot Y_n = o \quad .$$

Bevis. $P(|X_n Y_n| \geq \varepsilon) =$

$$P(|X_n \cdot Y_n| \geq \varepsilon \cap |X_n| \leq M) + P(|X_n \cdot Y_n| \geq \varepsilon \cap |X_n| > M) \leq P(|Y_n| \geq \tfrac{\varepsilon}{M}) + P(|X_n| > M)$$

La $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n \cdot Y_n| \geq \varepsilon) \leq P(|X| > M)$,

deretter $M \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n \cdot Y_n| \geq \varepsilon) = o$ q.e.d.

Legg merke til at vi i Setning 8 ikke kan erstatte $\operatorname*{plim}_n Y_n = o$ med $\operatorname*{plim}_n Y_n = a$. Vi har f.eks. at følgen $\{X_n\}$ hvor $X_1, X_2, \ldots$ er uavhengige og identisk fordelte $N(o,1)$ konvergerer i fordeling, og at følgen $\{Y_n\}$ hvor $Y_n = a$, $n = 1,2,\ldots$ konvergerer i sannsynlighet, men følgen $\{X_n \cdot Y_n\}$ konvergerer ikke i sannsynlighet.

Setning 9. (Scheffé) La $\{X_n\}$ være en følge av stokastiske variable hvor X_n har sannsynlighetstetthet f_n. Hvis $\lim_n f_n(x) = f(x)$ for (nesten) alle x og hvis også f er en sannsynlighetstetthet, så er

$$\lim_{n} \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt ,$$

dvs. at $\{X_n\}$ konvergerer i fordeling mot en stokastisk variabel X som har f som sannsynlighetstetthet.

Bevis for denne setningen finnes f.eks. i C.R.Rao: Linear Statistical Inference and Its Applications, s. 1o4 - 1o5.

Eksempel 12. La $X_1, X_2, \ldots$ være uavhengige og identisk fordelte $N(o,1)$. Da er

$$T_n = \frac{\bar{X}_n \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{Z_n}{n-1}}}$$

Studentfordelt med n-1 frihetsgrader. Vi har tidligere (Eksempel 2) vist at

$$\operatorname*{plim}_{n} \frac{Z_n}{n-1} = 1 ,$$

ved Setning 3 får vi at

$$\operatorname*{plim}_{n} \left(\sqrt{\frac{n-1}{Z_n}} - 1\right) = o .$$

$\bar{X}_n \cdot \sqrt{n}$ er $N(o,1)$, og det følger at $\bar{X}_n\sqrt{n}$ konvergerer i fordeling mot en stokastisk variabel X med sannsynlighetsfordeling G (den kumulative normalfordeling $(o,1)$) . Ifølge Setning 8 er

$$\operatorname*{plim}_{n} (T_n - \bar{X}_n\sqrt{n}) = \operatorname*{plim}_{n} \left(\frac{n-1}{Z_n} - 1\right) \cdot \bar{X}_n\sqrt{n} = o$$

og ved Setning 7 får vi at T_n og $\bar{X}_n\sqrt{n}$ har samme grensefordeling, dvs.

$$\lim_{n\to\infty} P(T_n \leq t) = \lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = G(t) .$$

Eksempel 13. (Se E. Sverdrup I,s.148)

$X_1, X_2, \ldots$ er uavhengige og identisk fordelte stokastiske variable med sannsynlighetstetthet f og sannsynlighetsfordeling F. La μ være medianen i fordelingen, og Y_n medianen for $(X_1, \ldots, X_n)$. Vi skal vise at

$$(Y_n - \mu)\, 2\sqrt{n+2}\, f(\mu) .$$

har grensefordeling $N(o,1)$.

