Matematisk Seminar
Universitetet i Oslo

Nr. 3.
februar 1964.

Produits dans la théorie des limites projectives et inductives.

par
Olav Arnfinn Laudal

Introduction. Le but de cet exposé est de montrer comment se comportent les produits dans la théorie des limites projectives et inductives.
Ces produites existent, comme on sait, d'après la théorie générale des complexes semi-simpliciaux, au moins dans des cas particuliers. Nous allons montrer qu'ils satisfont à des relations bien agréables par rapport aux applications, et par rapport aux suites spectrales qui généralisent entre autres l'isomorphisme de Thom et la dualité de Poincaré.
Dans la suite nous designons par Σ, Λ, .. des ensembles ordonnés, et par $\mathcal{H}$ un foncteur, c'est-à-dire une application

$$\Sigma \longrightarrow P\Lambda$$

satisfaisant aux conditions suivantes:
(i) Pour tout $\sigma \in \Sigma$, $\mathcal{H}(\sigma) = \widehat{\mathcal{H}(\sigma)}$
(ii) Si $\sigma < \sigma'$ alors $\mathcal{H}(\sigma) \subseteq \mathcal{H}(\sigma')$.
(iii) Si $\lambda \in \mathcal{H}(\sigma_1) \cap \mathcal{H}(\sigma_2)$ alors il existe un $\sigma_3 \in \Sigma$ tel que
$\sigma_3 < \sigma_1, \sigma_3 < \sigma_2$, $\lambda \in \mathcal{H}(\sigma_3)$.
Nous supposons connu les définitions des foncteurs $\varprojlim$ et $\varinjlim$ ainsi que les foncteurs résolvants $\prod^{\cdot}$ et $\coprod_{\cdot}$.
Pour tout définition et tout résultat admi ci-dessous le lécteur pourra consulter [1] et [2].
Le foncteur $\mathcal{H}$ donné, on peut définir un nouveau foncteur:

$$\mathcal{H}^{-1}: \Lambda^{\circ} \longrightarrow P\Sigma$$

par $\mathcal{H}^{-1}(\lambda) = \{\sigma \mid \lambda \in \mathcal{H}(\sigma)\}$.

Il est alors facile de voir que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^{-1}$ definissent des foncteurs adjoints

$$\mathcal{H}_* : \underline{C}_{\Lambda} \longrightarrow \underline{C}_{\Sigma}$$

$$\mathcal{H}^* : \underline{C}_{\Sigma} \longrightarrow \underline{C}_{\Lambda}$$

par:

$$(\mathcal{H}_* F)_\sigma = \varprojlim_{\mathcal{H}(\sigma)} F$$

$$(\mathcal{H}^* S)_\lambda = \varinjlim_{\mathcal{H}^{-1}(\lambda)} S$$

(resp. des foncteurs adjoints:

$$\mathcal{H}^* : \underline{C}_{\Lambda^\circ} \longrightarrow \underline{C}_{\Sigma^\circ}$$

$$\mathcal{H}_* : \underline{C}_{\Sigma^\circ} \longrightarrow \underline{C}_{\Lambda^\circ}$$

par

$$(\mathcal{H}^* G)_\sigma = \varinjlim_{\mathcal{H}(\sigma)^\circ} G$$

$$(\mathcal{H}_* T)_\lambda = \varprojlim_{\mathcal{H}^{-1}(\lambda)^\circ} T \qquad)$$

De plus nous avons des homomorphismes canoniques:

$$\prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} F \longrightarrow \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1} \prod^{\cdot}_{\mathcal{H}/\mathcal{H}_1} F \longleftarrow \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1} \mathcal{H}_* F$$

$$\prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} \mathcal{H}^* S \longrightarrow \prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} \coprod^{\mathcal{H}^{-1}/\mathcal{H}_1^{-1}}_{\cdot} S$$

(resp.

