Théorèmes de finitude et d'annulation pour la cohomologie des schémas en caractéristique $p > 0$.

par

Christian Peskine et Lucien Szpiro

Le lecteur trouvera ici une rédaction des résultats nouveaux contenus dans une serie d'exposés que j'ai faite en Juin 1970 à l'Université d'Oslo.

Qu'il me soit permis de remercier ici l'institut de Mathématiques de l'Université d'Oslo et particulierement O.A. Laudal pour leur acceuil et leur aide.

Christian Peskine

Théorèmes de finitude et d'annulation pour la cohomologie des schémas en caractéristique $p > 0$.

§ 0. Introduction

Dans (3), Grothendieck fait la conjecture suivante (13.1.3) : Soit k un corps algébriquement clos, et soit X un sous schéma fermé de l'espace projectif $P = \mathbb{P}_k^n$ sur k. On suppose que X est equidimensionnel de dimension d et que X est localement une intersection complète dans P. Montrer que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $P-X$, les groupes de cohomologie $H^i(P-X, \mathcal{F})$ sont finis sur k pour $i \geq n-d$.

Dans (4), Hartshorne prouve cette conjecture lorsque k est de caractéristique 0 et lorsque le faisceau normal à X dans P est ample (en particulier lorsque X est non singulier en caracteristique 0). De plus, Hartshorne montre le resultat suivant :

Theoreme : Soit X un sous schéma fermé connexe de dimension ≥ 1 de $P = \mathbb{P}_k^n$. Alors pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur $P-X$, on a

$$H^{n-1}(P-X, \mathcal{F}) = 0 .$$

A ces enoncés globaux correspondent des enoncés locaux plus géneraux concernant la "finitude" de groupes de cohomologie locale dans un anneau régulier local. Notre intention est de démontrer ici deux théorèmes locaux qui auront pour corollaires la conjecture de Grothendieck et le théorème de Hartshorne en caracteristique $p > 0$ et qui plus généralement montreront que le problème de la nullité de l'avant dernier groupe de cohomologie dans le cas connexe est équivalent au problème de sa finitude.

§ 1. Sur l'homomorphisme de Frobénius.

Tous les anneaux considérés dans cette section sont noethériens de caractéristique $p > 0$.

Définition 1.1: *Soit A un anneau de caractéristique $p > 0$ (i.e. tel que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow A$). On appelle homomorphisme de Frobénius, et on ecrit $F : A \longrightarrow A$, l'homomorphisme $F(x) = x^p$ pour tout $x \in A$. On ecrit A^F l'anneau A muni de la structure de A-algèbre définie par F, c'est à dire que pour $x \in A^F$ et $\alpha \in A$, on a $\alpha \cdot x = \alpha^p x$.*

Définition 1.2: *Soit M un A-module. On appelle image réciproque de M par F, et on note F^*M le A^F-module $A^F \otimes_A M$, c'est à dire $A^F \otimes_A M$ muni de sa structure de A-module défini par l'isomorphisme $A \simeq A^F$.*

Notation : Pour la simplicité de la rédaction, nous poserons $M_{(o)} = M$, et nous ecrirons $M_{(i)}$ le A-module $F^*M_{(i-1)}$.

Proposition 1.3: *Soit M un A-module de type fini : Considerons une présentation finie de M*

$$(*) \qquad A^{r_1} \xrightarrow{\varphi} A^{r_o} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Soit (α_{ij}) la matrice de φ. Alors

$$(*n) \qquad A^{r_1} \xrightarrow{\varphi(n)} A^{r_o} \longrightarrow M_{(n)} \longrightarrow 0$$

ou $\varphi_{(n)}$ est la matrice $(\alpha_{ij}^{p^n})$, est une présentation finie de $M_{(n)}$.

De plus, si A est local, de corps résiduel k et si $r_o = \mathrm{rang}_k\ k \otimes_A M$, alors

$$r_o = \mathrm{rang}_k\ k \otimes_A M_{(n)} .$$

Il suffit évidemment de prouver la proposition pour $n = 1$. On applique le foncteur $A^F \otimes_A \cdot$ ā(*), et on oblient une suite éxacte

$$A^F \otimes_A A^{r_1} \xrightarrow{A^F \otimes_A \varphi} A^F \otimes_A A^{r_o} \longrightarrow M_{(1)} \longrightarrow 0$$

Mais comme $A^F \otimes_A \varphi = F(\varphi) = \alpha_{ij}^p$, on trouve le résultat annoncé. Lorsque A est local d'idéal maximal $\underline{m}$, dire que $r_o = \mathrm{rang}_k k \otimes_A M$, c'est dire que $\alpha_{ij} \in \underline{m}$ pour tout i,j, donc c'est dire que $\alpha_{ij}^p \in \underline{m}$ pour tout i,j, donc c'est dire que $r_o = \mathrm{rang}_k\, k \otimes_A M_{(1)}$.

