ISBN 82-553-0338-3
Mathematics
No 1 - March 8 1978

PROFONDEUR D'ANNEAUX D'INVARIANTS EN CARACTÉRISTIQUE p

de

Geir Ellingsrud et Tor Skjelbred
Oslo Oslo

PREPRINT SERIES - Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

Introduction.

Soit $G \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$. G opère en tant que groupe d'automorphismes de la k-varieté affine V correspondant à V et on note V/G la varieté quotient. Soit $V^G \subset V$ le sous-espace des vecteurs invariants par G. La varieté V/G est singulière quand $\dim_k V^G \leq \dim_k V - 2$ et nous montrons qu'elle n'est pas de Cohen-Macaulay lorsque $\dim_k V^G < \dim_k V - 2$. En fait, si $x \in V/G$ est un point fermé provenant d'un élément de V^G, on a la formule

$$\operatorname{prof} \mathcal{O}_{V/G,x} = \min(2 + \dim_k V^G, \dim_k V)$$

Dans certains cas particuliers, on sait déjà que V/G n'est pas de Cohen-Macaulay. Bertin [1] l'a demontré pour $G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ quand V est le kG-module indécomposable de dimension 4 sur k ; Fossum et Griffith, dans [2], le démontrent pour $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $\dim_k V \geq p^{n-1} + 3$, où V est également un kG-module indécomposable.

Soit $V^\vee$ le kG-module $\operatorname{Hom}_k(V,k)$, alors $V/G = \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}_k(V^\vee)^G)$, et la profondeur de l'anneau gradué d'invariants est $\min(2 + \dim_k V^G, \dim_k V)$. On utilise ce résultat pour trouver un anneau gradué factoriel A avec un groupe d'automorphismes $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{prof} A^G > \operatorname{prof} A$. En fait on a $\dim A = \dim A^G = 6$ et, pour $p \geq 3$, $\operatorname{prof} A = 4$, $\operatorname{prof} A^G = 6$. (En caractéristique 2 on a $\operatorname{prof} A = 5$ et $\operatorname{prof} A^G = 6$.) On montre également que lorsque $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et V est un kG-module de type fini tel que $\dim_k V^G < \dim_k V - 2$, l'anneau d'invariants $\operatorname{Sym}_k(V^\vee)^G$ satisfait à la condition S_2 de Serre, mais pas aux conditions S_r, $r > 2$.

D'une façon plus générale, soit G un groupe fini et V un kG-module de type fini. Alors on a

$$\text{prof } \mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G \geq 2 + \dim_k V^G$$

lorsque $\dim_k V \geq 2 + \dim_k V^G$.

Les démonstrations utilisent les suites spectrales reliant la cohomologie de G à valeurs dans $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$ et la cohomologie locale à support dans l'idéal irrelevant n de $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G$. Le point essentiel est d'estimer la profondeur des modules de cohomologie de G à valeur dans $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$ en degré positif. On utilise pour cela l'action par translation du groupe additif Γ de V^G sur V. Cette action munit les modules $H^i(G,\mathrm{Sym}_k(V^\vee))$ d'une structure de Γ-faisceaux cohérents sur V/G, lorsque $i \geq 0$. Comme toutes les orbites de Γ dans V/G sont de dimension égale à $\dim_k V^G$ on montre pour tout point fermé $x \in V/G$ que $\text{prof } H^i(G,\mathrm{Sym}_k(V^\vee))_x \geq \dim_k V^G$. En caractéristique p, si $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $i > 0$, le support du module $H^i(G,\mathrm{Sym}_k(V^\vee))$ est une seule orbite de Γ ; c'est donc un module de Cohen-Macaulay.

Au paragraphe 2 on étudie l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur les anneaux locaux noethériens A de Cohen-Macaulay, de caractéristique $p > 0$. Soit I_F l'idéal engendré par $\{\sigma a - a \mid a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire l'idéal du schéma des points fixes dans $\mathrm{Spec}\, A$. Pour tout idéal premier associé $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}} H^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A)$, on a

$$\text{prof } A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \leq \dim(A/\mathfrak{p}A) + 2 .$$

Comme $\mathrm{Supp}_{A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}} H^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A) \simeq \mathrm{Supp}_A(A/I_F)$, on a, pour toute composante irréductible F_i de $\mathrm{Spec}(A/I_F)$:

$$\text{prof } A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \leq \dim F_i + 2 .$$

§ 1 Notations. Lemmes techniques.