$$\coprod^{\Lambda^\circ/\Lambda_1^\circ}_{\cdot} G \longleftarrow \coprod^{\Sigma^\circ/\Sigma_1^\circ}_{\cdot} \coprod^{\mathcal{H}^\circ/\mathcal{H}_1}_{\cdot} G \longrightarrow \coprod^{\Sigma^\circ/\Sigma_1^\circ}_{\cdot} \mathcal{H}^* G$$

$$\coprod_{\Lambda^\circ/\Lambda_1}^{\cdot} \mathcal{H}_* T \longleftarrow \coprod^{\Lambda^\circ/\Lambda_1}_{\cdot} \prod^{\cdot}_{\mathcal{H}^{\circ -1}/\mathcal{H}_1^{-1\circ}} T \qquad)$$

qui en particulier definissent un homomorphisme canonique:

$$\mathcal{H}^\cdot : \varprojlim^{(\cdot)}_{\Sigma/\Sigma_1} \mathcal{H}_* F \longrightarrow \varprojlim^{(\cdot)}_{\Lambda/\Lambda_1} F$$

(resp. $\qquad \partial\ell_{\cdot} : \varinjlim_{\Lambda^\circ/\Lambda_1^\circ} G(\cdot) \longrightarrow \varinjlim_{\Sigma^\circ/\Sigma_1^\circ} \partial\ell^{*} G(\cdot) \qquad$)

Ceci dit nous précisons que ce qui va suivre n'est que la première partie d'un travail sur la théorie multiplicative d'homologie et de cohomologie des ensembles ordonnés.

Notons que nous avons récément demontré que la théorie de l'homologir et de la cohomologie singulière des éspaces topologiques s'intègre complètement dans la théorie ordonné .
Il en résulte que les resultats obtenu ci-dessous peut être traduit d'une façon immediate au language singulier.

§ 1. Théorie multiplicative.

(1.1) Soient Σ et Λ deux ensembles ordonnés, Σ_1 un sous-ensemble de Σ et Λ_1 un sous-ensemble de Λ. Supposons pour simplifier que $\Sigma_1 = \hat{\Sigma}_1$, $\Lambda_1 = \hat{\Lambda}_1$. Pour tout système projectif S (resp. T) sur Σ (resp. Σ°) et tout systeme projectif F (resp. G) sur Λ (resp. Λ°) nous avons un homomorphisme canonique

$$\prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1} S \,\hat{\otimes} \prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} F \longrightarrow \prod'_{\Sigma\times\Lambda/\Sigma\times\Lambda_1\cup\Sigma_1\times\Lambda} S \,\hat{\otimes}\, F$$

(resp. $\coprod^{\Sigma^\circ/\Sigma_1^\circ}_{\cdot} T \,\hat{\otimes} \coprod^{\Lambda^\circ/\Lambda_1^\circ}_{\cdot} G \longleftarrow \coprod^{\Sigma\times\Lambda^\circ/(\Sigma\times\Lambda_1\cup\Sigma_1\times\Lambda)^\circ}_{\cdot} T \,\hat{\otimes}\, G$)

Dans le cas ou l'un des systèmes projectifs est constant de type fini, il est facile de voir que cet homomorphisme est un isomorphisme.

Il existe un homomorphisme de complexes:

$$\Pi : \quad \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1} S \otimes \prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} F \longrightarrow \prod^{\cdot}_{\Sigma\times\Lambda/\Sigma_1\times\Lambda_1\cup\Sigma_1\times\Lambda} S \,\hat{\otimes}\, F$$

(resp. $\coprod$: $\coprod^{(\Sigma\times\Lambda)^\circ/(\Sigma\times\Lambda_1\cup\Sigma_1\times\Lambda)^\circ}_{\cdot} T \hat{\otimes} G \longrightarrow \coprod^{\Sigma^\circ/\Sigma_1^\circ}_{\cdot} T \otimes \coprod^{\Lambda^\circ/\Lambda_1^\circ}_{\cdot} G$)

défini par:

$$\Pi(c^p \otimes c^q)((\sigma_0,\lambda_0)<(\sigma_1,\lambda_1)<\dots<(\sigma_{p+q},\lambda_{p+q}))$$

$$= c^p(\sigma_0<\dots<\sigma_p) \otimes \eta^{\lambda_p}_{\lambda_0}\, c^q(\lambda_p<\dots<\lambda_{p+q})$$

(resp. $\coprod(\omega_{p+q}) = \sum_{i=0}^{p+q} t(\sigma_0 > \dots > \sigma_i) \otimes \rho^{\lambda_0}_{\lambda_i} g(\lambda_i > \dots > \lambda_{p+q})$

ou $\omega_{p+q} = t \otimes g((\sigma_0, \lambda_0) > \dots > (\sigma_{p+q}, \lambda_{p+q}))$)

Pour voir que cet homomorphisme est un homomorphisme de complexes il faut faire des calcules evidents que nous omettons.