Exemple 1.6: Soit $\underline{J}$ un ideal de A, et soit $x_1,\dots,x_s$ un systeme de générateurs de $\underline{J}$, alors $(A/\underline{J})_{(n)}$ est egal ā $A/x_1^{p^n},\dots,x_s^{p^n}$.

Proposition 1.5: Le foncteur image réciproque par l'homomorphisme de Frobenius commute á la localisation. De plus, si M est un A-module de type fini, alors F^*M a même support que M.

La premiere partie de la proposition est une conséquence du fait que pour tout idéal premier p de A, on a $(A_p)^F = (A^F)_p$.
La deuxieme partie resulte de ce que si A est local de corps residuel k, alors $k \otimes_A A^F \neq 0$.

Proposition 1.6: <u>Si</u> A <u>est un anneau régulier, l'image réciproque par l'homomorphisme de Frobenius est un foncteur exact. Autrement dit, pour toute suite éxacte</u>

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

<u>on obtient des suites éxactes</u>

$$0 \longrightarrow M'_{(n)} \longrightarrow M_{(n)} \longrightarrow M''_{(n)} \longrightarrow 0 .$$

Il suffit évidemment de prouver que A^F est plat sur A, ce qui est un problème local. On peut donc supposer que A est un anneau local. Mais alors $\text{prof } A^F = \text{prof } A$ implique que A^F est plat sur A (ceci même lorsque A^F n'est pas fini sur A).

Proposition 1.7: Si A est un anneau régulier, pour tout A-module de type fini M, il y a des isomorphismes (non fonctoriels) :

$$\mathrm{Ext}^i_A (M_{(n)}, A) \simeq (\mathrm{Ext}^i_A (M,A))_{(n)} \quad \text{pour tout } i .$$

En effet,

$$\mathrm{Ext}^i_A (M_{(1)}, A) \simeq \mathrm{Ext}^i_{A^F} (M \otimes_A A^F, A^F) \simeq (\mathrm{Ext}^i_A (M,A)) \otimes_A A^F .$$

§ 2. Théorème de finitude en caracteristique $p > 0$.

Théorème 2.1: Soit T un anneau local régulier de caractéristique $p > 0$.

Soit J un ideal de R et soit i un entier tels que :

1) Pour toute composante irreductible Y de $\operatorname{spec} R/J$, on a $i < \dim Y$.

2) Si U est l'ouvert complémentaire du point fermé dans $\operatorname{Spec} R$, alors R/J restreint à U est S_i (condition de Serre).

Alors, si n est la dimension de R, pour tout R-module de type fini M et pour tout entier $s \geq n-i$, les groupes de cohomologie locale $H^s_J(M)$ sont des R-modules artiniens.

Lemme 2.2: Il suffit de prouver que $H^s_J(R)$ est artinien pour $s \geq n-i$.

Raisonnons par récurrence descendante, ce que l'on peut faire car $H^s_J(\cdot) = 0$ pour $s > n$. Supposons que $H^s_J(R)$ est artinien pour $s \geq n-i$, et que pour tout R-module de type fini M, $H^s_J(M)$ est artinien pour $s > r \geq n-i$.

Soit N un R-module de type fini. Il éxiste une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^e \longrightarrow N \longrightarrow 0 .$$

On en déduit une suite exacte

$$H^r_J(R^e) \longrightarrow H^r_J(N) \longrightarrow H^{r+1}_J(K) .$$

Les deux modules exterieures de cette suite exacte à trois termes étant artinien, il en est de même du module centrale, et le lemme est démontré.

Rappelons que $H^s_{\underline{J}}(R) = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^s_R(R/J_n, R)$ pour tout système d'idéaux J_n définissant dans R la même topologie que les puissances $\underline{J}^n$ de l'idéal $\underline{J}$ (i.e. tels que sour tout n, il éxiste m tel que $\underline{J}^n \supset J_{m'}$ et $J_n \supset \underline{J}^{m'}$ pour $m' \geq m$).

Dans le paragraphe précédent nous avons défini $J_{(e)}$ comme l'image réciproque de $J_{(e-1)}$ par l'homomorphisme de Frobénius, en posant $J_{(o)} = \underline{J}$. Comme R est régulier, par 1.6, on a $J_{(e)} = J_{(e-1)}R^F$, donc les $J_{(e)}$ forment un système d'idéaux de R.

Lemme 2.3 : <u>Le système d'idéaux</u> $J_{(e)}$ <u>définit dans</u> R <u>la même topologie que les puissances</u> $\underline{J}^e$ de l'idéal $\underline{J}$.

En effet, si $\underline{J} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, alors $\underline{J}_{(e)} = (\alpha_1{}^{p^e}, \ldots, \alpha_r{}^{p^e})$, et on a évidemment $\underline{J}^e \supset J_{(e)}$ et $J_{(e)} \supset \underline{J}^{rp^e}$.