Dans tout ce qui suit, k est un corps de caractéristique $p > 0$.

Soit G un groupe cyclique d'ordre p, et σ un générateur de G. L' algèbre de groupe de G sur k, kG, est isomorphe à $k[\sigma]/(\sigma-1)^p$. Soient ∂ et Tr les deux éléments de kG définis par $\partial = \sigma - 1$ et $Tr = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i$. Ils vérifient $Tr = \partial^{p-1}$.

Soit M un kG-module. Les groupes de cohomologie de G à valeurs dans M, $H^i(G,M)$, $i \geq 0$, peuvent être calculés à partir du complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{Tr} M \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{Tr} \cdots$$

Soit A une k-algèbre. Supposons que G opère sur A en tant que k-algèbre. On appelle AG-module la donnée d'un A-module M et d'une action de G sur M, telle que $g(am) = g(a)g(m)$ pour tout $g \in G$, $a \in A$ et $m \in M$.

Si M est un AG-module, les groupes de cohomologie $H^i(G,M)$ sont des A^G-modules.

L'action de G sur A induit une action de G sur le k-schéma $X = \operatorname{Spec} A$. On a $X/G = \operatorname{Spec} A^G$.

On appellera $\pi : X \to X/G$ le morphisme canonique.

Soit I_F l'idéal de A engendré par ∂A. On désignera le sous-schéma fermé $V(I_F)$ de $\operatorname{Spec} A$ par $F(G,\operatorname{Spec} A)$, ou par F s'il n'y a pas d'équivoque possible. C'est le plus grand sous-schéma de $\operatorname{Spec} A$ sur lequel G opère trivialement, autrement dit le sous-schéma des points fixes de G.

Le G-homomorphisme $Tr : A \to A^G$ est un A^G-homomorphisme, son image est donc un idéal de A^G, noté $I_{F'}$. Le sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec} A^G$ qu'il définit sera noté $F'(G,\operatorname{Spec} A)$, ou simplement F'. Comme ensemble, c'est l'image de $F(G,\operatorname{Spec} A)$ par π.

Nous allons démontrer quelques lemmes techniques.

<u>Lemme 1.1</u>: <u>Soit</u> M <u>un</u> AG-<u>module</u>, $a \in A$, <u>et</u> $m \in M$.

i) $\partial(am) = \sigma(a)\partial(m) + \partial(a)m = a\partial(m) + \partial(a)\sigma(m)$

ii) $a\mathrm{Tr}(m) - \mathrm{Tr}(a)m \in \partial M$

iii) <u>Supposons que</u> $\partial a = 0$ <u>et qu'il existe</u> $b \in A$ <u>tel que</u> $\partial b = a$. <u>Alors, pour tout</u> $i \in \mathbb{N}$, $\partial^i(b^i) = i!\, a^i$.

<u>Démonstration</u>: On vérifie facilement i).

Pour démontrer ii), on écrit

$$a\mathrm{Tr}(m) - \mathrm{Tr}(a)m = a\sum_{i=0}^{p-1}\sigma^i(m) - \sum_{i=0}^{p-1}\sigma^{-i}(a)m$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1}(\sigma^i - 1)(\sigma^{-i}(a)m) \in \partial M .$$

On démontre iii) par récurrence sur i, le cas $i = 1$ étant l'hypothèse de iii). Pour tout $i \in \mathbb{N}$, il résulte de i) l'égalité suivante, $\mu: A \otimes_k A \to A$ étant le morphisme de multiplication.

$$\mu(\partial \otimes \mathrm{id}_A + \sigma \otimes \partial)^i(a \otimes b) = \partial^i(ab)$$

Supposons que l'on a $\partial^i(b^i) = i!\, a^i$. Il vient:

$$\partial^{i+1}(b^{i+1}) = \mu(\partial \otimes \mathrm{id} + \sigma \otimes \partial)^{i+1}(b \otimes b^i)$$

$$= (i+1)a\partial^i(b^i) + \sigma^{i+1}(b)\partial^{i+1}(b^i) = (i+1)!\, a^{i+1} .$$

<u>Remarque</u>: Pour $i > 0$, les A^G-modules $H^i(G,A)$ sont des $A^G/I_{F'}$-modules. Pour i impair c'est une conséquence de ii). Pour i pair, on a même $H^i(G,A) = A^G/\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr} = A^G/I_{F'}$.