Supposons maintenant que $\Sigma = \Lambda$ et possons $\Lambda_2 = \Sigma_1$. Dans $\Lambda \times \Lambda$ nous avons le diagonal Δ_Λ. Il est facile de voir que l'on a :

$$\Delta_\Lambda \cap (\Lambda \times \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \times \Lambda) = \Delta_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$$

donc nous avons un homomorphisme de complexes $\cup$ (resp. $\wedge$) composé des homomorphismes :

$$\prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_2} S \otimes \prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} F \xrightarrow{\pi} \prod^{\cdot}_{\Lambda\times\Lambda/\Lambda\times\Lambda_1\cup\Lambda_2\times\Lambda} S \hat{\otimes} F \longrightarrow \prod^{\cdot}_{\Delta_\Lambda/\Delta_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}} S \hat{\otimes} F \simeq \prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1\cup\Lambda_2} S \otimes F$$

(resp. $$\coprod^{\Lambda^\circ/(\Lambda_1\cup\Lambda_2)^\circ}_{\cdot} T \otimes G \simeq \coprod^{\Delta^\circ_\Lambda/\Delta_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}^\circ}_{\cdot} T \hat{\otimes} G \longrightarrow \coprod^{\Lambda\times\Lambda^\circ/(\Lambda\times\Lambda_1\cup\Lambda_2\times\Lambda)^\circ}_{\cdot} T \hat{\otimes} G \xrightarrow[\coprod]{} \coprod^{\Lambda^\circ/\Lambda_2^\circ}_{\cdot} T \otimes \coprod^{\Lambda^\circ/\Lambda_1^\circ}_{\cdot} G$$)

C'est le produit "cup" (resp. cocup) du foncteur $\prod^{\cdot}$ (resp. $\coprod_{\cdot}$).

Pour définir des produits mixtes nous sommes ammoné à considérer un nouveau complexe, un foncteur defini sur $\underline{C}_{\Lambda^\circ\times\Lambda}$ (resp. $\underline{C}_{\Lambda\times\Lambda^\circ}$)

à savoir: $$\coprod^{\Lambda^\circ/\Lambda_1^\circ}_{\cdot} H$$

(resp. $$\prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} K$$)

$H \in C_{\Lambda^\circ\times\Lambda}$ (resp. $K \in C_{\Lambda\times\Lambda^\circ}$). Un élément de $\coprod^{\Lambda^\circ/\Lambda_1^\circ}_{q} H$ (resp. $\prod^{q}_{\Lambda/\Lambda_1} K$) étant

de la forme $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\lambda_0^i > \dots > \lambda_q^i)$ avec $\omega_i \in H_{\lambda_0^i, \lambda_q^i}$ nul si $\lambda_q^i \in \Lambda_1$

(resp. c^q tel que $c^q(\lambda_0 < \dots < \lambda_q) \in K_{\lambda_0, \lambda_q}$ nul si $\lambda_q \in \Lambda_1$)

l'opérateur différentiel d étant défini par:

$$d\omega(\lambda_0 > \dots > \lambda_q) = h^{\lambda_1, \lambda_0}_{\lambda_q, \lambda_q}(\omega)(\lambda_1 > \dots > \lambda_q)$$

$$+ \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i \omega(\lambda_0 > \dots > \hat{\lambda}_i \dots > \lambda_q)$$

$$+ (-1)^q h^{\lambda_0, \lambda_0}_{\lambda_{q-1}, \lambda_q}(\omega)(\lambda_0 > \dots > \lambda_{q-1})$$

où pour $\lambda_1 > \lambda_1^1, \lambda_2 < \lambda_2^1$ $\quad h^{\lambda_1,\lambda_1'}_{\lambda_2,\lambda_2'}$ est l'homomorphisme

