DIFFERENCIALAJ EKVACIOJ DE SAMPLARAJ DISTRIBUOJ

de Olav Reiersøl

English Summary

The paper itself is written in Esperanto.

The paper presents new methods of deriving sampling distributions. The methods used are transitions by means of differential equations from a probability density to the corresponding characteristic function, from a characteristic function to the corresponding probability density, from one characteristic function to another characteristic function, for instance from the charcteristic function of the distribution of a random variable x to the characteristic function of the joint distribution of x and x^2.

In these derivations are used several formulas for scalar differential operators, vector differential operators and matrix differential operators, which are given in the first three sections.

1. SKALARAJ DERIVOPERATOROJ

1.1. DIFINOJ

Ni uzas la simbolon D_x por signi derivon rilate al x

(1.1) $$D_x f(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Se ni konsideras derivojn rilate al nur unu variablo, ni povas skribi D anstataŭ D_x. Potencoj de D estas difinataj rikure

(1.2) $$D^k f(x) = D(D^{k-1} f(x))$$

Polinomo en D

(1.3) $$P(D) = \sum_{j=0}^{n} a_j D^j$$

estas difinata per

(1.4) $$P(D)f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j D^j f(x)$$

La koeficientoj a_j povas esti konstantoj aŭ funkcioj de x.
Ni difinas la sumon de du polinomoj per

(1.5) $$(P_1(D) + P_2(D))f(x) = P_1(D)f(x) + P_2(D)f(x)$$

kaj la produton de du polinomoj per

(1.6) $$(P_1(D)P_2(D))f(x) = P_1(D)(P_2(D)f(x))$$

La regulo pri la adicio de $P_1(D)$ kaj $P_2(D)$ povas esti formulata ankaŭ jene: Ni trovas la sumon $P_1(y)+P_2(y)$ kie y estas ordinara variablo kaj en tiu sumo ni anstataŭigas y per D. Respondan regulon ni povas doni pri la produto de du polinomoj en D se la koeficientoj estas konstantoj. Tio ne plu validas kiam la koeficientoj estas funkcioj de x, pro tio ke x kaj D ne komutas. Ni vidas ke la adicio de polinomoj en D estas komuta kaj asocieca, kaj ke la multipliko estas asocieca, kaj distributa rilate al adicio. Kiam la koeficientoj estas konstantoj la multipliko estas ankaŭ komuta. Se la koeficientoj estas funkcioj de x, la multipliko ne plu estas komuta. Ni ekzemple havas

$$(xD^2)(x^3D) = x^4D^3 + 6x^3D^2 + 6x^2D$$
$$(x^3D)(xD^2) = x^4D^3 + x^3D^2$$

Ni difinis polinomajn derivoperatorojn. Ni povas difini aliajn derivoperatorojn pere de Fouriera mapo.

Antaŭ ol ni faros tion, ni priparolos kelkajn ecojn de Fourieraj mapoj. La funkcio $F(x)$ difinata per

$$(1.7) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(ixy))f(y)dy$$

estas nomata la Fouriera bildo de $f(y)$. Ni uzos la simbolon $L(a,b)$ por la familio de funkcioj f por kiuj la integralo

$$(1.8) \qquad \int_{a}^{b} |f(y)|dy$$

ekzistas kaj estas finia. Kiam la intervalo $[a,b]$ estas la intervalo sur kiu la funkcio f estas difinita, ni skribas L anstataŭ $L(a,b)$. Kiam f apartenas al L, la Fouriera bildo $F(x)$ ekzistas kaj estas finia por ĉiu x. Laŭ Titchmarsh (1937), sekcio 6.13, ni havas

$$(1.9) \qquad D_x^n F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (iy)^n(\text{eksp}(ixy))f(y)dy$$

se $(1+|y|^n)f(y)$ apartenas al L, kaj

$$(1.10) \qquad x^n F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(ixy))(iD_y)^n f(y)dy$$

se $f(y)$, $D_y f(y), \ldots, D_y^{n-1} f(y)$ estas kontinuaj kaj konverĝas al 0 kiam $y \to \pm\infty$, kaj $D_y^n f(y)$ apartenas al L.
El (1.9) ni facile devenigas

$$(1.11) \qquad P(D_x)F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(iy)(\text{eksp}(ixy))f(y)dy$$

kie $P(D_x)$ estas polinomo. La integralo sur la dekstra flanko de (1.11) tamen ekzistas ankaŭ por multaj funkcioj P kiuj ne estas polinomoj. Ni povas uzi (1.11) kiel difino de $P(D_x)$ por tiaj funkcioj P kaj f por kiuj $P(iy)f(y)$ apartenas al L. El (1.10) ni ricevas

$$(1.12) \qquad Q(x)F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(ixy))Q(iD_y)f(y)dy$$

Kombino de (1.11) kaj (1.12) donas

$$(1.13) \quad P(D_x)Q(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp } ixy)P(iy)Q(iD_y)f(y)dy$$

1.2. Kelkaj formuloj kun polinomaj derivoperatoroj

En Reiersøl (1951) estas pruvataj la jenaj formuloj:

$$(1.14) \quad P(D)Q(x)R(x) = (Q(x+D_D)P(D))R(x)$$

$$(1.15) \quad Q(x)P(D)R(x) = P(D-D^*)Q(x)R(x)$$

kie D kaj D^* signas derivadon rilate al x, kie D^* operacias nur al $Q(x)$, ne al $R(x)$, kie D_D signas derivadon rilate al D kie $P(D)$ estas polinomo en D kaj kie $Q(x)$ estas polinomo en x. $R(x)$ povas esti ajna funkcio kiu havas derivon de sufiĉe alta ordo. Parentezo sur la dekstra flanko de (1.14) indikas ke ni unue devas kalkuli la produton $Q(x+D_D)P(D)$ kaj poste operacii al $R(x)$ per tiu produto.

En Stephens (1937), §5, estas pruvata la jena formulo:

$$(1.16) \quad P(D)(\text{eksp } Q(x))R(x) = (\text{eksp } Q(x))P(D+Q'(x))R(x)$$

kie $P(D)$ estas polinomo, kaj kie $Q(x)$ kaj $R(x)$ estas funkcioj kiuj havas derivojn de sufiĉe alta ordo. Ni notas ke D kaj $Q'(x)$ ne komutas, tiel ke ni ne povas elvolvi $(D+Q'(x))^k$ laŭ la dunomiala formulo.

La formulo

$$(1.17) \quad (\text{eksp } Q(x))P(D)R(x) = P(D-Q'(x))(\text{eksp } Q(x))R(x)$$

povas esti pruvata en simila maniero kiel formulo (1.16).