<u>Lemme 1.2. Supposons que</u> A <u>soit réduit et que l'application</u> $Tr: A \to A$ <u>soit nulle. Alors l'opération de</u> G <u>sur</u> A <u>est triviale.</u>

<u>Démonstration:</u> Si l'opération n'était pas triviale, il existerait un élément non nul $a \in A^G \cap \partial A$. Choisissons $b \in A$ tel que $\partial b = a$. D'après le lemme 1.1 on a

$$0 = Tr\, b^{p-1} = \partial^{p-1}(b^{p-1}) = (p-1)!\, a^{p-1} = -a^{p-1} .$$

Comme A est réduit on en déduit $a = 0$.

<u>Lemme 1.3: Si</u> $\pi : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A^G$ <u>désigne le morphisme canonique, on a:</u>

i) $\pi^{-1}(F') = F$

ii) $\operatorname{Supp} H^1(G,A) = \operatorname{Supp} H^2(G,A) = F'$

<u>ou</u> $F = F(G, \operatorname{Spec} A)$ <u>et</u> $F' = F'(G, \operatorname{Spec} A)$

<u>Démonstration:</u> On a évidemment $I_{F'} A \subset I_F$. Il suffit donc de montrer que $\pi^{-1}(F') \subseteq F$. Soit $p \in \pi^{-1}(F')$ et supposons que p ne soit pas invariant par G. Les idéaux $p_i = \sigma^i p$, $i = 0,\dots,p-1$ sont alors tous distincts. Soit $q = A^G \cap p$. L'anneau A_q est un anneau semi-local d'idéaux maximaux $p_i A_q$, $i = 0,\dots,p-1$.

On a donc un G-isomorphisme $A_q/\cap p_i A_q \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{p-1} A_q/p_i A_q$, G opérant sur le produit en permutant les facteurs. L'élément $(1,0,\dots,0)$ est alors de trace non nulle, ce qui contredit l'hypothèse $Tr\, A \subset q \subset \bigcap_{i=0}^{p-1} p_i$. On en conclut que p est invariant. Comme $I_{F'} = Tr\, A \subset p$, l'application Tr sur A/p est nulle. D'après le lemme 1.2 l'action de G sur A/p est alors triviale, c'est-à-dire $I_F \subset p$.

Quant à ii), c'est un cas particulier du lemme suivant:

<u>Lemme 1.4</u>: <u>Soit</u> M <u>un</u> AG-<u>module de type fini sur</u> A . <u>Supposons que</u> M <u>soit engendré par</u> M^G . <u>Alors</u>

$$\operatorname{Supp} H^i(G,M) = \operatorname{Supp} M \cap F' \quad \underline{\text{pour}} \quad i > 0 .$$

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 1.1, ii), on a $\operatorname{Supp} H^i(G,M) \subseteq \operatorname{Supp} M \cap F'$. Soit alors $p \in \operatorname{Supp} M \cap F'$. Pour $i \geq 0$, on a une application canonique $M^G \to H^i(G,M)$ pouvant s'insérer dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} M_p^G \otimes_k A_p/pA_p & \xrightarrow{\alpha} & M_p/pM_p & \xrightarrow[\sim]{\beta} & H^i(G,M_p/pM_p) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & M_p^G & \longrightarrow & H^i(G,M)_p \end{array}$$

Comme M^G engendre M , l'application α est surjective.
G opérant trivialement sur A_p/pA_p , il opère trivialement sur M_p/pM_p , d'où l'isomorphisme β . $H^i(G,M)_p = 0$ entraînerait $M_p^G \subset pM_p$, ce qui est impossible (lemme de Nakayama).

§ 2. Le foncteur $H_n^*(G,\cdot)$.