Vi lar $n = 2m + 1$, og finner at $Z_n = F(Y_n)$ har sannsynlighetstetthet

$$\frac{(2m+1)!}{m!\, m!} \left[z(1-z)\right]^m \quad ; \quad o < z < 1 \quad .$$

Siden $EZ_n = \frac{1}{2}$ og $\operatorname{var} Z_n = \frac{1}{4(n+2)}$ gir Tsjebysjeff's ulikhet

$$\operatorname*{plim}_n Z_n = \tfrac{1}{2} \quad .$$

En enkel transformasjon av stokastisk variabel medfører at

$W_n = (Z_n - \frac{1}{2})\, 2\sqrt{n+2}$ har sannsynlighetstetthet

$$k_n(w) = \frac{(2m+1)!}{m!\, m!} \; \frac{1}{2\sqrt{2m+3}} \; \frac{1}{4^m} \left(1 - \frac{w^2}{2m+3}\right)^m \quad , |w| < \sqrt{2m+3} \quad .$$

Ved bruk av Stirling's formel får en

$$\lim_{n\to\infty} k_n(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{w^2}{2}} \quad ; \; -\infty < w < +\infty \quad .$$

W_n har altså grense-fordeling $N(o,1)$ (Setning 9) .

Nå er

$$Y_n = F^{-1}(Z_n) = F^{-1}(\tfrac{1}{2}) + (Z_n - \tfrac{1}{2}) . \frac{d}{dz} F^{-1}(z)\Big|_{z = Z_n^*}$$

hvor $Z_n^* = \frac{1}{2} + \theta_{Z_n} (Z_n - \frac{1}{2})$ og $|\theta_{Z_n}| \leq 1$

Siden $|Z_n^* - \frac{1}{2}| \leq |Z_n - \frac{1}{2}|$, får vi

$$P(|Z_n^* - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon) \geq P(|Z_n - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \quad ,$$

dvs. $\operatorname{plim}_n Z_n^* = \frac{1}{2}$. Videre er

$F^{-1}(\frac{1}{2}) = \mu$ og $\frac{d}{dz} F^{-1}(z) = \dfrac{1}{f(F^{-1}(z))}$ og dermed

$$Y_n = \mu + \frac{Z_n - \frac{1}{2}}{f(F^{-1}(Z_n^*))} \quad .$$ Vi ser på

$$(Y_n - \mu)\, 2\sqrt{n+2}\, f(\mu) - W_n = W_n \cdot \left[\frac{f(\mu)}{f(F^{-1}(Z_n^*))} - 1\right] .$$

Siden $\operatorname{plim}_n \dfrac{f(\mu)}{f(F^{-1}(Z_n^*))} = \dfrac{f(\mu)}{f(F^{-1}(\frac{1}{2}))} = 1$ og

W_n har en grensefordeling følger av Setning 8 at

$$\operatorname{plim}_n \left[(Y_n - \mu) 2\sqrt{n+2}\, f(\mu) - W_n\right] = 0$$

og dermed av Setning 7 at $(Y_n - \mu)2\sqrt{n+2}\, f(\mu)$ har samme grensefordeling som W_n, nemlig $N(0,1)$.

Appendiks A.

La $\{a_n\}$ være en følge av reelle tall. Det er kjent at følgen konvergerer mot a $(|a| < \infty)$ hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes et tall N_ε slik at

$n \geq N_\varepsilon$ impliserer $|a_n - a| < \varepsilon$, og vi skriver $\lim_n a_n = a$.

Men $\lim_n a_n$ eksisterer ikke for alle tallfølger. Det er derfor hensiktsmessig å innføre to nye grensebegrep, $\lim_n \sup a_n$ og $\lim_n \inf a_n$, som ifølge definisjonen nedenfor alltid vil eksistere.

<u>Definisjon</u> $\lim_n \sup a_n = A$ hvis fra et visst N_ε av

1) <u>alle</u> a_n er $< A+\varepsilon$, og

2) <u>uendelig mange</u> a_n er $> A-\varepsilon$.

Hvis 1) ikke er oppfylt settes $\lim_n \sup a_n = +\infty$.

Hvis 1), men ikke 2) er oppfylt settes $\lim_n \sup a_n = -\infty$.

$$\lim_n \inf a_n = - \lim_n \sup (-a_n) .$$

Det er lett å se at hvis $\lim_n \inf a_n = B, |B| < \infty$, vil fra et visst N_ε av

3) alle a_n være $> B-\varepsilon$, og

4) uendelig mange a_n være $< B+\varepsilon$.

Forholdet mellom $\lim_n$, $\lim_n \sup$ og $\lim_n \inf$ er gitt ved

<u>Setning 1.</u> $\{a_n\}$ konvergerer hvis og bare hvis $\lim_n \sup a_n$ og $\lim_n \inf a_n$ er like og endelige .