Lemme 2.4 : <u>Pour</u> $s \geq n-i$, <u>les modules</u> $\mathrm{Ext}^s_R(R/J_{(e)}, R)$ <u>sont de longueur finie pour tout</u> $e \geq 0$.

Comme R est régulier, $R/J_{(e)} = (R/\underline{J})_{(e)}$. D'après 1.7, il y a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^s_R((R/\underline{J})_{(e)}, R) \simeq (\mathrm{Ext}^s_R(R/\underline{J}, R))_{(e)} .$$

Comme par 1.5, $(\mathrm{Ext}^s_R(R/\underline{J},R))_{(e)}$ a même support que $\mathrm{Ext}^s_R(R/\underline{J},R)$, il suffit finalement de montrer que $\mathrm{Ext}^s_R(R/\underline{J},R)$ est de longueur finie pour $s \geq n-i$. Soit q un idéal premier non maximal de R. On veut prouver que $\mathrm{Ext}^s_{R_q}(R_q/\underline{J}R_q, R_q) = 0$ pour $s \geq n-i$. On peut

évidemment supposer $\underline{J} \subset q$, sinon il n'y a pas de problème. On sait qu'on a $\operatorname{prof}(R_q/\underline{J}R_q) \geq \inf(i, \dim R_q/\underline{J}R_q)$.
Soit $c = \inf(\dim Y_i)$, pour Y_i composante irreductible de $R/\underline{J}$.
Alors codimension de $R_q/\underline{J}R_q$ dans R_q est $\leq n-c$, donc $\dim R_q/\underline{J}R_q \geq \dim R_q - (n-c)$. On en deduit

$$\operatorname{prof}(R_q/JR_q) \geq \inf(i, \dim R_q - (n-c))$$

donc ,

$$\operatorname{pd}_{R_q}(R_q/\underline{J}R_q) \leq \sup(\dim R_q - i, n-c)$$

et comme $n-i > \dim R_q - i$ et $n-i > n-c$, $\operatorname{Ext}^s_{R_q}(R_q/\underline{J}R_q, R_q) = 0$ pour $s \geq n-i$.

Lemme 2.5 : <u>Soit</u> E <u>un module dualisant pour</u> R (i.e. <u>une enveloppe injective du corps residuel</u> k <u>de</u> R) , <u>alors les conditions suivantes sont équivalentes :</u>

1) $H^s_{\underline{J}}(R)$ <u>est artinien</u>
2) $\operatorname{Hom}_R(H^s_{\underline{J}}(R), E)$ <u>est un module de type fini sur le complété</u> $\hat{R}$ <u>de</u> R <u>pour l'idéal maximal</u>.
3) $\varprojlim_e \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}^s_R(R/J_{(e)}, R), E)$ <u>est un</u> $\hat{R}$-<u>module de type fini.</u>

1) <=> 2) est une dualité classique ((1), exposé IV). L'équivalence 2) <=> 3) est une conséquence immediate de l'isomorphisme de foncteurs $\varprojlim \operatorname{Hom}(\cdot, E) \simeq \operatorname{Hom}(\varinjlim \cdot, E)$.

Lemme 2.6 : <u>Dans la catégorie des</u> R-<u>modules de longueur finie, on a un isomorphisme de foncteurs:</u>

$$\operatorname{Hom}_R(\cdot, E) \simeq \operatorname{Ext}^n_R(\cdot, R) .$$

En effet, ces deux foncteurs sont exactes et coincident sur le corps residuel k de R. Cet isomorphisme est de plus canonique ((1), expose III).

Combinant les deux lemmes précedénts, on constate que pour prouver le théorème, il suffit de prouver que pour $s \geq n-i$

$$\varprojlim \mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/J_{(e)},R),R)$$

est un $\hat{R}$-module de type fini.

C'est une conséquence immediate du lemme et de la proposition qui suivent

Lemme 2.7 : Soit k le corps résiduel de R, alors le rang résiduel $\mathrm{rang}_k\, k \otimes_R \mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/J_{(e)},R),R)$ est indépendant de e.

D'aprés 1.7, il y a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/J_{(e)},R),R) \simeq (\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Ext}^s_R(R/\underline{J},R),R))_{(e)} .$$

Mais, d'aprés 1.3, pour tout R-module de type fini M, et pour tout entier e, on a $\mathrm{rang}_k\, k \otimes_R M = \mathrm{rang}_k\, k \otimes_R M_{(e)}$,

Proposition 2.8: Soit A un anneau local de corps résiduel k. Soit (M_e) un système projectif de R-modules de longueur finie, à rangs résiduels bornés (i.e. tels que $\mathrm{rang}_k\, k \otimes_R M \leq C$). Alors $\varprojlim_e M_e$ est un module de type fini sur le completé $\hat{A}$ de A pour l'idéal maximal.

Pour tout e , posons $P_e = \bigcap_{e' \geq e} \mathrm{Im}\,(M_{e'} \longrightarrow M_e)$.