1.3. Formuloj kun derivoperatoroj difinitaj pere de Fourieraj bildoj

Ni pruvos la formulon

$$(1.18) \quad (\text{eksp } P(D))Q(x)R(x) = Q(x+P'(D))(\text{eksp } P(D))R(x)$$

kie $Q(x)$ estas polinomo, kie

(1.19) $$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(ixy))r(y)dy$$

kaj kie la derivoperatoroj estas difinataj pere de (1.11)-(1.13). Tio signifas ke

(1.20) $$\begin{cases} (\text{eksp } P(D))Q(x)R(x) = \\ \int_{-\infty}^{\infty}(\text{eksp}(ixy + P(iy)))Q(iD_y)r(y)dy \end{cases}$$

(1.21) $$\begin{cases} Q(x+P'(D))(\text{eksp } P(D))R(x) = \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(ixy))Q(iD_y+P'(iy))(\text{eksp } P(iy))r(y)dy \end{cases}$$

Ni unue pruvos (1.18) en la speciala kazo kiam $Q(x) = x$.

(1.22) $$(\text{eksp } P(D))xR(x) = (x+P'(D))(\text{eksp } P(D))R(x)$$

La maldekstra flanko de (1.22) estas

(1.23) $$\int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(ixy+P(iy))ir'(y)dy$$

kaj la dekstra flanko de (1.22) estas

(1.24) $$\int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(ixy))(iD_y+P'(iy))(\text{eksp } P(iy))r(y)dy$$

Ni facile vidas ke (1.23) kaj (1.24) estas idente egalaj, kaj tio signifas ke (1.22) validas.

Supozu nun ke la formulo

(1.25) $$(\text{eksp } P(D))x^kR(x) = (x+P'(D))^k(\text{eksp } P(D))R(x)$$

validas por iu pozitiva entjero k. Anstataŭigante $R(x)$ per $xR(x)$ en (1.25), ni ekhavas

(1.26) $$(\text{eksp } P(D))x^k(xR(x)) = (x+P'(D))^k(\text{eksp } P(D))xR(x)$$

Aplikante (1.22) al la dekstra flanko de (1.26) ni ekhavas (1.25) kun $k+1$ anstataŭ k. Ni do pruvis ke se (1.25) validas por certa pozitiva entjero k, ĝi ankaŭ validas por $k+1$. Ĉar ni pruvis ke ĝi validas por $k=1$, ni konkludas ke ĝi validas por ajna pozitiva entjero k. El (1.25) ni facile devenigas (1.18).

Rearanĝo de (1.22) donas

$$(1.27) \qquad x(\text{eksp } P(D))R(x) = (\text{eksp } P(D))(x-P'(D))R(x)$$

El (1.27) ni povas devenigi la formulon

$$(1.28) \qquad Q(x)(\text{eksp } P(D))R(x) = (\text{eksp } P(D))Q(x-P'(D))R(x)$$

en la sama maniero kiel tiu per kiu ni devenigis (1.18) el (1.22).

2. VEKTORAJ DERIVOPERATOROJ

Ni konsideras vektoran variablon

$$(2.1) \qquad X = [x_1 \; x_2 \ldots \; x_n]$$

kaj ni skribas

$$(2.2) \qquad f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ni signas per $D_{x_j} f(X)$ au $D_j f(X)$ la parcialan derivon de $f(X)$ rilate al x_j. Ni enkondukas la vektoran derivoperatoron

$$(2.3) \qquad D_X = [D_1 \; D_2 \ldots \; D_n]$$

Polinomo en la parcialaj derivoperatoroj

$$(2.4) \qquad P(D_X) = P(D_1, D_2, \ldots, D_n) = \sum_{r_1 \ldots r_k} a_{r_1 \ldots r_k} D_1^{r_1} \ldots D_k^{r_k}$$

estas difinata en la sama maniero kiel polinomo en unu derivoperatoro. La sumo kaj produto de polinomoj estas difinataj en maniero analoga al (1.5) kaj (1.6).

Ni signas per $\int_{R^n}$ integralon tra la tuta reela n-dimensia spaco. Estu

$$(2.5) \qquad R(X) = \int_{R^n} (\text{eksp}(iXY'))r(Y)dY$$

Ni povas difini skalarajn funkciojn de vektora derivoperatoro per

$$(2.6) \qquad P(D_X)R(X) = \int_{R^n} P(iY)(\text{eksp}(iXY'))r(Y)dY$$

(2.7) $$P(D_X)Q(X)R(X) = \int_{R^n} (\text{eksp}(iXY'))P(iY)Q(iD_Y)r(Y)dY$$

Ni unue konsideros formulojn por skalaraj funkcioj de vektoraj derivoperatoroj. La formuloj en sekcio 1 facile povas esti ĝeneraligataj. Ni havas

(2.8) $$P(D_X)Q(X)R(X) = (Q(X+D_{D_X})P(D_X))R(X)$$

(2.9) $$Q(X)P(D_X)R(X) = P(D_X-D_X^*)Q(X)R(X)$$

(2.10) $$P(D_X)(\text{eksp } Q(X))R(X) = (\text{eksp } Q(X))P(D_X+Q'(X))R(X)$$

kie

(2.11) $$Q'(X) = [D_1Q(X)\ D_2Q(X)\ \dots\ D_nQ(X)]$$

(2.12) $$(\text{eksp } Q(X))P(D_X)R(X) = P(D_X-Q'(X))(\text{eksp } Q(X))R(X)$$

En formuloj (2.8)-(2.12), $P(D_X)$ estas polinomo, $R(X)$ estas ajna funkcio kun derivoj de sufiĉe alta ordo, $Q(X)$ estas polinomo en (2.8) kaj (2.9), kaj ajna funkcio kun derivoj de sufiĉe alta ordo en (2.10)-(2.12).

Ni nun konsideros derivoperatorojn difinatajn pere de Fourieraj bildoj

(2.13) $$(\text{eksp } P(D_X))Q(X)R(X) = Q(X+P'(D_X))(\text{eksp } P(D_X))R(X)$$

kie

(2.14) $$P'(D_X) = [D_{D_1}P(D_X)\ D_{D_2}P(D_X)\ \dots\ D_{D_n}P(D_X)]$$

kaj kie la du flankoj de (2.13) estas difinataj pere de (2.5)-(2-7).

(2.15) $$Q(X)(\text{eksp } P(D_X))R(X) = (\text{eksp } P(D_X))Q(X-P'(D_X)R(X)$$

Formuloj (2.8)-(2.10), (2.12), (2.13) kaj (2.15) povas esti pruvataj pere de matematika indukto rilate al la nombro de variabloj.

