ISBN 82-553-0451-7

Mathematics
No 8 - June 9 1981

UNE CLASSE DE COURBES GAUCHES QUI N'ADMETTENT PAS DE PROJECTION UNIBRANCHE

by

Gianni Sacchiero *

Istituto Matematico and Institute of Math.
Università di Ferrara University of Oslo
Via Machiavelli, 35 Norway

* Ce travail a été fait alors que l'auteur bénéficiait d'une bourse d'étude du CNR.

PREPRINT SERIES - Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

A class of space curves that do not admit a cuspidal projection.

Let X be a curve of degree ≥ 5 in $\mathbb{P}^n (n \geq 4)$, and assume X spans $\mathbb{P}^n$. It is shown that if X is smooth, with no points of inflection and no hyperosculating planes, then a generic projection of X in $\mathbb{P}^3$ does not admit a cuspidal projection in a plane.

UNE CLASSE DE COURBES GAUCHES QUI N'ADMETTENT PAS DE PROJECTION UNIBRANCHE

Soit X une courbe gauche de degré ≥ 5 de $\mathbb{P}^n (n \geq 4)$. On démontre que lorsque X est lisse sans points d'inflexion et sans plans d'hyperosculation une projection générique de X dans $\mathbb{P}^3$ n'admet pas de projection unibranche dans un plan.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et $C \subset \mathbb{P}^3_k$ une courbe lisse connexe. Une projection $Cq = hq(C)$ de centre $q \in \mathbb{P}^3 - C$, est dite unibranche si elle est birationelle à C et n'admet que des points de rebroussement comme singularités.

Dans ([1]), R. Piene démontre que si $\delta(C) \leq 3$ (avec $\delta(C) = (d-1)(d-2)/2 - g$ où $d = \deg C$ et $g = \text{genre}\, C$), alors C admet toujours une projection unibranche; de plus elle conjecture que si C est une courbe suffisamment générale de $\delta \geq 4$, elle n'en admet pas. Nous démontrons ici le résultat suivant:

THÉORÈME 1. - Soit $X \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 4$, une courbe lisse, sans points d'inflexion et sans plans d'hyperosculation. Supposons $\delta \geq 4$. Si C est une projection générique de X dans $\mathbb{P}^3$, alors C n'admet pas de projection unibranche.

REMARQUE: On verra (Prop. 3) que toute courbe $X \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 4$, linéairement normale de degré $d \geq 2g+3$ verifie les hypothèses du théorème 1.

Je veux ici exprimer mes remerciements à R. Piene pour de nombreuses et éclaircissantes discussions sur ce sujet.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une courbe lisse et irréductible, pour tout $p \in X$ il éxiste une représentation paramétrique locale affine de la forme

$$\begin{cases} x_i = a_i\, t^{l_i+i} + \text{(facteurs de degré plus grand)} \\ i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

avec $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n$. On dit alors ([2]) que p est un point de type $(l_1+1,\ l_2+2,\ldots,l_n+n)$ où l_i+i est l'ordre de contact de l'espace linéaire de dimension i osculateur à X en p. Si $l_1 = l_2 = \ldots = l_m = 0$ on dit que X est m-lisse en p et si X est m-lisse en tous ses points on dit que X est m-lisse. Les points n-lisses sont appelés points ordinaires et finalement les points d'hyperosculation ordinaires sont ceux qui verifient $l_{n-1} = 0$ et $l_n = 1$.

Notons tp la droite tangente à C en un point p de C. On sait que si C n'a que des hyperosculations ordinaires, deux types au plus de point de rebroussement sont possibles pour Cq:

a) si $p \in C$ est ordinaire et $q \in tp$, alors $hq(p)$ est de type $(2,3)$ (rebroussement ordinaire);

b) si $p \in C$ est d'hyperosculation et $q \in tp$, alors $hq(p)$ est de type $(2,4)$ (rebroussement ramphoide). Dans ce cas ([1]) on peut trouver une représentation paramétrique de Cq au voisinage de $hq(p)$ de la forme

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = at^4 + (\text{puissances paires de } t) + bt^{2s+3} + \dots \end{cases}$$

On dira alors que le ramphoide est du type s. Cette singularité absorbe $s+1$ points doubles ordinaires.

Pour démontrer le théorème il suffit de considérer le cas $n = 4$. En effet une projection générique dans $\mathbb{P}^4$ d'une courbe 3-lisse de $\mathbb{P}^n$, $n \geq 5$, est une courbe 3-lisse de $\mathbb{P}^4$.

Étant donné que $\delta \geq 4$ on a $d \geq 5$. Pour $d = 5,6$ on peut voir qu'il existe seulement un nombre fini de droites de $\mathbb{P}^4$ qui donnent lieu par projection (centrée en cette droite) à une courbe plane avec δ rebroussements ordinaires. Au contraire dans le cas $d \geq 7$ il n'existe pas de projection avec δ rebroussements ordinaires. En effet considérons S^1_C la développable des tangentes de la courbe X. C'est une surface de $\mathbb{P}^4$ de degré $r_1 = 2d + 2g - 2$ ([2]). Il suffit de vérifier que chaque droite de $\mathbb{P}^4$ coupe S^1_X dans un nombre de points (pris avec multiplicité) strictement inférieur à δ. Mais une droite coupe S^1_X, au maximum, dans $r_1 - 3$ points (sauf pour $g=0$). Donc si $\delta < r_1 - 2$ on obtient $g > (d^2 - 7d + 10)/3$, mais, d'après la majoration du genre de Castelnuovo ([3]), on a $g \leq (d^2 - 5d + 6)/6$. On en deduit $d \leq 6$. Dans le cas $g = 0$ avec la même méthode on obtient $d \leq 7$, mais on sait qu'une courbe plane rationnelle de degré 7 ne peut pas avoir $\delta = 15$ rebroussement ordinaires.