$$H_{\lambda_1^1,\lambda_2^1} \longrightarrow H_{\lambda_1,\lambda_2}$$

(resp.
$$dc^q(\lambda_0 < \dots \lambda_{q+1}) = k^{\lambda_0,\lambda_1}_{\lambda_{q+1},\lambda_{q+1}} c^q(\lambda_1 < \dots < \lambda_{q+1})$$
$$+ \sum_{i=1}^{q} (-1)^i c^q(\lambda_0 < \dots < \lambda_i < \dots < \lambda_{q+1})$$
$$+ (-1)^{q+1} k^{\lambda_0,\lambda_0}_{\lambda_{q+1},\lambda_q} c^q(\ _0 \ \dots \ _q)$$

ou pour $\lambda_1 < \lambda_1^1, \lambda_2 > \lambda_2^1$ $\quad k^{\lambda_1,\lambda_1'}_{\lambda_2,\lambda_2^2}$ est l'homomorphisme

$$K_{\lambda_1^1,\lambda_2^1} \longrightarrow K_{\lambda_1,\lambda_2} \quad)$$

Un calcul fastidieux montre que $d \circ d = 0$, donc que

$$\coprod_{\bullet}^{\Lambda^o/\Lambda_1^o} H$$

$$(\text{resp. } \prod_{\Lambda/\Lambda_1}^{\bullet} K \qquad)$$

muni de l'opérateur d est un complexe de chaînes (resp. de cochaînes).

Nous voyons que $(F,G) \rightsquigarrow F \otimes G$ définit un foncteur

$$\underline{C}_{\Lambda} \times \underline{C}_{\Lambda^o} \longrightarrow \underline{C}_{\Lambda \times \Lambda^o}$$

qui composé avec $\coprod_{\bullet}$ (resp. $\prod^{\bullet}$)définit un foncteur sur $\underline{C}_{\Lambda^o} \times \underline{C}_{\Lambda}$ (resp. $\underline{C}_{\Lambda} \times \underline{C}_{\Lambda^o}$) donné par:

$$(G\ ,\ F) \rightsquigarrow \coprod_{\bullet}^{\Lambda^o/\Lambda_1^o} G \otimes F$$

$$(\text{resp. } (F\ ,\ G) \rightsquigarrow \prod_{\Lambda/\Lambda_1}^{\bullet} F \otimes G \ ).$$

Soit donc G un système projectif sur Λ^o et F un système projectif sur Λ , et considérons l'homomorphisme:

$$\coprod_{p+q}^{\Lambda_1^o/\Lambda_2^o} G \otimes \prod_{\Lambda_3/\Lambda_4}^{p} F \xrightarrow{\ \cap\ } \coprod_{q}^{\Lambda_1^o/\Lambda_2^o \cup \widehat{\Lambda_1 - \Lambda_3}^o} G \otimes F$$

$$(\text{resp. } \prod_{\Lambda_1/\Lambda_2}^{p+q} F \otimes \coprod_{p}^{\Lambda_3^o/\Lambda_4^o} G \xrightarrow{\ \vee\ } \prod_{\Lambda_1/\Lambda_2 \cup \widehat{\Lambda_1 - \Lambda_3}}^{p} F \otimes G \quad)$$

défini par:

$$g_{\lambda_0}(\lambda_0 > \dots > \lambda_{p+q}) \otimes c^p \xrightarrow{\ \cap\ } g_{\lambda_0} \otimes c^p(\lambda_q < \dots \lambda_{p+q})\ (\lambda_0 > \dots > \lambda_q)$$

(resp.

$$c^{p+q}\otimes g_{\lambda_q}(\lambda_q > \cdots \lambda_{p+q}) \longmapsto \{(\lambda_0 < \cdots < \lambda_q) \rightsquigarrow c^{p+q}(\lambda_0 < \cdots < \lambda_{p+q}) \otimes g_{\lambda_q}\})$$

On a:

$$d(\omega_{p+q} \cap c^p) = (-1)^q \omega_{p+q} \cap dc^p + d\omega_{p+q} \cap c^p$$

(resp.

$$d(c^{p+q} \vee \omega_p) = (-1)^q c^{p+q} \vee d\omega_p + d c^{p+q} \vee \omega_p \quad)$$

donc $\cap$ (resp. $\vee$) est un homomorphisme de complexes.