Se ni en formulo (2.10) metas $P(D_X) = D_{x_j}$ kaj poste reskribas la rezulton en vektora formo ni ekhavas

(2.16) $$D_X(\text{eksp } Q(X))R(X) = (\text{eksp } Q(X))(D_X+Q'(X))R(X)$$

Simile ni havas

Simile ni havas

$$(2.17)\qquad (\text{eksp}\ Q(X))D_X R(X) = (D_X - Q'(X))(\text{eksp}\ Q(X))R(X)$$

$$(2.18)\qquad (\text{eksp}\ P(D_X))XR(X) = (X+P'(D_X))(\text{eksp}\ P(D_X))R(X)$$

$$(2.19)\qquad X(\text{eksp}\ P(D_X))R(X) = (\text{eksp}\ P(D_X))(X-P'(D_X))R(X)$$

La regulo pri la derivo de funkcifunkcio validas ankaŭ por vektoraj derivoperatoroj

$$(2.20)\qquad D_X f(g(X)) = f'(g(X))D_X g(X)$$

Oni facile pruvas la sekvantajn formulojn:

$$(2.21)\qquad D_X BX' = B$$

kie B estas konstanta vektoro kun n elementoj kaj X' estas la transpozo de X.

$$(2.22)\qquad D_X(XAX') = X(A+A')$$

kie A estas konstanta $(n\times n)$-matrico

$$(2,23)\qquad D_X'X = (X'D_X)'+I$$

kie I estas la matricunito. $X'D_X$ estas matrico kun la elemento $x_k D_{x_j}$ en la k-a horizontalo kaj la j-a vertikalo. $(X'D_X)'$ estas matrico kun $x_k D_{x_j}$ en la j-a horizontalo kaj la k-a vertikalo.

3. MATRICAJ DERIVOPERATOROJ

Estu X kvadrata $(n\times n)$-matrico. La matrico de la respondaj derivoperatoroj $D_{x_{jk}}$ estas skribata D_X.

Formuloj (2.4)-(2.20) validas ankaŭ kiam X, Y, D_X, D_Y estas matricoj.

Ni diras ke kvadrata variabla matrico X estas nesimetria se ne ekzistas iu dependeco inter ĝiaj elementoj. Ni diras ke kvadrata matrico estas simetria se $x_{jk} = x_{kj}$ por ĉiu j kaj ĉiu k, dum ne ekzistas iu dependeco inter la variabloj x_{jk} kiam $j < k$.

Kiam X estas nesimetria kvadrata matrico ni havas la jenajn formulojn

(3.1) $D_X X = (X' D_X')' + I$

(3.2) $D_X tr(AX) = D_X tr(XA) = A'$

kie $tr(AX)$ signifas la tracon de AX.

(3.3) $D_X(\det X) = \text{kof } X$

kie $\det X$ signas la determinanton de X kaj $\text{kof } X$ signas la matricon de kofaktoroj de la elementoj de X.

(3.4) $D_X(\log \det X) = (X')^{-1}$

kie la dekstra flanko signifas la inverson de la transpozo de X.

Kiam X estas kvadrata matrico ni enkondukas la simbolon "diag X" por la diagonala matrico kies diagonalo estas la sama kiel la diagonalo de X.

Kiam X estas simetria ni havas la jenajn formulojn

(3.5) $D_X X = (X D_X)' + nI$

kie n estas la ordo de la kvadrataj matricoj X kaj D_X.

(3.6) $(\text{diag } D_X)X = (X(\text{diag } D_X))' + I$

(3.7) $D_X tr(AX) = A + A' - \text{diag } A$

(3.8) $(\text{diag } D_X) tr(AX) = \text{diag } A$

(3.9) $(D_X + \text{diag } D_X) tr(AX) = A + A'$

(3.10) $D_X \det X = 2 \text{ kof } X - \text{diag kof } X$

(3.11) $(\text{diag } D_X) \det X = \text{diag kof } X$

(3.12) $(D_X + \text{diag } D_X) \det X = 2 \text{ kof } X$

(3.13) $D_X \log \det X = 2X^{-1} - \text{diag}(X^{-1})$

(3.14) $(\text{diag } D_X) \log \det X = \text{diag}(X^{-1})$

(3.15) $(D_X + \text{diag } D_X) \log \det X = 2X^{-1}$

(3.16) $D_X(BXB') = 2B'B - \text{diag}(B'B)$

kie B estas konstanta vektoro

(3.17) $(D_X + \text{diag } D_X)(BXB') = 2B'B$

La pruvoj de ĉi ĉiuj formuloj estas simplaj. Formuloj (3.2) kaj (3.4) troviĝas en Graham (1982), sekcio 5.4, sed ne kun la plej simplaj pruvoj. Formulo(3.10) troviĝas en Graham (1981), sekcio 4.4.

4. LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE UNUVARIABLA GAUSSA DISTRIBUO

Ni konsideru Gaussan distribuon kun la probablodenso

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{eksp}\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{4.1}$$

La karakteriza funkcio laŭ difino estas

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{eksp}(ixt))f(x)dx \tag{4.2}$$

Derivante la logaritmon de $f(x)$ ni ekhavas la diferencialan ekvacion

$$(D_x+x)f(x) = 0 \tag{4.3}$$

Antaŭmultiplikante (4.3) per eksp(ixt), kaj notante ke laŭ (1.17)

$$(\operatorname{eksp}(ixt))D_x f(x) = (D_x-it)(\operatorname{eksp}(ixt))f(x) \tag{4.4}$$

kaj ke

$$D_t \operatorname{eksp}(ixt) = ix.\operatorname{eksp}(ixt) \tag{4.5}$$

ni ekhavas

$$(D_x-it-iD_t)(\operatorname{eksp}(ixt))f(x) = 0. \tag{4.6}$$

Ni integralas (4.6) inter $-\infty$ kaj ∞. La malderivo de la unua termo en (4.6) estas $(\operatorname{eksp}(ixt))f(x)$ kiu estas nula kiam $x = \pm\infty$. Sekve la integralo de la unua termo estas nula. La rezulto de la integralado de (4.6) do estas

$$(D_t+t)\phi(t) = 0 \tag{4.7}$$

kiu havas la solvon

$$\text{konst.}\operatorname{eksp}\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

La kondiĉo ke $\phi(0) = 1$ montras ke la konstanto estas 1, tiel ke

$$(4.8) \qquad \phi(t) = \mathrm{eksp}(-\tfrac{1}{2}t^2)$$

5. LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE LA ĤI-KVADRATA DISTRIBUO, UNUA METODO

La ĥikvadrata distribuo estas la distribuo de la kvadratsumo

$$(5.1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

kie ĉiu x_j havas Gaussan distribuon kun ekspekto 0 kaj varianco 1. Estu $\phi(u)$ la karakteriza funkcio de la distribuo de (5.1). Ni havas

$$(5.2) \qquad \phi(u) = (\phi_1(u))^n$$

kie $\phi_1(u)$ estas la karakteriza funkcio de x^2 kiam x havas Gaussan distribuon kun la probablodenso (4.1). Por trovi diferencialan ekvacion por $\phi_1(u)$, ni unue serĉos diferencialan ekvacion por la karakteriza funkcio $\phi_2(t,u)$ de la kuna distribuo de x kaj x^2. Laŭ difino tiu karakteriza funkcio estas

$$(5.3) \qquad \phi_2(t,u) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{eksp}(ixt+ix^2u))f(x)dx$$

kie $f(x)$ estas donita per (4.1). Antaŭmultiplikante (4.3) per $\mathrm{eksp}(ixt+ix^2u)$, notante ke laŭ (1.17)

$$(5.4) \qquad \begin{cases} (\mathrm{eksp}(ixt+ix^2u))D_x f(x) = \\ \\ (D_x-it-2ixu)(\mathrm{eksp}(ixt+ix^2u))f(x) \end{cases}$$

kaj ke

$$(5.5) \qquad D_t(\mathrm{eksp}(ixt+ix^2u)) = ix(\mathrm{eksp}(ixt+ix^2u))$$

ni ekhavas

$$(5.6) \qquad (D_x-it-i(1-2iu)D_t)(\mathrm{eksp}(ixt+ix^2u))f(x) = 0$$

Integralante (5.6) inter $-\infty$ kaj ∞, ni notas ke la malderivo de la unua termo estas $(\mathrm{eksp}(ixt+ix^2u))f(x)$, kiu estas nula kiam $x = -\infty$ kaj kiam $x = \infty$. Sekve la integralo de la unua termo estas nula, kaj la rezulto de la integralado estas