Soit A un anneau commutatif unitaire où agit un groupe fini G par automorphismes de A . Soit m un idéal G-invariant, et soit $n = m \cap A^G$ sa trace dans A^G. Supposons que A^G soit noethérien, et que A soit un A^G-module de type fini. Notre but est de calculer la n-profondeur de A^G, c'est-à-dire le plus petit entier i tel que $H_n^i(A^G) \neq 0$. Ces modules apparaissent comme éléments d'une suite spectrale (E_r) dont l'aboutissement est $H_n^*(G,A)$ que nous allons définir ci-dessous. La seconde suite spectrale de $H_n^*(G,A)$ fait intervenir le module $H_n^*(A)$ et donc l'entier $\mathrm{prof}_m A = \mathrm{prof}_n A$. Cela nous permet sous certains hypothèses, d'évaluer $\mathrm{prof}_n A^G$ quand on connaît $\mathrm{prof}_n A$. Dans la catégorie des $A^G G$-modules, soient $H_n^i(G,M)$ les foncteurs dérivés du foncteur $H_n^o(M^G) = (H_n^o(M))^G$. $H_n^*(G,M)$ est alors un module gradué sur l'anneau $H^*(G,A^G)$. De [3,th.2.4.1] on déduit l'existence de deux suites spectrales d'aboutissement $H_n^*(G,M)$. (E_r) désigne la première suite spectrale, où $E_2^{ij} = H_n^i(H^j(G,M))$, et $(\mathcal{E}_r)$ la seconde suite spectrale où $\mathcal{E}_2^{ij} = H^i(G,H_n^j(M))$. Pour $r \geq 2$ ces suites spectrales sont des $H^*(G,A^G)$-modules.

<u>Lemme 2.1 :</u> <u>Soit</u> G <u>un groupe fini et</u> M <u>un</u> $A^G G$-<u>module</u>. <u>Posons</u> $f = \mathrm{prof}_n H^1(G,M)$ <u>et supposons que</u> $\mathrm{prof}_n H^{1+i}(G,M) \geq f - i$ <u>pour</u> $i \geq 1$. <u>Si</u> $\mathrm{prof}_n(M) \geq f+2$, <u>alors</u> $\mathrm{prof}_n M^G = f+2$ <u>et si</u> $\mathrm{prof}_n M = f+1$, <u>alors</u> $\mathrm{prof}_n M^G \geq f+1$. <u>Si</u> e <u>est un entier tel que</u> $\mathrm{prof}_n H^{1+i}(G,M) \geq e - i$ <u>pour</u> $i \geq 0$ <u>et</u> $\mathrm{prof}_n M \geq e+2$, <u>alors</u> $\mathrm{prof}_n M^G \geq e+2$.

<u>Démonstration</u>. Comme $E_2^{ij} = H_n^i(H^j(G,M))$ on a $(d_r(E_r))^{ij} = 0$ pour $r \geq 2$ et $i+j \leq f+1$. A l'aide de la suite spectrale $(\mathcal{E}_r)$ où $\mathcal{E}_2^{ij} = H^i(G,H_n^j(M))$, on montre que $H_n^i(G,M) = 0$ pour $i \leq f+1$ quand $\mathrm{prof}_n M \geq f+2$. Cela entraîne que la différentielle de E_2 , $d_2 : H_n^f(H^1(G,M)) \to H_n^{f+2}(M^G)$ est injective et que $H_n^i(M^G) = 0$ pour $i \leq f+1$, d'où $\mathrm{prof}_n(M^G) = f+2$. Les autres assertions du lemme se montrent de façon analogue.

Dans ce qui suit on suppose que A est un anneau semi-local de radical m et contient le corps $\mathbb{F}_p$ d'ordre p , et que $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On supposera en outre que l'idéal $I_F = ((1-\sigma)A)A$ est contenu dans m et que l'anneau A^G est noethérien de dimension de Krull finie; A^G est alors un anneau semi-local de radical $n = m \cap A^G$.

<u>Lemme 2.2:</u> <u>Soit</u> M <u>un</u> AG-<u>module de type fini engendré par</u> M^G . <u>Si</u> $M \neq 0$, <u>alors</u> $H^j(G,M) \neq 0$ <u>pour tout</u> $j \geq 0$.

