Matematisk Seminar
Universitetet i Oslo

Nr. 8
August 1963

ÜBER EINEN SATZ VON PICARD

von

Henrik L. Selberg

1.

Neben dem Picardschen Satz steht in dessen Schatten ein anderer Satz, ebenfalls von Picard ((2)), der besagt, dass in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle zwischen zwei meromorphen Funktionen keine algebraische Gleichung vom Geschlecht > 1 bestehen kann. Bei näherer Betrachtung erweist sich auch dieser zweite Picardsche Satz als eine Folge des zweiten Hauptsatzes der von R. Nevanlinna ((1)) entwickelten Werteverteilungstheorie der meromorphen Funktionen. Um das einzusehen, braucht man nur nachzuweisen, dass der erste Hauptsatz noch richtig bleibt, wenn die Funktionswerte nicht mehr auf die schlichte Vollebene, sondern auf die kompakte Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion bezogen werden (((3)) S. 29-34). Ich werde im folgenden zeigen, dass dieser Nachweis völlig elementar gebracht werden kann. Der Einfachheit halber schränke ich mich dabei auf den Fall ein, dass die zu betrachtende Funktion $f(x)$ für $|x| < R, 0 < R \leqq \infty$, meromorph ist.

2.

Sei $W(z)$ eine algebraische Funktion von z und Z ihre über der Riemannschen Zahlenkugel $\mathcal{K}$ ausgebreitete h-blättrige Riemannsche Fläche. Dabei denken wir uns $\mathcal{K}$ als eine Kugelfläche mit Radius 1 und dem Mittelpunkt $z = 0$, auf welche die z-Ebene durch eine stereographische Projektion abgebildet worden ist. Ich betrachte nun die zusammengesetzte Funktion $F(x) = W(f(x))$; dieselbe erscheint eindeutig auf einer über $|x| < R$ ausgebreiteten k-blättrigen $(k \leqq h)$ Riemannschen Fläche X. Gilt in der Umgebung eines Punktes x_o auf X die Entwicklung

$$F(x) = W_{z_o}(f(x))$$

wo W_{z_o} das Funktionselement von $W(z)$ im Punkte z_o auf Z bezeichnet, so ist z_o der von der Abbildung $z = f(z)$ vermittelte Bildpunkt von x_o. Den Punkt x_o nenne ich unter Beibehalt der üblichen Terminologie eine z_o-Stelle von $f(x)$. Die Multiplizität dieser z_o-Stelle ist definitionsgemäss der Exponent τ in der Entwicklung

$$f(x) = f(x_o) + \gamma_\tau (x - x_o)^\tau + \ldots . \quad (\gamma_\tau \neq 0)$$

bzw. für $f(x_o) = \infty$

$$f(x) = \frac{\gamma_{-\tau}}{(x - x_o)^\tau} + \ldots \quad \gamma_{-\tau} \neq 0)$$

Indem ich nun wieder z statt z_o schreibe, bezeichne ich mit $n(r;z,Z)$ die Anzahlfunktion $\sum \tau$ erstreckt über sämtliche im Kreise $|x| \leqq r$ gelegene z-Stellen von $f(x)$ und mit $N(r;z,Z)$ die Grösse

$$N(r;z,Z) = \frac{1}{k\lambda_z} \int_0^r \frac{n(t;z,Z) - n(0;z,Z)}{t} dt + \frac{n(0;z,Z)}{k\,\lambda_z} \log r$$

wobei λ_z die Anzahl der Blätter von Z angibt, die im Punkte z im Zyklus zusammenhängen.

3.

Als ρ-Umgebung $\Omega_\rho(z_o)$ eines Punktes z_o auf Z bezeichnen wir die zusammenhängende Teilfläche von Z, die z_o enthält, und für welche der chordale Abstand $d(z,z_o) < \rho$ (< 2) ist. Dabei nehmen wir ρ so klein an, dass $\Omega_\rho(z_o)$ ausser möglicherweise z_o keine weiteren Windungspunkte von Z enthält. Zwei Umgebungen hängen unmittelbar zusammen, wenn sie einen gemeinsamen Teil haben.