(5.7) $((1-2iu)D_t+t)\phi_2(t,u) = 0$

Antaŭmultipliko de (5.7) per D_t donas

(5.8) $((1-2iu)D_t^2+tD_t+1)\phi_2(t,u) = 0$

Rigardante (5.3) ni vidas ke

(5.9) $D_t^2\phi_2(t,u) = iD_u\phi_2(t,u)$

Enmetante ĉi tion en (5.8) ni ekhavas

(5.10) $((1-2iu)D_u-itD-i)\phi_2(t,u) = 0$

Ni vidas ke $\phi_1(u) = \phi_2(0,u)$. Metante $t=0$ en (5.10) ni do ricevas

(5.11) $((1-2iu)D_u-i)\phi_1(u) = 0$

kiu povas esti reskribata

(5.12) $(1-2iu)D_u \log \phi_1(u) = i$

Enmetante en (5.12)

$$\log \phi_1(u) = \frac{1}{n} \log \phi(u)$$

ni ricevas

(5.13) $(1-2iu)D_u \log \phi(u) = ni$

kiu povas esti reskribata en la formo

(5.14) $((1-2iu)D_u-ni)\phi(u) = 0$

La diferenciala ekvacio (5.12) donas la solvon

(5.15) $\phi(u) = (1-2iu)^{-n/2}$

6. LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE LA ĤIKVADRATA DISTRIBUO, DUA METODO

Komparante la karakterizajn funkciojn (4.2) kaj (5.3) kaj uzante formulon (1.11), ni vidas ke

(6.1) $\phi_2(t,u) = (\mathrm{eksp}(-iD_t^2u))\phi_3(t)$

kie ni nun uzas $\phi_3(t)$ por la karakteriza funkcio (4.2). Ni reskribas la diferencialan ekvacion (4.7)

(6.2) $(D_t+t)\phi_3(t) = 0$

Antaŭmultiplikante (6.2) per $\text{eksp}(-iD_t^2u)$ kaj notante ke laŭ (1.18)

$$(6.3) \qquad (\text{eksp}(-iD_t^2u))t\phi_3(t) = (t-2iuD_t)(\text{eksp}(-iD_t^2u))\phi_3(t)$$

ni ekhavas denove ekvacion (5.7).

7. LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE LA ĤIKVADRATA DISTRIBUO, TRIA METODO

La probablodenso $g_1(z)$ de $z=x^2$, kie x havas la probablodenson (4.1), estas trovata pere de la formulo

$$(7.1) \qquad g_1(z) = 2f(x)|D_zx|$$

kie la faktoro 2 devenas de tio ke al ciu z respondas unu pozitiva kaj unu negativa valoro de x. Ni ricevas

$$(7.2) \qquad g_1(z) = \text{konst}\cdot(\text{eksp}(-\tfrac{z}{2}))z^{-\frac{1}{2}}$$

La funkcio $g_1(z)$ verigas la diferencialan ekvacion

$$(7.3) \qquad (2zD_z+z+1)g_1(z) = 0$$

kiu povas esti reskribata en la formo

$$(7.4) \qquad (2D_zz+z-1)g_1(z) = 0$$

Antaŭmultiplikante (7.4) per $\text{eksp}(izu)$ kaj notante ke laŭ (1.17)

$$(7.5) \qquad (\text{eksp}(izu))D_zzg_1(z) = (D_z-iu)(\text{eksp}(izu))zg_1(z)$$

kaj ke

$$(7.6) \qquad D_u(\text{eksp}(izu)) = iz(\text{eksp}(izu))$$

ni ricevas

$$(7.7) \qquad (2D_zz-i(1-2iu)D_u-1)(\text{eksp}(izu))g_1(z) = 0$$

Integralante (7.7) inter 0 kaj ∞ ni vidas ke la malderivo de la unua termo estas

$$(7.8) \qquad 2(\text{eksp}(izu))(\text{eksp}(-\tfrac{z}{2}))z^{\frac{1}{2}}$$

kiu egalas al 0 kiam $z=0$ kaj kiam $z=\infty$. Sekve la integralo de la unua termo estas nula. Ni vidas ke la integralado de (7.7) denove donas la ekvacion (5.11).

Ĉi tiu metodo ests la plej simpla metodo por trovi la karakterizan funkcion de la ĥikvadrata distribuo. Sed la du unuaj metodoj havas la avantaĝon ke ili povas esti uzataj por plurvariablaj distribuoj. Krome ili povas doni la karakterizan funkcion de la kuna distribuo de la samplaj sumo kaj kvadratsumo, kaj de tio oni povas veni al la karakteriza funkcio de la kuna distribuo de la samplaj aritmo kaj varianco.

8. TRANSIRO DE LA KARAKTERIZA FUNKCIO AL LA PROBABLODENSO DE LA ĤIKVADRATA DISTRIBUO

Estu $g(z)$ la probablodenso de la ĥikvadrata distribuo. Tiam

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(izu))g(z)dz \tag{8.1}$$

Inverse ni havas

$$g(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \text{eksp}(-izu)\phi(u)du \tag{8.2}$$

(vidu ekzemple Cramer (1945), sekcio 10.3).
$\phi(u)$ verigas la diferencialan ekvacion (5.14). Ni reskribas tiun ekvacion en la formo

$$(D_u(1-2iu)-(n-2)i)\phi(u) = 0 \tag{8.3}$$

Antaŭmultiplikante (8.3) per $\text{eksp}(-iuz)$ kaj notante ke laŭ (1.17)

$$(\text{eksp}(-iuz))D_u\phi(u) = (D_u+iz)(\text{eksp}(-iuz))\phi(u) \tag{8.4}$$

kaj ke

$$D_z\text{eksp}(-iuz) = -iu(\text{eksp}(-iuz)) \tag{8.5}$$

ni ekhavas

$$(D_u(1-2iu)+2iz\ D_z+iz-(n-2)i)(\text{eksp}(-iuz))\phi(u) = 0 \tag{8.6}$$

Integralante (8.6) inter $-\infty$ kaj ∞, kaj dividante per 2π, ni notas ke la malderivo de la unua termo estas

$$(\text{eksp}(-iuz))(1-2iu)^{-((n-2)/2)} \tag{8.7}$$

Kiam $n > 3$, (8.7) estas nula kiam $x = -\infty$ kaj kiam $x = \infty$. Sekve la responda integralo estas nula kiam $n > 3$, kaj la integralado donas la rezulton

(8.8) $(2zD_z+z-(n-2))g(z) = 0$

kiu donas la solvon

(8.9) $g(z) = \text{konst}\cdot(\text{eksp}(-z/2))z^{(n-2)/2}$

Laŭ difino z estas pozitivala. Sekve $g(z) = 0$ kiam z estas negativa. La formulo (8.9) validas por pozitivala z.