(1.2) Considerons maintenant le complexe

(i) $$\prod_{d_1}^{\cdot} \prod_{d_2}^{\cdot} F \otimes \prod_{d_3}^{\cdot} \prod_{d_4}^{\cdot} G$$

ayant des opérateurs differentiels comme indiqué. Posons

$$\bar{d}_1 = d_1 + (-1)^p d_3 \qquad \bar{d}_2 = d_2 + (-1)^q d_4$$

où p est le degré de d_1 et q le degré de d_2. On voit facilement que (i) muni des operateurs differentiels $\bar{d}_1$ et $\bar{d}_2$ est un double-complexe, et que l'homomorphisme $\underline{\cup}$ composé des homomorphismes

$$\begin{array}{c} \prod^p \prod^q F \otimes \prod^{p'} \prod^{q'} G \\ \downarrow \cup_1 \\ \prod^{p+p'} (\prod^q F \otimes \prod^{q'} G) \\ \downarrow \cup_2 \\ \prod^{p+p'} \prod^{q+q'} F \otimes G \end{array}$$

est un homomorphisme de double-complexes.

Evidemment, ceci peut être dualisé. La procédure étant immédiate nous n'explicitons pas.

De même , considerons le complexe

(ii) $$\coprod_{d_1}^{\cdot} \coprod_{d_2}^{\cdot} G \otimes \prod_{d_3}^{\cdot} \prod_{d_4}^{\cdot} F$$

ayant des opérateurs differentiels comme indiqué. Posons

$$\underline{d}_1 = d_1 + (-1)^q d_3 \qquad \underline{d}_2 = d_2 + (-1)^{q'} d_4$$

où le degré de d_1 est p+q, le degré de d_2 est p'+q', le degré de d_3 est p, et le degré de d_4 est p'. On voit facilement que (ii) muni des opérateurs differentiels $\underline{d}_1$ et $\underline{d}_2$ est un double-complexe, et que l'homomorphisme $\bar{\cap}$ composé des homomorphismes

$$
\begin{array}{c}
\coprod_{p+q} \coprod_{p'+q'} G \otimes \prod^{p} \prod^{p'} F \\
\downarrow \cap_1 \\
\coprod_{q} \left(\coprod_{p'+q'} G \otimes \prod^{p'} F \right) \\
\downarrow \cap_2 \\
\coprod_{q} \coprod_{q'} G \otimes F
\end{array}
$$

est un homomorphisme de double-complexes.
Comme ci-dessus nous n'explicitons pas le résultat dual.

§2. Produits et foncteurs $\mathcal{H}$.

Soit donné un foncteur

$$\mathcal{H} : \Sigma \longrightarrow P\Lambda$$

alors nous avons un diagramme commutatif d'homomorphismes de double-complexes.

$$
\begin{tikzcd}
\prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} F \arrow[rr] & & \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1} \prod^{\cdot}_{\mathcal{H}/\mathcal{H}_1} F & & \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1} \mathcal{H}_* F \arrow[ll] \\
\otimes & & \otimes & & \otimes \\
\prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_2} S \arrow[rr] \arrow[d, "\cup"] & & \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_2} \prod^{\cdot}_{\mathcal{H}/\mathcal{H}_2} S \arrow[d, "\underline{\cup}"] & & \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_2} \mathcal{H}_* S \arrow[ll] \arrow[d, "\cup"] \\
\prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1 \cup \Lambda_2} F \otimes S \arrow[rr] & & \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \prod^{\cdot}_{\mathcal{H}/\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2} F \otimes S & & \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \mathcal{H}_* F \otimes \mathcal{H}_* S \arrow[ll] \arrow[dl] \\
 & & & \prod^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \mathcal{H}_* (F \otimes S) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

(resp.

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_{\Lambda^0/\Lambda_1^0} G & \coprod_{\Sigma^0/\Sigma_1^0}\ \coprod_{\mathcal{H}^0/\mathcal{H}_1^0} G \arrow[l] \arrow[r] & \coprod_{\Sigma^0/\Sigma_1^0} G \\
\otimes & \otimes & \otimes \\
\coprod_{\Lambda^0/\Lambda_2^0} T & \coprod_{\Sigma^0/\Sigma_2^0}\ \coprod_{\mathcal{H}^0/\mathcal{H}_2^0} T \arrow[l] \arrow[r] & \coprod_{\Sigma^0/\Sigma_2^0} T \\
\coprod_{\Lambda^0/(\Lambda_1\cup\Lambda_2)^0} G\otimes T \arrow[u, "\wedge"'] & \coprod_{\Sigma^0/(\Sigma_1\cup\Sigma_2)^0}\ \coprod_{\mathcal{H}^0/(\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_2)^0} G\otimes T \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "\bar{\wedge}"'] \arrow[dr] & \coprod_{\Sigma^0/(\Sigma_1\cup\Sigma_2)^0} \mathcal{H}^* G\otimes\mathcal{H}^* T \arrow[u, "\wedge"'] \\
 & & \coprod_{\Sigma^0/(\Sigma_1\cup\Sigma_2)} \mathcal{H}^*(G\otimes T) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

).