Wir überdecken jetzt Z durch eine endliche Anzahl von Umgebungen $\Omega_\nu = \Omega_{\rho_\nu}(z_\nu)$ $(\nu = 1,2,\dots,n)$ derart, dass jedes $\Omega_{2\rho_\nu}(z_\nu) = \Omega_\nu^*$ $(\nu = 1,2,\dots,n)$ auch als eine Umgebung von z_ν definiert ist.

Es sei a ein Punkt von Z, der in der Umgebung Ω_ν enthalten ist. Durch eine Drehung $L_\nu(z)$ von $\mathcal{K}$ verlegen wir den Mittelpunkt z_ν von Ω_ν nach dem Punkt $z = 0$. Indem λ_ν die Anzahl der Blätter bezeichnet, welche in z_ν zusammenhängen, bilden wir Ω_ν^* durch

$$\zeta = \zeta_\nu(z) = \sqrt[\lambda_\nu]{L_\nu(z)}$$

auf das schlichte Kreisgebiet

$$|\zeta| < R_\nu = \left(\frac{\rho_\nu}{\sqrt{1-\rho_\nu^2}}\right)^{\frac{1}{\lambda_\nu}}$$

ab. Den Bildpunkt von a in der ζ-Ebene bezeichnen wir mit α. Wir setzen jetzt

$$\xi_\nu(z,a) = \frac{R_\nu(\zeta_\nu(z) - \alpha)}{R_\nu^2 - \zeta_\nu(z)\bar{a}}$$

$$g_\nu(z,a) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|\xi_\nu(z,a)|} & , z \in \Omega_\nu^* \\ 0 & , z \notin \Omega_\nu^* \end{cases}$$

$$U_\nu(z,a) = \begin{cases} g_\nu(z,a) + \frac{1}{2} \cdot |\xi_\nu(z,a)|^2 - \frac{1}{2} & , z \in \Omega_\nu^* \\ 0 & , z \notin \Omega_\nu^* \end{cases}$$

Die Funktion $U_\nu(z,a)$ verschwindet zusammen mit ihrer Normalableitung $\partial U_\nu/\partial n$ am Rande von Ω_ν^*. In Ω_ν^* genügt $U_\nu(z,a)$ der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Delta U_\nu(z,a) = 2 \cdot \left| \frac{d\, \xi_\nu(z,a)}{dz} \right|^2$$

Indem Γ_r die Projektion des Kreises $|x| = r$ auf X bezeichnet, r_0 eine feste positive Zahl $< R$ ist, führen wir die Grösse ein

$$S_\nu(r,a) = N(r;\, a,Z) - N(r_0;a,Z) +$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2k\pi} \int_{\Gamma_r} U_\nu(f(re^{i\varphi}),a)d\varphi - \frac{1}{2k\pi} \int_{\Gamma_{r_0}} U_\nu(f(r_0 e^{i\varphi}),a)d\varphi$$

Mit Hilfe der Transformationsformel von Gauss kann $S_\nu(r,a)$ in bekannter Weise umgeformt werden. Auf Grund von (1) erhalten wir

$$(3) \quad S(r,a) = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\nu^*} \left[N(r;z,Z) - N(r_0;z,Z)\right] \cdot \left| \frac{d\, \xi_\nu(z,a)}{dz} \right|^2 d\omega_z$$

wo $d\omega_z$ das (ebene) Flächenelement von Z bezeichnet.

4.

Wir setzen jetzt

$$S(r) = \sup S_\nu(r,a)$$

für $a \in \Omega_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Da $r_0 > 0$ und folglich

$$\sup \frac{1}{2k\pi} \int_{\Gamma_{r_0}} U_\nu(f(r \cdot e^{i\varphi}), a) d\varphi$$

für $a \in \Omega_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ endlich ist, so folgt aus (2) die Existenz einer endlichen Konstante c derart, dass für $r > r_0$

$$N(r; a, Z) - N(r_0; a, Z) < S(r) + c$$

für jedes $a \in Z$ gilt.