Ni sukcesis pruvi ĉi tion por $n > 3$. Ke ĝi validas por ajna pozitiva entjero n, ni povas pruvi per transiro de la diferenciala ekvacio (8.8) al la diferenciala ekvacio (5.14). Tiun transiron ni faros en sekcio 9.

9. TRANSIRO DE LA PROBABLODENSO AL LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE LA ĤIKVADRATA DISTRIBUO

Ni eliras de la diferenciala ekvacio (8.8) de la probablodenso de la ĥikvadrata distribuo. Ni reskribas ĝin en la formo

(9.1) $(2D_z z+z-n)g(z) = 0$

La karakteriza funkcio de $g(z)$ estas

(9.2) $\phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{eksp}(izu))g(z)dz$

Antaŭmultiplikante (9.1) per $\text{eksp}(izu)$, notante ke laŭ (1.17)

(9.3) $(\text{eksp}(izu))D_z zg(z) = (D_z-iu)(\text{eksp}(izu))zg(z)$

kaj ke

(9.4) $D_u(\text{eksp}(izu)) = iz(\text{eksp}(izu))$

ni ekhavas

(9.5) $(2D_z z-i(1-2iu)D_u-n)(\text{eksp}(izu))g(z) = 0$

Ni integralas (9.5) inter 0 kaj ∞. La malderivo de la unua termo estas

(9.6) $2(\text{eksp}(-(z/2)))z^{n/2}$

kiu estas nula kiam $z = 0$ kaj kiam $z = \infty$ por ajna pozitiva entjero n. Sekve la integralo de la unua termo estas nula, kaj la integralado de (9.5) donas

(9.7) $((1-2iu)D_u - ni)\phi(u) = 0$

kaj tiu ekvacio estas la sama kiel la diferencialekvacio (5.14) de la karakteriza funkcio de la ĥikvadrata distribuo. Ni do pruvis ke por ĉiu pozitiva entjero n, la probablodenso (8.9) havas la karakterizan funkcion (5.15). Ĉar la probablodenso estas unike determinata per la karakteriza funkcio, ni pruvis ke la funkcio (8.9) estas la probablodenso de la ĥikvadrata distribuo por ĉiu pozitiva entjero n.

10. LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE PLURVARIABLA GAUSSA DISTRIBUO

Estu X p-dimensia stokasta vektoro kun probablodenso

(10.1) $f(X) = \text{konst}\cdot\text{eksp}(-\frac{1}{2}XAX')$

kie A estas konstanta, simetria, pozitivajgena matrico de ordo p. Derivante la logaritmon de (10.1) rilate al X, kaj uzante formulon (2.22), ni ricevas la diferencialan ekvacion

(10.2) $(D_X + XA)f(X) = 0$

La karakteriza funkcio de (10.1) estas

(10.3) $\phi(T) = \int_{R^p} (\text{eksp}(iXT')f(X)dX$

kie la integralo estas tra la tuta p-dimensia reela spaco R^p. Antaŭmultiplikante (10.2) per $\text{eksp}(iXT')$ kaj notante ke laŭ (2.17) kaj (2.21) ni havas

(10.4) $(\text{eksp}(iXT'))D_X f(X) = (D_X - iT)(\text{eksp}(iXT'))f(X)$

ni ricevas

(10.5) $(D_X - iT + XA)(\text{eksp}(iXT'))f(X) = 0$

La absoluta valoro de la funkcio

(10.6) $(iT-XA)(\text{eksp}(iXT'))f(X)$

malplialas al

(10.7) $\text{konst}\cdot((\text{abs } T) + (\text{abs } X)(\text{abs } A))(\text{eksp}(-\frac{1}{2} XAX'))$

kie (abs T) signifas vektoron kies elementoj estas la absolutaj valoroj de la elementoj de T, kaj (abs A) signifas matricon kies elementoj ests la absolutaj valoroj de la elementoj de A. La funkcio (10.7) havas finian integralon, ĉar ĝi konverĝas eksponenciale al nul kiam unu aŭ pluraj x_j kreskas senfine. El (10.5) sekvas ke ankaŭ la absoluta valoro de

(10.8) $D_X(\text{eksp}(iXT'))f(X)$

malplialas al (10.7). Sekve ni povas trovi la integralon de (10.8) per iteracia integralado rilate al la unuopaj variabloj en ajna vicordo. Ni konsideras unu elementon

(10.9) $D_{x_j}(\text{eksp}(iXT'))f(X)$

de la vektoro (10.8). Ni povas integrali unue rilate al x_j. La malderivo de (10.9) rilate al x_j estas

(10.10) $(\text{eksp}(iXT'))f(X)$

kiu estas nula kiam $x_j = -\infty$ kaj kiam $x_j = \infty$. Sekve la integralo de (10.8) tra la regiono R^p estas nula. Laŭ (2.20) kaj (2.21) ni havas

(10.11) $D_T(\text{eksp}(iXT')) = iX(\text{eksp}(iXT'))$

Enmeto de (10.11) en (10.5) donas

(10.12) $(D_X-iT-iD_TA)(\text{eksp}(iXT'))f(X) = 0$

Ni konsideras la integralon de (10.12) tra la spaco R^p. Ni jam trovis ke la integralo de la unua termo estas nula. La rezulto de la integralado estas

(10.13) $(D_T+A)\phi(T) = 0$

Postmultipliko de (10.13) per A^{-1} donas

(10.14) $(D_T+TA^{-1})\phi(T) = 0$

Komparante ekvaciojn (10.2) kaj (10.14) ni notas ke ni ricevas (10.14) el (10.2) anstataŭigante X, D_X, A, f per T, D_T, A^{-1}, ϕ. Farante la saman interŝanĝon en formulo (10.1), ni trovas ke

(10.15) $\phi(T) = \text{eksp}(-\frac{1}{2}TA^{-1}T')$

11. LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE LA WISHARTA DISTRIBUO, UNUA METODO

Estu $X_1,X_2,\ldots,X_n$ aleatora samplo el Gaussa distribuo kun la probablodenso (10.1). Tio signifas ke $X_1,X_2,\ldots,X_n$ estas stokaste sendependaj stokastaj vektoroj kun la sama Gaussa probablodenso (10.1). La Wisharta distribuo estas la distribuo de la matrico

(11.1) $Z = \sum_{j=1}^{n} X_j'X_j$

La karakteriza funkcio $\phi(U)$ de ĉi tiu distribuo estas la n-a potenco de la karakteriza funkcio $\phi_1(U)$ de $X'X$ kie X havas la probablodenson (10.1). Por trovi diferencialan ekvacion de $\phi_1(U)$, ni unue serĉos diferencialan ekvacion de la karakteriza funkcio de la kuna distribuo de X kaj XX'. Tiu karakteriza funkcio estas

(11.2) $\phi_2(T,U) = \int_{R^p} (\text{eksp}(iXT'+iXUX')f(X)dX$

kie U estas simetria matrico, kaj kie la integralado estas tra la tuta p-dimensia reela spaco R^p.

