Degré normal d'une immersion.
Remarques sur deux notes de M. André Gramain.

par

Per Holm

Soit $f : V \to M$ une immersion en codimension 1 d'une variété differensiable compacte orientée dans une varieté connexe orientée. Soit $N(f)$ le fibré normale de f et $s : V \to N(f)^0$ une section positive. Alors on peut former l'application normale

$$f_N : V \xrightarrow{s} N(f)^0 \overset{i}{\subset} f^*T(M)^0 \xrightarrow{f} T(M)^0 .$$

Pour une variété M parallellizable on obtient donc une "application de Gauss"

$$V \xrightarrow{f_N} T(M)^0 \xrightarrow{\varphi} R^m - 0 \xrightarrow{\rho} S^{m-1}$$

ou $\varphi : T(M) \to R^m$ est une morphisme admissible (i.e. compatible avec l'orientation de M). Le degré $\alpha(f)$ de cette composé a été étudié par H. Hopf (1) et par J. Milnor (2) dans le cas ou $M = R^m$. Plus recemmant A. Gramain a donné des generalizations au cas on M est arbitraire (connexe, orientée) sous une condition de l'immersion f. Le but de cette note est de donner des simplifications des constructions de (3), (4). Nos demonstrations s'applique aussi au cas ou V et M ne sont que des variétés topologiques. Dans ce cas il faut qu'on interprete les fibrées comme des microfibrées et il suffit de supposer que $f : V \to M$ est une application continue induissant un isomorphisme de microfibrées $T(V) \oplus N(f) \cong f^{*}T(M)$.

1. Soit V une variété compact sans bord de dimension n et $f : V \to M$ une immersion orientée de V dans une variété M connexe sans bord de dimension $n+1$ (tel que le fibré normal de f est orientée donc trivial). On note $N(f)$ le fibré normale de f et $T(V)$, $T(M)$ les fibrées tangent de V, M , respectivement. Soient $s : V \to N(f)^{o}$ une section positif et $f_N : V \xrightarrow{s} N(f)^{o} \overset{i}{\subset} f^{*}T(M)^{o} \xrightarrow{f} T(M)^{o}$ l'application normale correspondent. Par passage á l'homologie on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_{M+1}(M;Z_M) \arrow[d, "\Omega_M \cap"] \\
 & & & H_o(M) \arrow[d, "\rho*"] \\
H_n(V;Z_V) \arrow[r, "s_*"] & H_n(N(f)^{o};\tilde{Z}_V) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "p_*"'] & H_n(f^{*}T(M)^{o};\tilde{Z}_V) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p*"] & H_n(T(M)^{o};\tilde{Z}_M) \arrow[d, "p*"] \\
 & & H_n(V;Z_V) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & H_n(M;Z_M) \arrow[d] \\
 & & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

ou les suites verticaux sont parties des suites exactes de Gysin pour les fibrées $f^{*}T(M)$ et $T(M)$, Z_V étant le système local d'orientation de V et $\tilde{Z}_V$ les relèvements réspectives par p_*.

<u>Supposones maitenant que l'immersion f satisfait à la condition</u> $f_*[V] = 0$, $[V] \in H_n(V;Z_V)$ <u>étant la classe fondamentale (tordue) d'homologie de</u> V . Dans ce cas $f_{N*}[V]$ est anihilée par $p_* : H_n(T(M)^{o};\tilde{Z}_M) \to H_n(M;Z_M)$ donc $f_{N*}[V] \in \operatorname{im} \rho_*$. Relève $f_{N*}[V]$ à $H_o(M)/\ker \rho_* = H_o(M)/(\Omega_M \cap [M])$ par $\bar{\rho}_* : H_o(M)/(\Omega_M \cap [M]) \cong \operatorname{im} \rho_*$. On définit le degré normal de f par

$$\alpha(f) = \bar{\epsilon}_* \bar{\rho}_*^{-1} f_{N*}[V] ,$$

ou $\bar{\epsilon} : H_o(M)/(\Omega_M \cap [M] \cong Z_{\chi(M)}$ est l'isomorphisme induit de l'augmentation $\epsilon : H_o(M) \cong Z$. Donc $\alpha(f)$ est un entier modulo $\chi(M)$, ou $\chi(M) = \epsilon_*(\Omega_M \cap [M])$. Pour V et M orientée cette définition equivaut à cette de Gramain. Si M est non-compact, $[M] \in H_{n+1}(M;Z_M)$ est nul, donc $\alpha(f)$ est un entier. De même, si M est parallellizable, Ω_M est nul donc $\alpha(f)$ est encore un entier. Dans le cas ou M est non-compact $\chi(M)$ est la characteristique d'Euler-Poincaré de M. Cette construction donne une definition direct du degré normal (tordue) de l'immersion f.