Wir nehmen nun an, dass für ein r ($r_0 < r < R$) und ein $a_1 \in \Omega_\nu$ die Ungleichung

$$S_\nu(r, a_1) > S(r) - \sigma$$

erfüllt ist; dabei ist σ eine endliche, vorläufig beliebige, positive Konstante. Für ein beliebiges $a_2 \in \Omega_\nu$ gilt dann infolge von (3)

$$S_\nu(r, a_2) = S_\nu(r, a_1) + \sigma + c -$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Omega_\nu^*} \Big[S_\nu(r, a_1) + \sigma + c - (N(r; z, Z) - N(r_0; z, Z)) \Big] \cdot \left| \frac{d\xi_\nu(z, a_2)}{dz} \right|^2 d\omega_z$$

$$\geqq S_\nu(r, a_1) + \sigma + c -$$

$$\frac{K}{\pi} \int_{\Omega_\nu^*} \Big[S_\nu(r, a_1) + \sigma + c - (N(r; z, Z) - N(r_0; z, Z)) \Big] \cdot \left| \frac{d\xi_\nu(z, a_1)}{dz} \right|^2 d\omega_z$$

wo K die von a_1, a_2 und ν unabhängige Konstante bezeichnet

$$K = \sup \left| \frac{d\, \xi_\nu(z,a)}{d\, \xi_\nu(z,b)} \right|^2$$

für $a,b \in \Omega_\nu$, $z \in \Omega_\nu^*$ und $\nu = 1,2, \ldots, n$. Hieraus folgt nun

$$(4) \qquad S_\nu(r, a_2) > S_\nu(r, a_1) - (\sigma + c)(K - 1)$$

5.

Nach diesen Vorbereitungen bestimmen wir für ein gegebenes r ($r_0 < r < R$) ein ν_1, und ein $a_1 \in \Omega_{\nu_1}$, so dass

$$S_{\nu_1}(r, a_1) > S(r) - 1$$

Für jedes $a \in \Omega_{\nu_1}$ gilt dann infolge von (4)

$$S_{\nu_1}(r, a) > S(r) - \sigma_1$$

wo

$$\sigma_1 = (1 + c)(K - 1)$$

Hängen nun Ω_{ν_2} und Ω_{ν_1} unmittelbar zusammen, so gibt die Ungleichung (4) weiter

$$S_{\nu_2}(r, a) > S(r) - \sigma_2$$

für jedes $a \in \Omega_{\nu_2}$. Dabei ist σ_2 die Konstante

$$\sigma_2 = (\sigma_1 + c)(K - 1)$$

So geht es nun weiter. Man erkennt hieraus, dass es eine endliche feste Konstante σ_0 gibt derart, dass

$$(5) \qquad S(r) - \sigma_0 < S_\nu(r,a) \leq S(r)$$

für $r_0 < r < R$ und alle $a \in \Omega_\nu \ (\nu = 1,2, \ldots, n)$.

Um uns schliesslich von der Überdeckung gewissermassen unabhängig zu machen, setzen wir

$$S(r,a) = \operatorname{Max} S_\nu(r,a)$$

wobei ν sämtliche Indizes durchlaufen soll, für welche $a \in \Omega_\nu$. Aus (5) folgt dann

$$(6) \qquad S(r) - \sigma_0 < S(r,a) \leq S(r)$$

für $r_0 < r < R$ und alle $a \in Z$.

6.

Sei nun a ein beliebiger Wert auf $\mathcal{K}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_h$ die über a gelegenen Punkte von Z; ein Windungspunkt der Ordnung $\lambda - 1$ ist dabei λ-fach zu rechnen. Offenbar ist

$$(7) \qquad \sum_{\nu=1}^{h} S(r,a_\nu) = T(r,f) + O(1)$$

wo $T(r,f)$, wie üblich, die charakteristische Funktion von $f(x)$ bedeutet. Die linke Seite von (7) ist andererseits nach (6) gleich $hS(r) + O(1)$.

Es ist hiernach $(r_0 < r < R)$

$$S(r,a_\nu) = S(r) + O(1) = \frac{1}{h}T(r,f) + O(1), (\nu = 1,2, \ldots, h)$$

Die Gültigkeit des ersten Hauptsatzes für die Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion ist hiermit nachgewiesen.

Literaturverzeichnis

((1)) R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen (1953).

((2)) E. Picard: Démonstration d'un théorème général des fonctions uniformes liées par un relation algébrique. Acta Math. 11 (1887).

((3)) H.L. Selberg: Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. Avh. utg. av Det Norske Vid.-Akad. i Oslo, Math.-Naturv. Kl. 1934 No. 8.