<u>Démonstration</u>. Pour $j > 0$ on sait par (1.4) que $\mathrm{Supp}\, H^j(G,M) = F' \cap \mathrm{Supp}(M) \supset \mathrm{Supp}(M/mM)$. Comme $M/mM \neq 0$, on a bien $H^j(G,M) \neq 0$.

<u>Corollaire 2.3.</u> <u>Soit</u> M <u>un</u> AG-<u>module de type fini engendré par</u> M^G. <u>Si</u> F <u>est isolé et</u> $\mathrm{prof}_n M \geq 2$, <u>alors</u> $\mathrm{prof}_n(M^G) = 2$.

Démonstration. On dit que F est isolé si m est le radical de I_F. Il suffit de montrer que les conditions du lemme (2.2) sont remplies avec $f = 0$. D'après (1.4) le support de $H^j(G,M)$ est contenu dans F' pour $j > 0$. Comme $H^j(G,M) \neq 0$ pour $j > 0$, on en déduit $\operatorname{prof}_n H^j(G,M) = 0 = f$.

Corollaire 2.4: Supposons que A vérifie la condition S_2 de Serre alors

i) A^G vérifie la condition S_2

ii) si $\operatorname{codim} F > 2$ A^G ne vérifie pas la condition S_r pour $r > 2$.

Démonstration: On vérifie facilement i) à l'aide des suites spectrales (E_r) et $(\mathcal{E}_r)$. Pour ii) soit $q \in \operatorname{Spec} A^G$ un point générique de F' et soit $p \in \operatorname{Spec} A$ tel que $p \cap A^G = q$. On a bien $(A_p)^G = (A^G)_q$ et $\dim(A^G)_q = \dim A_p \geq 3$, donc $\operatorname{prof} A_p \geq 2$. Le corollaire (2.5) implique alors que $\operatorname{prof}(A^G)_q = 2$, et A^G ne vérifie pas S_r pour $r > 2$.

Théorème 2.5: Soit G un groupe fini, et M un $A^G G$-module de type fini. Si $p \in \operatorname{Ass}_{A^G} H^1(G,M)$ est tel que $\operatorname{prof} M \geq \dim(A^G/p) + 2$, on a

$$\operatorname{prof} M^G \leq \dim(A^G/p) + 2 .$$

Démonstration: Pour tout A^G-module N de type fini et tout idéal premier $p \subset A^G$, on a

$$\operatorname{prof} N \leq \operatorname{prof} N_p + \dim(A^G/p) .$$

Si $\operatorname{prof} M \geq \dim(A^G/p) + 2$, on a donc $\operatorname{prof} M_p \geq 2$, d'où $H^i_p(G,M_p) = 0$

pour $i = 0,1$. Soit (E_r) la suite spectrale telle que $E_2^{ij} = H_p^i(H^j(G,M_p))$. Alors $E_2^{io} = 0$ pour $i = 0,1$ et $d_2 : E^{o1} \to E_2^{2o}$ est injectif . On a d'autre part $E_2^{o1} = H_p^o(H^1(G,M_p)) \neq 0$, d'où $E_2^{2o} \neq 0$. Comme $E_2^{io} = H_p^i(M_p^G)$, il en résulte que $\operatorname{prof} M_p^G = 2$, et donc que $\operatorname{prof} M^G \leq \dim(A^G/p) + 2$.

<u>Corollaire 2.6</u>: <u>Soit</u> $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ <u>et soit</u> M <u>un</u> AG-<u>module de type fini, engendré par</u> M^G . <u>Si</u> M <u>est de Cohen-Macaulay, on a</u>:

$$\operatorname{prof} M^G \leq \dim (F' \cap \operatorname{Supp} M) + 2 .$$

<u>Si</u> $p \subset A^G$ <u>est un idéal premier associé de</u> $H^1(G,M)$, <u>on a</u> $\operatorname{prof} M^G \leq \dim(A^G/p) + 2$.