Comme les modules M_e sont de longueures finies, le système projectif verifie la condition de Mittag-Leffler, c'est à dire qu'on a $P_e = \mathrm{Im}\,(M_{e'} \longrightarrow M_e)$ pour e'assez grand. On en déduit $\mathrm{rang}_k\, k \otimes_A P_e \leq C$ pour tout e. On sait que les modules P_e forment un système projectif surjectif tel que $\varprojlim P_e = \varprojlim M_e$. On peut donc remplacer le système M_e par le système P_e , autrement dit, on peut supposer que le système projectif M_e est surjectif. Alors la suite $\mathrm{rang}_k\, k \otimes_A M_e$ est croissante et borneé. Donc en "oubliant" un nombre fini de M_e , ou peut supposer que $\mathrm{rang}_k\, k \otimes M_e$ est constant egal à η . C'est à dire qu'on peut supposer que les homomorphismes surjectifs

$$(*) \quad M_{e'} \longrightarrow M_e \qquad (e' \geq e)$$

definissent des isomorphismes

$$k \otimes_A M_{e'} \xrightarrow{\sim} k \otimes_A M_e$$

Considerons une surjection

$$A^\eta \longrightarrow M_e \longrightarrow 0 .$$

On peut alors relever l'application $(*)$ en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A^\eta \arrow[r] \arrow[dr] & M_e \arrow[r] & 0 \\ & M_{e'} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

En tensorisant par k , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k^\eta \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & k \otimes_A M_e \arrow[r] & 0 \\ & k \otimes_A M_{e'} \arrow[u, "\wr"'] & \end{tikzcd}$$

qui montre que $k^{\eta} \longrightarrow k \otimes_A M_{e'}$ est un isomorphisme, donc que $A^{\eta} \longrightarrow M_{e'}$ est une surjection. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
A^{\eta} \arrow[r] & M_e \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
A^{\eta} \arrow[r] \arrow[u, equal] & M_{e'} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Il existe une suite croissante d'entiers $c(e)$ tels que si $\underline{m}$ est l'idéal maximal de A, on ait $\underline{m}^{c(e)} M_e = 0$.

On peut donc factoriser le diagramme précédent en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & \\
A^{\eta} \arrow[r] & A^{\eta}/\underline{m}^{c(e)}A^{\eta} \arrow[r] \arrow[u] & M_e \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
A^{\eta} \arrow[r] \arrow[u, equal] & A^{\eta}/\underline{m}^{c(e')}A^{\eta} \arrow[r] \arrow[u] & M_{e'} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit $K_e = \mathrm{Ker}\ A^{\eta}/\underline{m}^{c(e)}A^{\eta} \longrightarrow M_e$.

On obtient un système projectif de suites exactes:

$$0 \longrightarrow K_e \longrightarrow A^{\eta}/\underline{m}^{c(e)}A^{\eta} \longrightarrow M_e \longrightarrow 0$$

Tous les modules decrits ici etant de longueures finies, le système projectif K_e verifie la condition de Mittag Leffler.

On obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim K_e \longrightarrow \varprojlim A^{\eta}/\underline{m}^{c(e)}A^{\eta} \longrightarrow \varprojlim M_e \longrightarrow 0$$

On a donc une surjection de $\hat{A}$-modules

$$\hat{A}^{\eta} \longrightarrow \varprojlim M_e \longrightarrow 0$$

et la proposition est démontreé.

En corollaire du théorème local de finitude en caractéristique $p > 0$, on obtient un théorème global de finitude en caractéristique p, plus fort que le resultat general conjecturé par Grothendieck. Ce théorème, ou un resultat assez similaire a sans doute déja été démontré par R. Hartshorne, par des methodes géometriques.

Théorème 2.9 : Soit X un sous schéma fermé de l'espace projectif $P = \mathbb{P}_k^n$ sur un ccrps de caractéristique p. Soieut X_j les composantes irréductibles de X, et soit $d = \inf_j \dim X_j$.
Supposons que X est S_i avec $i \leq d$ (i.e pour tout $x \in X$, $\operatorname{prof} \mathcal{O}_{X,x} \geq \inf(i, \dim \mathcal{O}_{X,x})$).
Alors $H^s(P-X, \mathcal{F})$ est un k-espace vectoriel de type fini, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $P-X$, et pour tout entier $s \geq n-i$.
De plus, pour les mêmes valeurs de s,

$$H^s(P-X, \mathcal{F}(r)) = 0 \quad \text{pour } r \text{ assez grand.}$$

On a $P = \operatorname{Proj} A$ ou A est l'anneau gradué $k[T_0,\ldots,T_n]$. Soit $\underline{J}$ un ideal gradué de A definissant X, c'est à dire, tel que $X = \operatorname{Proj} A/\underline{J}$. Posons $B = A/\underline{J} = k[t_0,\ldots,t_n]$, où t_i est l'image de T_i par la surjection $A \longrightarrow A/\underline{J}$.