I dette tilfelle er

$$\lim_n a_n = \lim_n \sup a_n = \lim_n \inf a_n .$$

<u>Bevis</u> . Anta at $\lim_n a_n = a$. Da vil, bare n er stor nok,

$$a + \varepsilon < a_n < a - \varepsilon .$$

Men ifølge definisjonen av $\lim_n \sup$ og $\lim_n \inf$ må

$$\lim_n \sup a_n = a = \lim_n \inf a_n .$$

Anta så at $\lim_n \sup a_n = \lim_n \inf a_n = a$ og $|a| < \infty$. Ifølge definisjonen av $\lim_n \sup$ vil, bare n er stor nok,

1) alle $a_n < a + \varepsilon$

og ifølge definisjonen av $\lim_n \inf$ vil, bare n er stor nok ,

3) alle $a_n > a - \varepsilon$,

det vil si at fra et visst N_ε av er

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

altså $\lim_n a_n = a$. q.e.d.

Setning 2.

(i) $\lim_n \inf\, a_n \le \lim_n \sup\, a_n$

(ii) $\lim_n \inf\, a_n + \lim_n \inf\, b_n \le \lim_n \inf\,(a_n + b_n) \le \lim_n \inf\, a_n +$
$\lim_n \sup\, b_n \le \lim_n \sup(a_n + b_n) \le \lim_n \sup\, a_n + \lim_n \sup\, b_n$

(iii) Hvis $a_n \le b_n$, $n=1,2,\ldots$, så er
$\lim_n \inf\, a_n \le \lim_n \inf\, b_n$ og $\lim_n \sup\, a_n \le \lim_n \sup\, b_n$

Bevis. (i) Sett $B = \lim_n \inf\, a_n$ og $A = \lim_n \sup\, a_n$.
Anta at $A < B$.
Bare n er stor nok er

$$\text{alle } a_n < A + \varepsilon \quad \text{og}$$
$$\text{alle } a_n > B - \varepsilon \; ,$$

men dette er umulig hvis f.eks. $\varepsilon = \frac{B-A}{3} > 0$. (Tegn figur !) Altså må $A \ge B$.

(ii) Vi beviser den første ulikheten, beviset for de andre går på samme måte.

Sett $A = \lim_n \inf\, a_n$, $B = \lim_n \inf\, b_n$ og $C = \lim_n \inf\,(a_n + b_n)$. Anta at $A + B > C$. Vi kan velge $\varepsilon = \frac{(A+B)-C}{4}$, og vet at bare n er stor nok er

$$\text{alle } a_n > A - \varepsilon \quad \text{og}$$
$$\text{alle } b_n > B - \varepsilon \; ,$$

det vil si at

$$\text{alle } a_n + b_n > A + B - 2\varepsilon.$$ Samtidig skal uendelig mange $a_n + b_n < C - \varepsilon$, men dette er umulig(tegn figur!). Altså må $A+B \le C$.

(iii) Sett $\lim_n \inf\, b_n = A$ og $\lim_n \inf\, b_n = B$. Anta at $A>B$ og velg $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$. Vi vet at bare n er stor nok er

$$\text{alle } b_n < B+\varepsilon \quad \text{og}$$

uendelig mange $a_n > A - \varepsilon$, men dette er umulig siden $a_n \leq b_n$ for alle n. Altså må $A \leq B$. Den andre ulikheten bevises på tilsvarende måte. q.e.d.

Appendiks B.

Vi skal her vise

Setning En sannsynlighetsfordeling F har høyst et tellbart antall diskontinuitetspunkt.

Bevis. La

$$D_n = \{ x | F(x) - F(x-) \geq \frac{1}{n} \}, \; n = 1,2,\ldots,$$

dvs. at D_n er mengden av alle diskontinuitetspunkt som har sprang $\geq \frac{1}{n}$. Det er klart at antall elementer i D_n høyst er lik n, siden $F(+\infty) - F(-\infty)=1$.

Videre er

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

mengden av alle diskontinuitetspunkt for F, som altså høyst har et tellbart antall elementer. q.e.d.

GUF/elr

Aug.1968.