<u>Démonstration</u>: Comme $\operatorname{Supp} H^1(G,M) = F' \cap \operatorname{Supp} M$, on a $\dim(A^G/p) \leq \dim(F' \cap \operatorname{Supp} M)$. Si $\operatorname{prof} M \geq \dim(A^G/p) + 2$, ce résultat est une conséquence de (2.5). Si $\operatorname{prof} M \leq \dim(A^G/p) + 2$, on a également $\operatorname{prof} M^G \leq \dim M^G = \dim M = \operatorname{prof} M \leq \dim(A^G/p) + 2$.

§ 3. Le cas linéaire.

Nous allons ici calculer la profondeur en tout idéal maximal de l'anneau des invariants d'un groupe cyclique d'ordre p^n opérant linéairement sur un anneau de polynômes sur k.

Soit $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Supposons que G opère linéairement sur l'espace vectoriel V de dimension finie sur le corps algébriquement clos k. Alors G opère sur $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$ l'algèbre symétrique de l'espace dual $V^\vee$ de V, et donc sur $V = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_k(V^\vee))$.

Le sous-schéma des points de V stabilisés par un sous-groupe $p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est noté F_i. C'est un sous-espace linéaire de V. On désigne par F_i' son image ensembliste dans $V/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

Les F_i' forment une suite croissante de sous-ensembles fermés de $V/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Nous allons démontrer:

Théorème 3.1: Soit m le plus grand entier tel que $\mathrm{codim}_V F(p^m\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, V) \geq 2$. (Si G opère fidèlement on sait que $m = n-1$ ou $m = n-2$).

i) Si $x \in F_i' - F_{i-1}'$ est un point fermé et si $i \leq m$ on a

$\mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{V/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),x} = \dim F_i + 2$

ii) Si $x \in V/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) - F_m'$ est fermé,

$\mathrm{prof}\, \mathcal{O}_{V/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),x} = \dim V$.

Soit V_α le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module indécomposable de dimension $\alpha \leq p^n$.

Corollaire 3.2: Supposons que $V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_l}$ en tant que $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module, où $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_l$. Alors:

$$\operatorname{prof} \operatorname{Sym}_k(V)^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = \begin{cases} l+\alpha_1-1 & \text{lorsque } \alpha_1 \leq 2 \text{ et} \\ & \alpha_2 = \dots = \alpha_1 = 1 \\ l+2 & \text{sinon} \end{cases}$$

où la profondeur est calculée en l'idéal engendré par V .

Si V est indécomposable, le corollaire ci-dessous répond à une question posée par Fossum et Griffith dans [2].

Corollaire 3.3: *Soit* V *un* $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$*- module indécomposable. Supposons que* $\dim V \geq 3$.
Alors,

$$\operatorname{prof} \operatorname{Sym}_k(V)^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} = 3$$

où la profondeur est calculée en l'idéal engendré par V .

Corollaire 3.4: $\operatorname{Sym}_k(V)^{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ *est de Cohen-Macaulay si et seulement si*

$$V = \left(\bigoplus_{i=1}^{\lambda} V_2\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{l-\lambda} V_1\right) \qquad \lambda = 0,1 \text{ ou } 2 .$$

$$\text{ou} \quad V = V_3 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{l-1} V_1\right) \qquad \text{si} \quad p \geq 3 .$$

On démontre le théorème 3.1 par récurrence sur n . Considérons plus généralement un schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ de type fini sur k, sur lequel opère $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 3.5: *Soit* Γ *un groupe opérant sur* X *de façon que*

i) *l'action de* Γ *commute avec celle de* G

ii) Γ *opère transitivement sur les points fermés de* $F(G,X)$.
Alors les A^G*-modules* $H^i(G,A)$ *sont de Cohen-Macaulay pour* $i > 0$.

Démonstration de 3.5: L,action de Γ commutant avec celle de G , il est clair que Γ opère sur le schéma $F' = F'(G,X) = \operatorname{Spec}(A^G/I_{F'})$

et que les $H^i(G,A)$ sont des $(A^G/I_F)\Gamma$-modules pour $i > 0$.
Le morphisme $\pi|_F : F \to F'$ étant une bijection, Γ opère transitivement sur les points fermés de F'.