Comme pour une courbe de $\mathbb{P}^4$ on a toujours $\delta \neq 4$, on peut supposer $\delta \geq 5$ et le théorème 1 est une conséquence du lemme suivant:

LEMME 2. - Soit $X \subset \mathbb{P}^4$ une courbe 3-lisse. Il existe un ouvert non vide $V \subset \mathbb{P}^4$ tel que pour tout $v \in V$, la projection C, de centre v, de X dans $\mathbb{P}^3$, vérifie:

(1) C a seulement des points d'hyperosculation ordinaire;

(2) si $p \in C$ est un point d'hyperosculation alors pour tout $q \in tp$ on a:

(a) $hq(p)$ est un ramphoide du premier type de Cq;

(b) il existe au plus une autre tangente à C passant par q.

Démonstration. - (1) est bien connu.

(2)-(a). Soit $u \in X$ un point ordinaire; considérons une représentation paramétrique locale

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a_1 t + \dots \\ y = b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots \\ w = c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots \\ z = d_4 t^4 + d_5 t^5 + \dots , \end{cases}$$

avec $a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 \cdot d_4 \neq 0$. $H_u = \{z = 0\}$ est l'hyperplan osculateur à X en u. Soit $v \in H_u$ et h_v le projection dans l'espace d'équation $w = 0$. Donc on supposera $v = (v_x, v_y, v_w, v_z)$ avec $v_z = 0$ et $v_w \neq 0$. L'equation locale de C au point $p = h_v(u)$ devient

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a_1 v_w t + \dots \\ y = b_2 v_w t^2 + (b_3 v_w - c_3 v_y) t^3 + \dots \\ z = d_4 v_w t^4 + d_5 v_w t^5 + \dots \end{cases}$$

En projetant alors dans $\mathbb{P}^2$ par un point de $tp = \{y = z = 0\}$ on obtient un ramphoide de type $s \geq 2$ si et seulement si ([1], lemme 1) $b_2 d_5 v_w^2 - d_4 v_w (b_3 v_w - c_3 v_y) = 0$ et donc

(3) $$(b_2 d_5 - b_3 d_4) v_w + c_3 d_4 v_y = 0$$

La condition (3) et $v_z = 0$ definissent un plan P_u. Alors (2)-(a) est verifiée lorsqu'on prend v dans l'ouvert

$$V' = \mathbb{P}^4 - \Big(\Big(\bigcup_{u \in X} P_u \Big) \cup \Big(\bigcup_i H_i \Big) \Big)$$

où les H_i (en nombre fini) sont les hyperplans d'hyperosculation de X.

(2)-(b). Soit $M \subset \mathbb{P}^4$ le sousensemble défini de la façon suivante:

$v \in M$ si et seulement si sur la courbe C correspondante il existe un point d'hyperosculation u tel que sur la droite tangente t_u il y a, au moins, un point triple pour S_C^1.

Soit maintenant $\mathrm{Tris}(S_X^1)$ la sousvarieté de la Grassmanienne formée des droites trisécantes à S_X^1. Considérons l'ensemble $M' \subset \mathbb{P}^4 \times X \times \mathrm{Tris}(S_X^1)$ défini par

$$M' = \{(v,u,L) \in \mathbb{P}^4 \times X \times \mathrm{Tris}(S_X^1) / v \in L,\ L \subset H_u,\ L \cap t_u \neq \emptyset\}$$

Considerons les projections

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathbb{P}^4 & & X \end{tikzcd}$$

On a $p_1(M') = M$. De plus si $u \in X$, $p_2^{-1}(u)$ est de dimension 2. Pour le voir il faut considérer les droites trisécantes à S_X^1, contenues dans H_u et qui coupent t_u. On a $H_u \cap S_X^1 = t_u \cup D_u$ où D_u est une courbe dans H_u et les trisécantes que l'on cherche coïcident avec les cordes de D_u qui coupent t_u. On voit donc que $\dim M' = 3$ et, par conséquent, $\dim M = 3$.

La proposition suivante nous permet de déterminer une classe de courbes satisfaisant les hypothèses du théorème.

PROPOSITION 3. - Soit $X \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 4$, lineairement normale. Si $0 < i < d - 2g + 1$, alors X est i-lisse.

Démonstration. Soient $p \in X$ un point de type $(l_1+1, l_2+2, \ldots, l_n+n)$ et T l'espace osculateur en p de dimension $i-1$. Le système linéaire des hyperplans contenant T coupe sur X une série linéaire de degré $\leq d - i - l_i$. En utilisant le théorème de Clifford on peut voir que cette série est non spéciale. Finalement le théorème de Riemann-Roch donne $l_i = 0$.

[1] R. PIENE, Cuspidal projections of space curves, à paraitre dans Math. Ann. (1981).

[2] R. PIENE, Real and complex singularities, Oslo 1976. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1977, p. 475.

[3] G. CASTELNUOVO, Rend. Circ. Mat. Palermo, t. VII, 1893.