Montrons le theoreme de Gramain.

<u>Theorème</u>. Soit $f : V \to M$ une immersion orientée de codimension 1 tel que $f_*[V] = 0$. Si V est le bord d'une variete W compacte connexe et si f peut se prolonger à une immersion $g : W \to M$, alors

$$\alpha(f) \equiv \chi(W) \bmod \chi(M)$$

Observons que l'immersion g est nécessairement orientable, donc on peut choisir l'orientation de g compatible à celle de f. Soit $\sigma : (W,V) \to (T(W),T(W)^o)$ une section qui prolonge une section positiv $s' : V \to T(W)^o|V \subset T(W)^o$. Comme deux telles sont homotopes par des sections positives on peut choisir s' égal à $V \overset{s}{\to} N(f)^o \overset{i}{\subset} f^*T(M)^o \overset{j}{\subset} T(W)^o$, auquel cas on obtient immediatement

$$\alpha(f) \equiv < \sigma_*[W,V],U > \bmod \chi(M) ,$$

$[W,V] \in H_{n+1}(W,V;Z_W)$ étant la classe fondamentale d'homologie de W et $U \in H^{n+1}(T(W), T(W)^{\circ}; \tilde{Z}_W)$ la classe de Thom de $T(W)$. Comme $< \sigma_*[W,V], U > = < [W,V], \sigma^*(U) >$, il suffit de verifier que $\sigma^*(U) = \chi(W)z$, ou $z \in H^{n+1}(W,V,Z_W)$ est la classe unique pour laquelle $< [W,V],z > = 1$. Evidemment ce problème ne depend pas de l'immersion f . Le but de (3) est de verifier cette relation. Nous indiquons ci dessous une demonstration courte, valable dans le cas topologique.

Soient $r : V \to T(W)^{o}|V \subset T(W)^{o}$ une section negatif et $\rho : W \to T(W)$ une section qui est une prolongement de r . D'abord $\rho^*(U) = (-1)^{n+1} \sigma^*(U)$. Il est facile d'exprimer la difference $\sigma^*(U) - \rho^*(U)$ a l'aide de la characteristique d'Euler de V et la classe de cohomologie z , cf. la remarque 5 dans (3); on a

$$\sigma^*(U) - \rho^*(U) = \chi(V)z .$$

Dans le cas ou V est de dimension <u>pair</u> on obtient donc

$$2 \sigma^*(U) = \chi(V)\cdot z .$$

D'autre part on a toujours

$$\chi(W) = \chi(V) + \chi(W,V)$$

et

$$\chi(DW) = \chi(W) + \chi(DW,W) ,$$

DW étant la doublée de W . Mais $\chi(DW) = 0$ parce que DW est compact sans bord de dimension impair, et $\chi(DW,W) = \chi(W,V)$ par excission. Donc $\chi(V) = 2 \chi(W)$, ce que entraine $\sigma^*(U) = \chi(W)z$.

Dans le cas ou V est de dimension <u>impair</u>, remplacons (W,V)

par $(\overline{W},\overline{V}) = (W,V) \times (I,\dot{I}) = (W \times I, (W \times \dot{I}) \cup (V \times I))$. Alors $\overline{V} = \partial\overline{W}$ est de dimension pair, donc le résultat precedant s'applique et on a la formule correspondent

$$\overline{\sigma}^*(\overline{U}) = \chi(\overline{W})\overline{z} .$$

Mais l'élément $\overline{\sigma}^*(\overline{U}) \in H^{n+2}(\overline{W},\overline{V};Z_{\overline{W}}) \cong H^{n+1}(W,V;Z_W) \otimes H^1(I,\dot{I})$ correspond a $\sigma^*(U) \otimes g^*$ et l'élément $\overline{z} \in H_{n+2}(\overline{W},\overline{V};Z_{\overline{W}}) \cong H_{n+1}(W,V;Z_W) \otimes H_1(I,\dot{I})$ correspond à $z \otimes g_*$, g^* et g_* étant des generateurs duaux. Donc $\sigma^*(U) = \chi(\overline{W})z$. Enfin $\chi(\overline{W}) = \chi(W)$.

- - - -

(1) Math. Ann, 95, 1925, p. 340.

(2) Comm. Math., 30, 1956, p. 275.

(3) Comptes rendus, 266, série A, 1968, p. 1129.

(4) Comptes rendus, 266, série A, 1968, p. 1223.

Oslo, Mai 1970.