Ni eliras el la diferenciala ekvacio (10.2) kiun ni antaŭmultiplikas per $\text{eksp}(iXT'+iXUX')$ kaj ricevas

(11.3) $(\text{eksp}(iXT'+iXUX'))(D_X+XA)f(X) = 0$

Uzante (2.17), (2.21) kaj (2.22) ni trovas ke

(11.4) $\begin{cases} (\text{eksp}(iXT'+iXUX'))D_Xf(X) = \\ (D_X-iT-2iXU)(\text{eksp}(iXT'+iXUX'))f(X) \end{cases}$

kaj uzo de (2.20) kaj (2.21) donas

(11.5) $D_T \text{eksp}(iXT'+iXUX') = iX(\text{eksp}(iXT'+iXUX'))$

Enmeto de (11.4) kaj (11.5) en (11.3) donas

(11.6) $(D_X - iT - 2D_T U - iD_T A)(\text{eksp}(iXT'+iXUX'))f(X) = 0$

Ni integralas tra la spaco R^p. Kiel en sekcio 10 ni trovas ke la integralo de la unua termo estas nula, kaj la rezulto de la integralado estas

(11.7) $(D_T(A-2iU)+T)\phi_2(T,U) = 0$

Ni antaŭmultiplikas (11.7) per D_T', uzas formulon (2.23), transpozas ĉiujn termojn kaj ekhavas

(11.8) $((A-2iU)D_T'D_T+T'D_T+I)\phi_2(T,U) = 0$

Aplikante (2.20), (2.21) kaj (3.17) al (11.2) ni ekhavas

(11.9) $2D_T'D_T\phi_2(T,U) = i(D_U+\text{diag } D_U)\phi_2(T,U)$

Enmeto de (11.9) en (11.8) donas

(11.10) $((A-2iU)(D_U+\text{diag } D_U)-2iT'D_T-2iI)\phi_2(T,U) = 0$

Metante $T = 0$ en (11.10) ni ekhavas

(11.11) $((A-2iU)(D_U+\text{diag } D_U)-2iI)\phi_1(U) = 0$

Metante $\phi_1(U) = (\phi(U))^{1/n}$ en (10.11) kaj multiplikante per $n(\phi(U))^{1-(1/n)}$ ni ekhavas

(11.12) $((A-2iU)(D_U+\text{diag } D_U)-2nI)\phi(U) = 0$

kiu povas esti reskribata jene

(11.13) $(D_U+\text{diag } D_U)\log \phi(U) = 2ni(A-2iU)^{-1}$

Uzante formulon (3.15) ni vidas ke

(11.14) $\log \phi(U) = -\frac{n}{2} \log \det(A-2iU) + \text{konst.}$

Metante $U = 0$ en (11.14) ni vidas ke la konstanto ests $\frac{n}{2} \log \det A$. Tio donas la jenan karakterizan funkcion

(11.15) $\phi(U) = (\det A)^{n/2}(\det(A-2iU))^{-(n/2)}$

12. LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE LA WISHARTA DISTRIBUO, DUA METODO

Ni eliras el la karakteriza funkcio (10.15) de la plurvariable Gaussa distribuo kaj ties diferenciala ekvacio (10.13). Ni nun signas tiun karakterizan funkcion per $\phi_3(T)$. Komparante (10.3) kaj (11.2) kaj uzante la difinon (2.6) ni vidas ke

(12.1) $\phi_2(T,U) = (\text{eksp } P(D_T))\phi_3(T)$

kie

(12.2) $P(iX) = iXUX'$

El (12.2) sekvas ke

(12.3) $P(D_T) = -iD_TUD_T'$

Antaŭmultipliko de ekvacio (10.13) per $\text{eksp}(-iD_TUD_T')$ donas

(12.4) $(\text{eksp}(-iD_TUD_T'))(D_TA+T)\phi_3(T) = 0$

Uzo de formuloj (2.13) kaj (2.22) donas

(12.5) $\text{eksp}(-iD_TUD_T')T\phi_3(T) = (T-2iD_TU)(\text{eksp}(-iD_TUD_T'))$

Kombino de formuloj (12.1), (12.3), (12.4) kaj (12.5) donas

(12.6) $(D_T(A-2iU)+T)\phi_2(T,U) = 0$

Ni do retrovis (11.7)

13. TRANSIRO DE LA KARAKTERIZA FUNKCIO AL LA PROBABLODENSO DE LA WISHARTA DISTRIBUO

Estu $\phi(T)$ la karakteriza funkcio de la probablodenso $f(X)$, kie X kaj T estas vektoroj kun n elementoj. Se la absoluta valoro de ϕ havas finian integralon, ni havas la formulon

(13.1) $f(X) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \text{eksp}(-iXT')\phi(T)dT$

(Vidu ekzemple Cramer (1945), sekcio 10.6.) XT' estas la produtsumo de interrespondaj elementoj de X kaj T.

Estu $g(Z)$ la probablodenso de la Wisharta distribuo, $\phi(U)$ la karakteriza funkcio. Nun Z kaj U ne estas vektoroj, sed matricoj. La produtsumo de interrespondaj elementoj de Z kaj U estas la traco de la produto ZU. Ni nun havas

$$(13.2) \qquad \phi(U) = \int_{R^q} (\text{eksp } i \cdot \text{tr}(ZU))g(Z)dZ$$

kaj

$$(13.3) \qquad g(Z) = (2\pi)^{-q} \int_{R^q} (\text{eksp}(-i(\text{tr } ZU))\phi(U)dU$$

kie $q = (p(p+1))/2$ estas la nombro de dimensioj de la Z-spaco kaj la U-spaco.