De même nous avons pour les produits mixtes un diagramme d'homomorphismes de double-complexes:

(1)

$$
\begin{tikzcd}
\prod_{\Lambda_1/\Lambda_2\cup(\widehat{\Lambda_1-\Lambda_3})} F\otimes G \arrow[r] & \prod_{\Sigma_1/\Sigma_2\cup(\widehat{\Sigma_1-\Sigma_3})}\ \prod F\otimes G & \prod_{\Sigma_1/\Sigma_2\cup(\widehat{\Sigma_1-\Sigma_3})} \mathcal{H}_* F\otimes\mathcal{H}_* G \arrow[l, dashed, "\varphi"'] \\
\prod_{\Lambda_1/\Lambda_2} F \arrow[u, "\vee"'] \arrow[r] & \prod_{\Sigma_1/\Sigma_2}\ \prod_{\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_2} F \arrow[u, "\underline{\vee}"'] & \prod_{\Sigma_1/\Sigma_2} \mathcal{H}_* F \arrow[u, "\vee"'] \arrow[l] \\
\otimes & \otimes & \otimes \\
\coprod_{\Lambda_3^0/\Lambda_4^0} G \arrow[d, "\cap"'] & \coprod_{\Sigma_3^0/\Sigma_4^0}\ \coprod_{\mathcal{H}_3^0/\mathcal{H}_4^0} G \arrow[l] \arrow[d, "\bar{\cap}"'] & \coprod_{\Sigma_3^0/\Sigma_4^0} \mathcal{H}^* G \arrow[l] \arrow[d, "\cap"'] \\
\coprod_{\Lambda_3^0/\Lambda_4^0\cup(\widehat{\Lambda_3-\Lambda_1})^0} G\otimes F & \coprod_{\Sigma_3^0/\Sigma_4^0\cup(\widehat{\Sigma_3-\Sigma_1})^0}\ \coprod G\otimes F \arrow[l] \arrow[r, dashed, "\psi"] & \coprod_{\Sigma_3^0/\Sigma_4^0\cup(\widehat{\Sigma_3-\Sigma_1})^0} \mathcal{H}^* G\otimes\mathcal{H}_* F
\end{tikzcd}
$$

(2)

Si G est le système projectif constant L alors il est facile de montrer qu'il exist un homomorphisme φ tel que le diagramme (1) est commutatif. Si F est le système projectif constant L il existe un homomorphisme ψ tel que le diagramme (2) est commutatif.

§3. Produits et suites spectrales.

Soit $\mathcal{K}$ comme ci-dessus, et considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} F \arrow[r] & \prod\limits^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1} \prod\limits^{\cdot}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}_1} F \\
\otimes & \otimes \\
\prod\limits^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_2} S \arrow[r] \arrow[d, "\cup"] & \prod\limits^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_2} \prod\limits^{\cdot}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}_2} S \arrow[d, "\underline{\cup}"] \\
\prod\limits^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1\cup\Lambda_2} F\otimes S \arrow[r] & \prod\limits^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1\cup\Sigma_2} \prod\limits^{\cdot}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} F\otimes S
\end{tikzcd}$$

Si $U \in \prod^p F$ est un cycle de dimension p, alors U définit un cycle $\underline{U}$ de bidegré $(0,p)$ dans $\prod\limits^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1} \prod\limits^{\cdot}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}_1} F$, et on a le diagramme commutatif d'homomorphismes de double-complexes