Lemme 2.10 : Pour $j = 0,1,\ldots,n$, on a

$$\operatorname{Spec} B_{t_j} \simeq X_{t_j}[T,T^{-1}].$$

Ce lemme est démontré dans E.G.A chap 2. 8.3.6.

Lemme 2.11 : Pour tout A-module de type fini M, les groupes de cohomologie locale $H^s_{\underline{J}}(M)$ sont des A-modules artiniens à support réduit à l'ideal maximal $(T_0,\ldots,T_n)$ pour $s \geq n+1-i$.

Par la classique récurrence descendante, que nous avons deja utilisé. pour prouver 2.2, on voit qu'il suffit de montrer que $H^s_{\underline{J}}(A)$ est artinien à support dans l'origine pour $s \geq n+1-i$.
On sait que $H^s_{\underline{J}}(A) = \varprojlim_e \mathrm{Ext}^s_A(A/J_{(e)},A)$, et que pour tout e le module $\mathrm{Ext}^s_A(A/J_{(e)},A)$ a même support que $\mathrm{Ext}^s_A(A/\underline{J},A)$.
Montrons d'abord que $H^s_{\underline{J}}(A)$ a son support réduit à l'idéal maximal $(T_o,\dots,T_n)$ pour $s \geq n+1-i$. Pour cela, il suffit de montrer que $\mathrm{Ext}^s_A(A/\underline{J},A)$ a son support réduit à $(T_o,\dots,T_n)$ pour $s \geq n+1-i$.
Soit donc q un idéal premier de A different de $(T_o,\dots,T_n)$.
On veut montrer que

$$\mathrm{Ext}^s_{A_q}(A_q/\underline{J}A_q,A_q) = 0 \qquad \text{pour } s \geq n+1-i .$$

On peut évidemment supposer que $q \supset \underline{J}$, et dans ce cas, il suffit de prouver que $dp_{A_q}(A_q/JA_q) < n+1-i$.

Rappelons que $B = A/\underline{J}$. Par le lemme 2.10, on voit que si q est non maximal, on a

$$\text{prof } B_q \geq \inf(i, \dim B_q) ,$$

et que si q est maximal, on a

$$\text{prof } B_q \geq \inf(i+1, \dim B_q) .$$

Donc si q est non maximal, on a

$$dp_{A_q} B_q \leq \sup(\dim A_q - i, \dim A_q - \dim B_q)$$

mais $\dim A_q - i < n+1-i$ car $\dim A_q < n+1$,

et $\dim A_q - \dim B_q = \mathrm{codim}_{A_q} B_q \leq n-d < n+1-d \leq n+1-i$.

Par ailleurs, si q est maximal

$$dp_{A_q} B_q \leq \sup(\dim A_q - (i+1), \dim A_q - \dim B_q) .$$

Mais $\dim A_q - (i+1) = n+1-(i+1) = n-i < n+1-i$,

et $\dim A_q - \dim B_q = \operatorname{codim}_{A_q} B_q \leq n-d < n+1-d \leq n+1-i$.

Maintenant, comme $H^s_{\underline{J}}(A)$ est à support réduit à $\underline{m} = (T_o,\ldots,T_n)$ pour $s \geq n+1-i$, on a

$$(*) \quad H^s_{\underline{J}}(A) = G^s_{\underline{J}A_{\underline{m}}}(A_{\underline{m}}) \qquad \text{pour} \quad s \geq n+1-i .$$

Mais alors, $A_{\underline{m}}$ est un anneau régulier local de dimension $n+1$, et par 2.10 on voit que $A_{\underline{m}}/\underline{J}A_{\underline{m}}$ est S_i dans l'ouvert complementaire du point fermé de Spec $A_{\underline{m}}$, avec $i < \dim Y$ pour toute composante irreductible Y de Spec $A_{\underline{m}}/\underline{J}A_m$. On peut donc appliquer le théorème local de finitude qui prouve le lemme compte tenu de $(*)$.

Le lemme étant démontré, le théorème 2.9 est une conséquence de la suite exacte de cohomologie locale, appliquée aux schémas projectifs sur k .

En effet, on peut prolonger tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $P-X$ en un faisceau cohérent sur P avec lequel on peut l'identifier sans changer le sens du théorème. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur P , on sait qu'il éxiste un A-module gradué de type fini M le definissant. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^o_{\underline{J}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow \sum_e H^o(P-X, \mathcal{F}(e)) \longrightarrow H^1_{\underline{J}}(M) \longrightarrow 0,$$

et des isomorphismes

$$\sum_{e} H^r \ (P-X, \widehat{\mathcal{F}}(e)) \simeq H_J^{r+1} \ (M) \qquad \text{pour} \quad r \geq 1 \ .$$

On en déduit que $\sum_{e} H^s \ (P-X, \widehat{\mathcal{F}}(e))$ est un A-module artinien à support réduit à l'origine pour $s \geq n-i$, donc que $H^s(P-X, \widehat{\mathcal{F}})$ est un k-espace vectoriel de type fini pour $s \geq n-i$, et que $H^s \ (P-X, \widehat{\mathcal{F}}(e)) = 0$, pour $s \geq n-i$ et pour e assez grand.