Ni eliras el la diferenciala ekvacio (11.12), kiu pere de formuloj (3.5) kaj (3.6) povas esti reskribata jene

$$(13.4) \qquad ((D_U+\text{diag}(D_U))(A-2iU) - 2i(n-p-1)I)\phi(U) = 0$$

Laŭ formuloj (2.17) kaj (3.9) ni havas

$$(13.5) \qquad \begin{cases} (\text{eksp}(-i(\text{tr } ZU)))(D_U+\text{diag}(D_U))\phi(U) \\ = (D_U+\text{diag}(D_U)+2iZ)(\text{eksp}(-i(\text{tr } ZU)))\phi(U) \end{cases}$$

Antaŭmultiplikante (13.4) per $\text{eksp}(-i(\text{tr } ZU))$ kaj uzante (13.5) ni ekhavas

$$(13.6) \qquad \begin{cases} ((D_U+\text{diag}(D_U))(A-2iU) + 2iZ(A-2iU) - 2i(n-p-1)I) \\ \cdot(\text{eksp}(-i(\text{tr } ZU)))\phi(U) = 0 \end{cases}$$

Laŭ formuloj (2.20) kaj (3.9)

$$(13.7) \qquad (D_Z+\text{diag}(D_Z))(\text{eksp}(-i(\text{tr } ZU))) = -2iU(\text{eksp}(-i(\text{tr } ZU)))$$

Formuloj (13.6) kaj (13.7) donas

$$(13.8) \qquad \begin{cases} (D_U+\text{diag}(D_U))(A+D_Z+\text{diag}(D_Z)) + 2iZ(A+D_Z+\text{diag}(D_Z)) \\ - 2i(n-p-1)I)(\text{eksp}(-i(\text{tr } ZU)))\phi(U) = 0 \end{cases}$$

Konsiderante la analogion kun la unuvariabla kazo, estas nature konjekti ke por sufiĉe granda n, estas nula la integralo tra R^q de la termo kies unua faktoro estas $D_U+\text{diag}(D_U)$. Mi ne sukcesis pruvi tiun konjekton, sed mi daŭrigos la kalkuladon sub la supozo ke la konjekto estas ĝusta. Sub tiu supozo le rezulto de integralado de (13.8) tra la spaco R^q estas

(13.9) $\qquad (Z(A+D_Z+\mathrm{diag}(D_Z))-(n-p-1)I)g(Z) = 0$

kiu povas esti reskribata jene

(13.10) $\qquad (D_Z+\mathrm{diag}(D_Z))\log g(Z) = (n-p-1)Z^{-1}-A$

Uzante (3.9) kaj (3.15) ni trovas

(13.11) $\qquad \log g(Z) = \frac{1}{2}(n-p-1)\log \det Z-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AZ)+\mathrm{konst.}$

(13.12) $\qquad g(Z) = \mathrm{konst}\cdot(\det Z)^{(n-p-1)/2}\ \mathrm{eksp}(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AZ))$

La matrico Z estas pozitivalajgena. La probablodenso de Z sekve devas esti nula ekster la regiono R^* en la Z-spaco kie Z estas pozitivalajgena. La demando nun estas: Ĉu la probablodenso de Z en la regiono R^* estas la funkcio (13.12)? Ni ne pruvis tion, ĉar ni bazis nian kalkulon sur nepruvita konjekto. Por esplori ĉu la funkcio (13.12) estas la probablodenso de la Wisharta distribuo, ni povas fari transiron en la mala direkto, de la diferenciala ekvacio (13.10) al la diferenciala ekvacio de la karakteriza funkcio. Tiun transiron ni faros en sekcio 14.

14. TRANSIRO DE LA PROBABLODENSO AL LA KARAKTERIZA FUNKCIO DE LA WISHARTA DISTRIBUO

Ni signas per R^* la regionon en la Z-spaco kie Z estas pozitivalajgena. Ni konsideros la probablodenson $g(Z)$ al kiu ni alvenis en la fino de la antaŭa sekcio.

(14.1) $\qquad \begin{cases} g(Z) = \mathrm{konst.}(\det Z)^{(n-p-1)/2}\ \mathrm{eksp}(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(AZ) \\ \text{kiam } Z \text{ estas en la regiono } R^* \end{cases}$

(14.2) $\qquad g(Z) = 0 \quad \text{ekster la regiono } R^*$

Ni pruvos ke, kiam $n > p+1$, la probablodenso $g(Z)$ difinata per (14.1) kaj (14.2) havas la karakterizan funkcion (11.15), kiu estas la karakteriza funkcio de la Wisharta distribuo. Ĉar la probablodenso estas unike determinata de la karakteriza funkcio, ni per tio pruvos ke $g(Z)$ difinita per (14.1) kaj (14.2) estas la probablodenso de la Wisharta distribuo.

Ni pruvos ke la regiono R^* estas konveksa regiono. Estu Z_1 kaj Z_2 du punktoj en la regiono R^*. Por ajna reela vektoro B kun p komponantoj ni do havas

$$(14.3) \qquad BZ_1B' > 0 \quad \text{kaj} \quad BZ_2B' > 0$$

Sekvas ke por ajna λ en la kloza intervalo $[0,1]$ ni havas

$$(14.4) \qquad B(\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2)B' > 0$$

por ajna reela vektoro B. Tio montras ke $\lambda Z+(1-\lambda)Z_2$ estas en R^*, sekve R^* estas konveksa regiono.

Ni konsideru rekton L sur kiu ĉiuj koordinatoj, kun escepto de z_{jk} (kie $j \neq k$), estas konstantaj. Ni supozu ke L tranĉas la regionon R^*. Car R^* estas konveksa regiono, la parto de L kiu troviĝas en R^* devas esti intervalo. Ni signas la intervalon per S. En la intervalo S ĉiuj ajgenoj de Z estas pozitivalaj, kaj sur la linio L ekster la intervalo S, minimume unu ajgeno de Z estas negativa. En finpunkto de S, minimume unu ajgeno ŝanĝiĝas de pozitivala valoro al negativa valoro, kaj ĉar ĉiu ajgeno estas kontinua funkcio de la elementoj de Z, devas esti minimume unu ajgeno kiu estas nula en finpunkto de S. Car la determinanto de Z egalas al la produto de la ajgenoj de Z, det Z estas nula en ambaŭ finpunktoj de S. El tio sekvas ke kiam $n > p+1$, $g(Z) = 0$ en ambaŭ finpunktoj de S.

Simile, se ĉiuj koordinatoj kun escepto de z_{kk}, estas konstantaj sur rekto L, kaj se tiu rekto tranĉas la regionon R^*, la parto S de la rekto L kiu troviĝas en R^* estas senfina intervalo kiu iras de pozitivala valoro de z_{kk} al $z_{kk} = \infty$. Ĉe la finpunkto kie z_{kk} estas finia, ni denove trovas ke $g(Z)$ estas nula, kaj ni trovas ke $g(Z)$ konverĝas al nul kiam z_{kk} kreskas senfine pro la eksponenciala faktoro.