On achève la démonstration à l'aide du lemme ci-dessous, qui se démontre sans peine:

Lemme 3.6: Soit Y un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos. Supposons qu'un groupe Γ opère sur Y, transitivement sur les points fermés. Alors tout $\mathcal{O}_Y\Gamma$-module cohérent est de Cohen-Macaulay.

Soient, pour une action de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sur X, les deux conditions suivantes:

I. Pour tout sous-groupe $p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, il existe un groupe Γ_i opérant sur X, tel que l'action de Γ_i commute avec celle de $p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et est transitive sur les points fermés de $F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X)$ pour $i \leq n-1$.

II. Pour tout point fermé $x \in X$, on a:

$$\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X,x} \geq \dim F(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X) + 2 .$$

Lemme 3.7: Supposons que l'action de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sur X satisfait aux conditions I et II ci-dessus. Alors l'action induite de $\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ sur $X' = X/(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ satisfait également I et II. De plus, on a

i) Si $x \in F'(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X)$ est un point fermé,

$$\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X',x} = \dim F(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X) + 2$$

ii) <u>Si</u> $x \notin F'(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X)$ <u>est un point fermé</u>,

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X',x} = \text{prof } \mathcal{O}_{X,y}$$

<u>pour toute préimage</u> y <u>de</u> x <u>dans</u> X .

<u>Démonstration de 3.7</u>: Remarquons d'abord que le morphisme canonique $\pi: X \to X'$ induit une bijection entre $F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},X)$ et $F(p^i\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z},X')$ pour $i \leq n-2$. (En effet tout groupe d'isotropie non trivial contient $p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$) . Pour $i \leq n-1$ l'action de Γ_i passe au quotient X' et, vu la remarque ci-dessus, elle est transitive sur $F(p^i\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z},X')$ pour $i \leq n-2$. La condition I est donc vérifiée. Soit $x \in X'$ un point fermé et $y \in X$ une préimage de x . Si y n'est pas un point fixe sous l'action de $p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, on sait que

$$\begin{aligned}\text{prof } \mathcal{O}_{X',x} = \text{prof } \mathcal{O}_{X,y} &\geq \dim F(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},X) + 2 \\ &\geq \dim F(p^{n-2}\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z},X') + 2 .\end{aligned}$$

Si y est un point fixe, on obtient à l'aide de la condition I pour X et des lemmes (3.5) et (2.2):

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X',x} = \dim F(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},X) + 2 \geq \dim F(p^{n-2}\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z},X') + 2$$

et la condition II est vérifiée pour X' .

<u>Proposition 3.8</u>: <u>Supposons que</u> $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ <u>opère sur</u> X <u>de façon que les conditions</u> I <u>et</u> II <u>soient satisfaites</u>. <u>Alors</u>,

i) <u>Si</u> $x \in F'(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},X) - F'(p^{i-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},X)$ <u>est un point fermé, on a pour</u> $i \leq n-1$,

$$\text{prof } \mathcal{O}_{X/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z});x} = \dim F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},X) + 2$$

ii) Si $x \in X/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) - F'(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X)$ <u>est un point fermé, on a</u>

$$\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),x} = \operatorname{prof} \mathcal{O}_{X,y}$$

<u>pour toute préimage</u> y <u>de</u> x <u>dans</u> X .

<u>Démonstration</u>: On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 1$, la proposition découle du lemme (3.7). Si $n > 1$, les conditions I et II sont, en vertu du lemme (3.7), vérifiées pour $X/(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Comme $X/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ est le quotient de $X/(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ par $\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ et $\dim F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, X) = \dim F(p^i\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}, X/(p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ pour $i < n-1$, la récurrence est immédiate.

Enfin, démontrons le théorème (3.1). Vérifions d'abord la condition I pour l'action de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sur V . Les sous-schémas $F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, V)$ sont des sous-espaces linéaires de V . Soit Γ_i le groupe additif des points fermés de $F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, V)$, opérant sur V par translation. On voit aisément que cette action commute avec celle de $p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et qu'elle est transitive sur $F(p^i\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, V)$. En raison du lemme (2.2), l'action de $\mathbb{Z}/p^{m-1}\mathbb{Z}$ sur $V/(p^{m-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ satisfait aux conditions I et II. Le théorème se déduit alors de la proposition (3.8).