§ 3. Relations avec la cohomologie des schémas formels.

Rappelons d'abord le résultat bien connu suivant qui est un corollaire de E.G.A. Chap. 03. Prop. 13.3.1.

Proposition 3.1 : Soit X un schéma noethérien, et soit $\hat{X}$ le completé formel de X le long d'une partie fermée Y de X, definie par un faisceau d'idéaux coherents J de $\mathcal{O}_X$. Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ un faisceau cohérent sur X et soit $\tilde{\mathcal{F}}_n = \tilde{\mathcal{F}}/J^{n+1}\tilde{\mathcal{F}}$.
Soit U un ouvert de X et soit $\hat{U}$ son completé formel le long de $Y \cap U$.
Alors les homomorphismes canoniques

$$h_i : H^i(\hat{U}, \varprojlim \tilde{\mathcal{F}}_n) \longrightarrow \varprojlim H^i(U, \tilde{\mathcal{F}}_n)$$

sont surjectifs pour $i > 0$.
De plus, si le systeme projectif $(H^{i-1}(U, \tilde{\mathcal{F}}_n))_n$ verifie la condition de Mittag-Leffler, alors h_i est un isomorphisme.

Proposition 3.2 : Soit R un anneau local complet de Corenstein de dimension d.
Soit $\underline{m}$ l'ideal maximal de R et soit E une enveloppe injective du corps résiduel k de R (i.e. un module dualisant de R).
Soit J un ideal de R.
Posons $U = \operatorname{Spec} R - \{\underline{m}\}$ et $Y = V(J) \cap U$.
Alors, si $\hat{U}$ est le completé formel de U le long de Y,

il y a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(H^d_{\underline{J}}(R),E) \to R \to \Gamma(\hat{U},\Theta_{\hat{U}}) \to \mathrm{Hom}_R(H^{d-1}_{\underline{J}}(R),E) \to 0$$

et des isomorphismes :

$$H^i(\hat{U}, \Theta_{\hat{U}}) \simeq \mathrm{Hom}_R(H^{d-(i+1)}_{\underline{J}}(R),E) .$$

En effet, considerons le système projectif de suites exactes :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow H^o_{\underline{m}}(R/\underline{J}^n) \longrightarrow R/\underline{J}^n \longrightarrow \Gamma(U,R/\underline{J}^n) \longrightarrow H^1_{\underline{m}}(R/\underline{J}^n) \longrightarrow 0.$$

Comme le système projectif $R/\underline{J}^n$ verifie (M.L), on obtient, en passant à la limite une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \varprojlim_n H^o_{\underline{m}}(R/\underline{J}^n) \longrightarrow R \longrightarrow \Gamma(\hat{U},\Theta_{\hat{U}}) \longrightarrow \varprojlim H^1_{\underline{m}}(R/\underline{J}^n) \longrightarrow 0.$$

De même, les isomorphismes

$$(**) \qquad H^i(U,R/\underline{J}^n) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_{\underline{m}}(R/\underline{J}^n) , \quad \text{pour} \quad i \geq 1 ,$$

donnent, en passant à la limite, des isomorphismes

$$(1') \qquad \varprojlim H^i(U,R/\underline{J}^n) \simeq \varprojlim H^{i+1}_{\underline{m}}(R/\underline{J}^n) \quad \text{pour} \quad i \geq 1 .$$

Comme $H^s_{\underline{m}}(R/\mathfrak{a})$ est artinien pour tout ideal $\mathfrak{a}$ de R et pour tout entier $s \geq 0$, (*) et (**) montrent que les systèmes projectifs $(H^i(U,R/\underline{J}^n))_n$ verifient tous (M.L).
Donc, par 3.1, on a (2) $H^i(\hat{U}, \Theta_{\hat{U}}) = \varprojlim_n H^i(U,R/\underline{J}^n)$ pour $n \geq 0$.

Le théorème de dualité locale donne des isomorphismes fonctoriels:

$$H^s_{\underline{m}}(\cdot) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^{d-s}_R(\cdot, R),E) .$$

Donc $$\varprojlim_n H^s_{\underline{m}}(R/\underline{J}^n) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^{d-s}(R/\underline{J}^n,R),E)$$

$$\text{"} \qquad \simeq \mathrm{Hom}_R(\varinjlim \mathrm{Ext}_R^{d-s}(R/\underline{J}^n,R),E)$$

(3) $$\text{"} \qquad \simeq \mathrm{Hom}_R(H^{d-s}_{\underline{J}}(R),E) \ .$$

En combinant (1), (2), (3) on trouve la suite exacte, et en combinant (1'), (2), (3) on trouve les isomorphismes.