Ni nun konsideros la specialan kazon kiam $A = I$, Tiam

$$(14.5) \qquad g(Z) = \text{konst}\cdot(\det Z)^{(n-p-1)/2}\ \text{eksp}(-\tfrac{1}{2}\text{tr } Z)$$

kiu verigas la diferencialan ekvacion

(14.6) $(Z(I+D_Z+\mathrm{diag}(D_Z)) - (n-p-1)I)g(Z) = 0$

Uzante (3.5) kaj (3.6) ni povas reskribi (14.6) jene

(14.7) $((D_Z+\mathrm{diag}(D_Z))Z+Z-nI)g(Z) = 0$

Antaŭmultiplikante (14.7) per $\mathrm{eksp}(i(\mathrm{tr}\ ZU))$ kaj notante ke laŭ (2.17) kaj (3.9)

(14.8) $$\begin{cases}(\mathrm{eksp}(i(\mathrm{tr}\ ZU)))(D_Z+\mathrm{diag}(D_Z))g(Z) \\ = (D_Z+\mathrm{diag}(D_Z)-2iU)(\mathrm{eksp}(i(\mathrm{tr}\ ZU)))g(Z)\end{cases}$$

ni ekhavas

(14.9) $((D_Z+\mathrm{diag}(D_Z))Z-2iUZ+Z-nI)(\mathrm{eksp}(i(\mathrm{tr}\ ZU)))g(Z)$

La karakteriza funkcio de la probablodenso $g(Z)$ estas

(14.10) $\phi(U) = \int_{R^*} (\mathrm{eksp}(i(\mathrm{tr}\ ZU)))g(Z)dZ$

En la sama maniero kiel en sekcio 10 ni trovas ke en la integralo

(14.11) $\int_{R^*} (D_Z+\mathrm{diag}(D_Z))Z(\mathrm{eksp}(i(\mathrm{tr}\ ZU)))g(Z)dZ$

ni povas integrali iteracie rilate al la unuopaj variabloj en ajna vicordo. La integrato en (14.11) estas matrico, ĉiu el kies elementoj reprezentas derivon rilate al unu z_{jk}. En tiu elemento ni povas integrali unue rilate al la koncerna z_{jk}. La malderivo rilate al z_{jk} estas

(14.12) $Z(\mathrm{eksp}(i(\mathrm{tr}\ ZU)))g(Z)$

kiu estas nula ĉe ambaŭ finoj de la intervalo de integralado kiam $j \neq k$. Kiam $j=k$, (14.12) estas nula en la finpunkto de la intervalo de integra-lado kie z_{kk} estas finia, kaj konverĝas al 0 kiam $z_{kk} \to \infty$. Sekve la integralo (14.11) estas nula.

Laŭ (2.20) kaj (3.9)

(14.13) $(D_U+\mathrm{diag}(D_U))(\mathrm{eksp}(i\cdot\mathrm{tr}(ZU))) = 2iZ(\mathrm{eksp}(i\cdot(\mathrm{tr}\ ZU)))$

kiu kune kun (14.9) donas

$$(14.14)\quad \begin{cases} (2(D_Z+\mathrm{diag}(D_Z))Z-i(I-2iU)(D_U+\mathrm{diag}(D_U))-2nI) \\ \cdot(\mathrm{eksp}(i(\mathrm{tr}\ ZU)))g(Z) = 0 \end{cases}$$

Ni nun estigas la integralon de (14.14) tra la spaco R^*. Ni jam notis ke la integralo kies integrato enhavas la faktoron $(D_Z+\mathrm{diag}(D_Z))$ estas nula. La rezulto de la integralado fariĝas

$$(14.15)\quad ((I-2iU)(D_U+\mathrm{diag}(D_U))-2niI)\phi(U) = 0$$

kiu donas la karakterizan funkcion

$$(14.16)\quad \phi(U) = (\det(I-2iU))^{-n/2}$$

Ni nun transiru al la ĝenerala kazo kiam Z havas la probablodenson (14.1)-(14.2). Ĉar la matrico A estas pozitivaj̃gena, ekzistas matrico C tia ke

$$(14.17)\quad CAC' = I$$

el kio sekvas ke

$$(14.18)\quad A = C^{-1}(C')^{-1} = (C'C)^{-1}$$

Ni enkondukas novan stokastan variablon Z^* per

$$(14.19)\quad Z = C'Z^*C$$

Ni notas ke

$$(14.20)\quad \mathrm{tr}(AZ) = \mathrm{tr}(AC'Z^*C) = \mathrm{tr}(CAC'Z^*) = \mathrm{tr}(Z^*)$$

$$(14.21)\quad \det Z = \det(C'Z^*C) = \mathrm{konst}\cdot(\det Z^*)$$

Ĉi tio montras ke Z^* havas la probablodenson (14.5), kaj sekve la karakterizan funkcion (14.16). La karakteriza funkcio de Z estas

$$(14.22)\quad E(i(\mathrm{tr}\ ZU)) = E(i(\mathrm{tr}(C'Z^*CU))) = E(i(\mathrm{tr}(Z^*CUC')))$$

Ĉi tio montras ke ni ricevos la karakterizan funkcion de Z farante la anstataŭigon

$$(14.23)\quad U \to CUC'$$

kiu implicas la anstataŭigon

$$(14.24)\quad \det(I-2iU) \to \det(I-2iCUC')$$

La dekstra flanko de (14.24) egalas al

$(\det(C(C^{-1}(C')^{-1}-2iU)C' = (\det C)(\det C')(\det(A-2iU)) =$

$(\det A)^{-1}(\det(A-2iU))$

Ni do devas fari la anstataŭigon

(14.25) $\det(I-2iU) \rightarrow (\det A)^{-1}(\det(A-2iU))$

en formulo (14.16). Tio donas la karakterizan funkcion (11.15) kiu estas la karakteriza funkcio de la Wisharta distribuo. Ĉar gi estas ankaŭ la karakteriza funkcio de la probablodenso (14.1)-(14.2), ni pruvis ke tiu probablodenso estas la probablodenso de la Wisharta distribuo.

Anglalingvaj tradukoj de kelkaj terminoj

ajgeno - eigenvalue, characteristic root, latent root

derivo - derivative

derivi - differentiate

derivoperatoro - differential operator

dunomiala formulo - binomial formula

Fouriera mapo - Fourier transformation

Fouriera bildo - Fourier transform

horizontalo de matrico - row of a matrix

integralo - integral

integrali - integrate

laŭfaktora integralado - integration by parts

malderivo - antiderivative, primitive, indefinite integral

malplias al - is less than

malplialas al - is less than or equal to

neegalaĵo - inequality

pozitiva - positive

pozitivala - non-negative

pozitivajgena - positive definite

pozitivalajgena - non-negative definite

probablo - probability

probablodenso - probability density

samplo - sample

samplara distribuo - sampling distribution

vertikalo de matrico - column of a matrix

Notu ke mi uzas la terminon samplo kun nur unu el la signifoj kiujn havas "sample" en la angla lingvo. Por la koncepto "sample from a finite population" mi proponas muestro lau la hispana termino.

LITERATURO

Anderson, T.W. (1958): <u>An introduction to multivariate statistical analysis</u>. Wiley, New York and London.

Cramer, Harald (1945): <u>Mathematical methods of statistics</u>. Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1945. Princeton University Press, 1946.

Graham, Alexander (1981): <u>Kronecker products and matrix calculus with applications</u>. Ellis Horwood Ltd., Chichester, England.

Reiersøl, Olav (1951): Transiro per diferencialaj ekvacioj de probablodenso al karakteriza funkcio kaj inverse. <u>Portugaliae Mathematica</u>, Vol.10, p. 71-80.

Stephens, Eugene (1937): <u>The elementary theory of operational mathematics</u>. McGraw-Hill, New York and London.

Titchmarsh, E.C. (1937): <u>Introduction to the theory of Fourier integrals</u>. Oxford.