TOUT IDÉAL PREMIER D'UN ANNEAU NOETHÉRIEN EST ASSOCIÉ À UN IDÉAL ENGENDRÈ PAR TROIS ÉLÉMENTS.

Par Tor H. Gulliksen*

Rèsumé: Soit $\mathfrak{p}$ un ideal premier d'un anneau noethérien. Nous prouvons qu'il existe trois éléments f_1, f_2, f_3 dans $\mathfrak{p}$, tels que $\mathfrak{p}$ est associé à l'idéal (f_1, f_2, f_3).

Théorème: Soit R un anneau local noetherien et soit M un R-module de type fini. Il existe un idéal $\mathfrak{a} \neq R$ engendré par trois éléments tel que $\operatorname{prof}_R(M/\mathfrak{a}M) = 0$.

On peut evidemment supposer $\operatorname{prof}_R(M) \geq 4$. Soit $d = \dim M$, et soit $x_1, \ldots, x_d$ un système de paramètres de M tel que x_1, x_2 soit une suite M-régulière. On vérifie que

$$(x_1x_2)^{c-1}M \not\subset (x_1^c, x_2^c)M \qquad \text{pour} \quad c \geq 1 .$$

Posons $\mathfrak{q} = (x_3, \ldots, x_d)$. Fixons $c = 2^{d-3}$. Comme $(x_1^c, x_2^c)M$ est fermé, dans M, pour la topologie $\mathfrak{q}$-adique, il existe un entier N tel que

$$(x_1x_2)^{c-1}M \not\subset (x_1^c, x_2^c)M + \mathfrak{q}^N M .$$

Posons pour $i = 1,2$, $x_i^{(o)} = x_i$, et pour $3 \leq i \leq d$, $x_i^{(o)} = x_i^N$. Par induction, on définit

$$x_1^{(n+1)} = (x_1^{(n)})^2 - (x_3^{(n)})^2$$

$$x_2^{(n+1)} = (x_2^{(n)})^2 - (x_4^{(n)})^2$$

$$x_3^{(n+1)} = x_1^{(n)}x_4^{(n)} - x_2^{(n)}x_3^{(n)}$$

$$u^{(n+1)} = x_1^{(n)}x_2^{(n)} - x_3^{(n)}x_4^{(n)}$$

(*) L'auteur remercie MM. D. Ferrand et C. Peskine pour des discussions fructueuses sur ce sujet au cours de la "Nordic Summerschool in Mathematics, August 5.-25. 1970".

et pour $4 \leq j \leq d-(n+1)$

$$x_j^{(n+1)} = u^{(n+1)} x_{j+1}^{(n)} .$$

Posons pour $0 \leq n \leq d-3$, $\mathfrak{a}^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_{d-n}^{(n)})$ et remarquons que $\mathfrak{a}^{(d-3)}$ est engendré par trois éléments. Pour montrer notre théorème il nous suffira donc de montrer que $\mathrm{prof}_R(M/\mathfrak{a}^{(d-3)}M) = 0$. On vérifie que pour $0 \leq n \leq d-4$ on a $u^{(n+1)}\mathfrak{a}^{(n)} \subset \mathfrak{a}^{(n+1)}$. Posons alors $\gamma = \prod_{n=1}^{d-3} u^{(n)}$. On a $\gamma\mathfrak{a}^{(o)} \subset \mathfrak{a}^{(d-3)}$. Comme l'idéal $\mathfrak{a}^{(o)}$ est engendré par un système de paramètres de M $(\gamma M + \mathfrak{a}^{(d-3)}M)/\mathfrak{a}^{(d-3)}M$ est un module de longeur fini. Donc il suffit de montrer que $\gamma M \not\subset \mathfrak{a}^{(d-3)}M$.

Si l'on pose $\mathfrak{q}' = (x_3^N, \ldots, x_d^N)$, on voit facilement par induction sur n que :

$$x_i^{(n)} \equiv x_i^{2^n} \pmod{\mathfrak{q}'} \qquad i = 1,2$$

$$x_i^{(n)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}'} \qquad i > 2$$

$$u^{(n+1)} \equiv (x_1x_2)^{2^n} \pmod{\mathfrak{q}'}$$

Donc $\qquad \gamma \equiv (x_1x_2)^{c-1} \pmod{\mathfrak{q}'}$

et $\qquad \mathfrak{a}^{(d-3)} \subset (x_1^c, x_2^c) + \mathfrak{q}'$

Mais alors, $\gamma M \subset \mathfrak{a}^{(d-3)}M$ implique

$$(x_1x_2)^{c-1}M \subset (x_1^c, x_2^c)M + \mathfrak{q}'M$$

ce qui est impossible d'apres le choix de N puisque $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}^N$.

Corollaire : Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau noethérien R . Alors, il existe des éléments f_1, f_2, f_3 de $\mathfrak{p}$ tels que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/(f_1, f_2, f_3))$.

Remarque : On voit facilement que si R est un anneau local régulier de dimension au moins trois, et si f_1 et f_2 sont des éléments non inversibles de R , on a $\mathrm{prof}_R(R/(f_1, f_2)) \geq 1$.

Université d'Oslo
Blindern, Oslo 3
Norvège.