Corollaire 3.3 : Soit R un anneau local complet de Corenstein de dimension d. Soit U l'ouvert complémentaire du point fermé dans Spec R. Soit $\underline{J}$ un idéal de R. Soit r un entier tel que $0 \leq r \leq d$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $H^s_{\underline{J}}(M)$ est un R-module artinien, pour tout R-module de type fini M, et tout entier $s \geq d-r$.

2) $H^s_{\underline{J}}(R)$ est un R-module artinien pour $s \geq d-r$.

3) Si $\hat{U}$ est le completé formel de U le long de $V(\underline{J}) \cap U$, alors $H^i(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est un R-module de type fini pour $i \leq r-1$.

Nous avons deja demontré 1) <=> 2) par récurrance descendante. l'équivalence 2) <=> 3) est une conséquence immediate de la proposition.

§ 4: Sur l'avant dernier groupe de cohomologie locale.

Théorème 4.1. Soit R un anneau local régulier complet de dimension d, à corps résiduel séparablement clos. Soit U l'ouvert complementaire du point fermé dans $\operatorname{Spec} R$, et soit J un idéal de R tel que $V(J) \cap U$ soit connexe de dimension ≥ 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $H^s_J(M)$ est un R-module artinien pour $s \geq d-1$ et pour tout R-module de type fini M.
2) $H^s_J(R)$ est un R-module artinien pour $s \geq d-1$.
3) $H^s_J(M) = 0$ pour $s \geq d-1$ et pour tout R-module M.
4) $H^s_J(R) = 0$ pour $s \geq d-1$.
5) $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est fini sur R, où $\hat{U}$ est le complété de U le long de $V(J) \cap U$.
6) L'homomorphisme canonique $R \longrightarrow H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est un isomorphisme.

Les conditions 1), 2) et 5) sont équivalentes par 3.3. L'équivalence des conditions 3), 4) et 6) est une conséquence de la suite exacte de 3.2, compte tenu du théorème local de Lichtenbaum qui entraine ici $H^d_J(\cdot) = 0$. Comme on a évidemment 6) => 5), il reste à demontrer 5) => 6).

On sait qu'on a $H^0(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) = \varprojlim_{x \in U \cap V(J)} \mathcal{O}_{\hat{U},x}$. (*)

Rappelons que si $x \in U \cap V(J)$, et si q_x est l'idéal premier de R correspondant à x, alors $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est un anneau local, dont le completé est $\widehat{R_{q_x}}$, completé de l'anneau local R_{q_x} pour l'idéal

$q_x R_{q_x}$. On en déduit que toutes les flèches apparaissant dans la limite projective (*) sont injectives.

Lemme 4.2 : <u>Pour tout</u> $x \in U \cap V(J)$, <u>l'homomorphisme</u>
$H^o(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{U},x}$ <u>est injectif</u>.

Il suffit évidemment de montrer que si α est un élément non nul de $H^o(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$, son image dans $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est non nulle pour tout $x \in U \cap V(\underline{J})$.

Comme $\alpha \neq 0$, il existe $x \in U \cap V(J)$ tel que l'image de α dans $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ soit non nulle. Soit $y \in U \cap V(J)$, et soient q_x et q_y les idéaux premiers de R correspondants à x et y . Comme $U \cap V(J)$ est connexe, il existe $z_1,\ldots,z_s \in U \cap V(\underline{J})$ ayant pour idéaux premiers correspondants $q_{z_1},\ldots,q_{z_s}$ tels que si on considere la suite d'idéaux premiers $q_x, q_{z_1},\ldots,q_{z_s}, q_y$, il y ait toujours une relation d'inclusion entre deux idéaux successifs. On en déduit que si l'image de α dans $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est non nulle, alors l'image de α dans $\mathcal{O}_{\hat{U},y}$ est non nulle. Le lemme est demontré.

Lemme 4.3 : $H^o(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ <u>est un anneau integralement clos fini sur</u> R.
Comme pour $x \in U \cap V(\underline{J})$, le completé de $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est un anneau regulier, $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$ est integralement clos. Soit α est un element du corps des fractions de $H^o(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ entier sur $H^o(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$. Par 4.2, c'est un element du corps des fractions de $\mathcal{O}_{\hat{U},x}$, donc $\alpha \in \mathcal{O}_{\hat{U},x}$ et ceci pour tout $x \in U \cap V(\underline{J})$. On en déduit que $\alpha \in H^o(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$.
Le fait que $H^o(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est fini sur R n'est rien d'autre que l'hypothese.

Lemme 4.4. : Spec $H^{o}(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ <u>est un revêtement étale de</u> Spec R.