D'une façon générale, soit G un groupe fini qui opère linéairement sur V . Soit n l'idéal irrelevant de $\operatorname{Sym}_k(V^\vee)$.

<u>Théorème 3.9</u>: <u>Supposons que</u> $\dim_k V \geq 2 + \dim_k V^G$, <u>alors</u>

$$\operatorname{prof}_n \operatorname{Sym}_k(V^\vee)^G \geq \dim_k V^G + 2 .$$

Démonstration: En vertu du lemme (2.2) il suffit de montrer que $\operatorname{prof}_n H^i(G,\operatorname{Sym}_k(V^\vee)) \geq \dim V^G$ pour $i > 0$. Le groupe additif Γ de V^G opère par translation sur $\operatorname{Sym}_k(V^\vee)$. Cette opération est compatible avec celle de G. Pour tout i $H^i(G,\operatorname{Sym}_k(V^\vee))$ est donc un $(\operatorname{Sym}_k(V^\vee)^G)\Gamma$-module. On achève la demonstration à l'aide du

Lemme 3.10: *Soit* Γ *un groupe opérant sur un schéma* X, *de type fini sur un corps algébriquement clos. Soit* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X\Gamma$-*module cohérent. Si* $x \in X$ *est un point fermé, on a*

$$\operatorname{prof}_x \mathcal{F} \geq \dim \overline{\Gamma(x)}$$

où $\overline{\Gamma(x)}$ *désigne l'adhérence de l'orbite de* x.

Démonstration: Soit pour tout entier $i \geq 0$, $Z_i' = \{y \in X \mid y \text{ fermé}, \operatorname{prof} \mathcal{F}_y \leq i\}$ et soit $Z_i = \overline{Z_i'}$, l'adhérence de Z_i' dans X. Si $x \in Z_i'$ on a bien $\overline{\Gamma(x)} \subseteq Z_i$. Il suffit donc de montrer que $\dim Z_i \leq i$. Pour cela, on peut supposer que X est affine, $X = \operatorname{Spec} A$, et même que A est un anneau régulier. Soit $d = \dim A$, alors

$$Z_i = \bigcup_{j \geq d-i} \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j_A(\mathcal{F}, A)$$

En localisant aux points génériques on voit que $\dim \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^j_A(\mathcal{F},A) \leq d - j \leq i$.

Nous allons maintenant donner un exemple d'un anneau intègre, factoriel A, non de Cohen-Macaulay, avec une operation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ telle que $A^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ soit de Cohen-Macaulay.

Soit $p \geq 3$ et $V = V_3 \oplus V_3$ avec l'action de $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donnée par $(g,h)(v,w) = (gv,hw)$. Soient H le groupe diagonal de G, et $A = \mathrm{Sym}_k(V^\vee)^H$. Par le théorème (3.1) A n'est pas de Cohen-Macaulay. En effet $\mathrm{prof}_n A = 4$, où $n = m \cap A$ (m l'idéal irrelevant de $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)$), et $\dim A_n = 6$. Le groupe $G/H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ opère de façon naturelle sur A, et $A^{G/H} = \mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G$. En remarquant alors que $\mathrm{Sym}_k(V^\vee)^G = \mathrm{Sym}_k(V_3^\vee)^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \otimes_k \mathrm{Sym}_k(V_3^\vee)^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$, on trouve grâce à (3.1), que $A^{G/H}$ est de Cohen-Macaulay. Pour $p = 2$ on trouve également un exemple en utilisant l'opération de $G \times G$ sur $V = V_2 \oplus V_2 \oplus V_2$ donnée par $(g,h)(u,v,w) = (gu,gv,hw)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.-J. Bertin, Anneaux d'invariants d'anneaux de polynômes en caractéristique p. C.R. Acad. Scient. Paris t. 264(1967), p. 653 à 656.

[2] R. Fossum et P.A. Griffith, Complete local factorial rings which are not Cohen-Macaulay in characteristic p. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., Paris (4)8(1975), p. 189 à 200.

[3] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohôku Math. J. IX (1957) p. 119 à 221.