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits^{q}_{\Lambda/\Lambda_2} S \arrow[r] \arrow[d, "\cup U"] & \prod\limits^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_2} \prod\limits^{q}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}_2} S \arrow[d, "\underline{\cup}\ \underline{U}"] \\
\prod\limits^{p+q}_{\Lambda/\Lambda_1\cup\Lambda_2} F\otimes S \arrow[r] & \prod\limits^{\cdot}_{\Sigma/\Sigma_1\cup\Sigma_2} \prod\limits^{p+q}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} F\otimes S
\end{tikzcd}$$

En homologie nous aurons donc un diagramme "commutatif" d'homomorphismes et de suites spectrales:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim\limits^{(q)}_{\Lambda/\Lambda_2} S \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\cup u"] & V \arrow[d, "\underline{\cup}\ \underline{u}"] & E_2^{v,w} = \varprojlim\limits^{(v)}_{\Sigma/\Sigma_2} \varprojlim\limits^{(w)}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}_2} S \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, "\cup u_{\mathcal{K}}"] \\
\varprojlim\limits^{(p+q)}_{\Lambda/\Lambda_1\cup\Lambda_2} F\otimes S \arrow[r, "\simeq"] & W & E_2^{v,w+q} = \varprojlim\limits^{(v)}_{\Sigma/\Sigma_1\cup\Sigma_2} \varprojlim\limits^{(w+q)}_{\mathcal{K}/\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} F\otimes S \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

ou u est l'élément de $\varprojlim^{(p)}_{\Lambda/\Lambda_1} F$ défini par U, $\underline{u}$ l'élément de $H^p(\prod^{\cdot}_{\Lambda/\Lambda_1} \prod^{\cdot}_{\mathcal{H}/\mathcal{H}_1} F)$ défini par $\underline{U}$, et $u_{\mathcal{H}}$ l'élément de $\varprojlim^{(p)}_{\mathcal{H}/\mathcal{H}_1} F$ l'image de u.

Il est facile de montrer qu'en particulier ce resultat donne l'isomorphisme de Thom en théorie simplicial et singulier.

Dans l'étude de la dualité de Poincaré on est ammené à considérer le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
(\prod^{\cdot}_{\Lambda} L) \otimes (\coprod_{\cdot}^{\Lambda^0} G) & \xrightarrow{\ i\ } & \prod^{\cdot}_{\Lambda} \coprod_{\cdot}^{\Lambda^0} G \\
\downarrow \cap & & \downarrow j \\
\coprod_{\cdot}^{\Lambda^0} G & \xrightarrow{\ k\ } & \prod^{\cdot}_{\Lambda} \coprod_{\cdot}^{\Lambda^0/\lambda^{c}{}^0} G
\end{array}$$

ou pour tout $\lambda \in \Lambda$, λ^c est l'ensemble $\{\lambda' \mid \hat{\lambda}' \cap \hat{\lambda} = \emptyset\}$.

Ce diagramme induit en homologie le diagramme suivant:

$$\text{(i)} \qquad \begin{array}{ccc}
\varprojlim^{(p)}_{\Lambda} L \otimes \varinjlim_{\Lambda^0}{}_{(p+q)} G & \xrightarrow{\ i_\circ\ } & H_q(\prod^{\cdot}_{\Lambda} \coprod_{\cdot}^{\Lambda^0} G) \\
\downarrow \cap & & \downarrow j_\circ \\
\varinjlim_{\Lambda^0}{}_{(q)} G & \xrightarrow{\ k_\cdot\ } & H_q(\prod^{\cdot}_{\Lambda} \coprod_{\cdot}^{\Lambda^0/\lambda^{c}{}^0} G)
\end{array}$$

Supposons que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'ensemble

$$\mathrm{et}(\lambda) = \widehat{\{\lambda' \mid \hat{\lambda}' \cap \hat{\lambda} \neq \emptyset\}}$$

est tel que le complexe

$$\prod^{\cdot}_{\mathrm{et}(\lambda)} L$$

est ascyclique, alors on peut montrer que le diagramme (i) est commutatif.

Cela implique en particulier que la dualité de Poincaré est induit par cap-produit avec une classe fondamental dans le cas une telle existe.

Bibliographie.

[1] Laudal, O. A.: Sur la cohomologie et l'homologie des ensembles ordonnés. Miméographié, Université d'Oslo (janvier 1963)

[2] Laudal, O. A.: Quelques remarques sur la cohomologie et l'homologie d'un espace topologique. Matematisk Seminar, Universitetet i Oslo, nr.12 (nov.1963).