Comme R est un anneau régulier, d'apres le théorème de pureté il suffit de prouver que tout idéal premier de hauteur 1 de l'anneau $A = H^{o}(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est étale au dessus de R . Pour tout $x \in U \cap V(\underline{J})$, soit q_x l'idéal premier de R correspondant. Posons $p_x = A \cap q_x \mathcal{O}_{\hat{U},x} = A \cap q_x \widehat{R_{q_x}}$. Les injections $R_{q_x} \hookrightarrow A_{p_x} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\hat{U},x} \hookrightarrow \widehat{R_{q_x}}$ montrent que p_x est étale au dessus de R.

Comme $A = \varprojlim_{x \in U \cap V(\underline{J})} \mathcal{O}_{\hat{U},x}$, on a $A = \bigcap_{x \in V(\underline{J}) \cap U} A_{p_x}$.

On en déduit que tout idéal premier de hauteur 1 de A est contenu dans un p_x . Comme l'ensemble des points ou le morphisme Spec A $\longrightarrow$ Spec R est étale, est ouvert, on en déduit que tout idéal premier de hauteur 1 de A est étale au dessus de R , et le lemme est demontré.

Mais comme R est complet à corps résiduel séparablement clos, le seul revêtement etale connexe de R est R lui meme, donc l'homomorphisme $R \longrightarrow H^{o}(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$ est bien un isomorphisme et le théorème est demontré.

Corollaire 4.5 : <u>Soit</u> R <u>un anneau local complet régulier de caractéristique</u> $p > 0$, <u>de dimension</u> d , <u>à corps résiduel séparablement clos</u>.

<u>Soit</u> U <u>l'ouvert complémentaire du point fermé de</u> Spec R, <u>et soit</u> <u>J</u> <u>un idéal de</u> R <u>tel que</u> $V(\underline{J}) \cap U$ <u>soit connexe de dimension</u> ≥ 1 . <u>Alors</u>

1) <u>Les foncteurs</u> $H^{d-1}_{\underline{J}}(\cdot)$ et $H^{d}_{\underline{J}}(\cdot)$ <u>sont nuls</u>
2) <u>Si</u> $\hat{U}$ <u>est le completé formel de</u> U <u>le long de</u> $V(J) \cap U$, <u>l'homomorphisme canonique</u>

$$R \longrightarrow \Gamma(\hat{U}, \mathcal{O}_{\hat{U}})$$

<u>est un isomorphisme</u>.

En effet, le problème étant topologique, on peut supposer que $\underline{J}$ est une intersection d'idéaux premiers.
Par le théorème locale de Lichtenbaum $H^d_{\underline{J}}(\cdot) = 0$.
Comme pour tout composante irreductible Y de Spec $R/\underline{J}$, on a $1 < \dim Y$, on peut applique le théorème local de finitude en caractéristique p (2.1), donc $H^{d-1}_{\underline{J}}(R)$ est un R-module artinien. Mais par le théorème 4.1, ceci implique $H^{d-1}_{\underline{J}}(\cdot) = 0$, ainsi que la proprieté 2) qui n'est autre que la proprieté 6) de 4.1.
Donnons enfin le corollaire global de ce resultat local.

Corollaire 4.6 : <u>Soit</u> k <u>un corps séparablement clos de caracteristique</u> p .
<u>Soit</u> X <u>un sous schéma fermé connexe de dimension</u> ≥ 1 <u>de l'espace projectif</u> $P = \mathbb{P}_k^n$.
<u>Alors pour tout faisceau quasi-cohérent</u> $\hat{F}$ <u>sur</u> $P-X$, <u>on a</u>

$$H^{n-1}(P-X, \hat{F}) = 0 .$$

On sait deja par le théorème de Lichtenbaum que $H^n(P-X, \hat{F}) = 0$.
Tout faisceau quasi-coherent étant limite inductive de faisceau cohérent, il suffit de montrer que $H^{n-1}(P-X, \hat{F}) = 0$ pour tout faisceau coherent $\hat{F}$ sur $P-X$. Mais ce résultat se déduit du résultat local precedent éxactement comme le théorème global de finitude se déduit du théorème local de finitude.

Bibliographie

1. H. Bass. On the Ubiquity of Corenstein rings
Math. Zeitz. 82 (1963).

2. A. Grothendieck. Elements de géometrie Algébrique
Publ. Math. IHES. 4, 8, 11.

3. A. Grothendieck. Sémonaire de Géometrie Algébrique 1962
Notes polycopiées, IHES.

4. R. Hartshorne. Cohomological dimension of Algebraic Varieties
Annals of Mathematics. Vol. 88, No 3.

5. C. Peskine et L. Szpiro. A theorem on intersection
(à paraitre)

6. P. Samuel. Seminaire d'Algebre Commutative 66/67
Secrétariat mathématiques, Institut Henri Poincaré, Paris.

7. J.P. Serre. Algebre locale - multiplicités.
Lecture Notes 11, Springer 1965.

Table des Matières.