Matematisk Seminar
Universitetet i Oslo

Nr. 1
Januar 1963

NOTE SUR LA COHOMOLOGIE DES GROUPES

Par

Olav Arnfinn Laudal

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de donner quelques résultats sur la relation entre la cohomologie d'un groupe G et la cohomologie d'un système de sous-groupes H_i de G. Nous utilisons les notations de ((1)) , ((2)) et ((4)) . Pour les suites spectrales le lecteur pourra consulter ((1)) et ((3)) .

§1.

Soit G un groupe, et soit A un groupe abélien sur lequel opère G. On dira alors que A est un G-module. A tout groupe G on peut associer un anneau $Z(G)$, l'anneau du groupe, dont le groupe additif est le groupe libre engendré par les éléments de G , et où la multiplication est défini par: $(ng).(mg') = n.m(g.g')$. On voit alors facilement que tout G-module A est un $Z(G)$-module au sens ordinaire, et inversement. La catégorie $\underline{C}$ des G-modules est alors abélienne et possède suffisemment d'objets injectifs et projectifs (voir ((1)) , ((2))). Pour tout G-module A , posons:

$$(1) \qquad A^G = \{ a/a \in A, \forall\, g \in G , \quad ga = a \}$$

On obtient ainsi un foncteur sur $\underline{C}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens

$$(2) \qquad A \rightsquigarrow A^G$$

On montre sans difficulté que ce foncteur est exact à gauche, donc que les foncteurs dérivés à droit existe et se comportent bien.

D é f i n i t i o n : On appelle cohomologie de G à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens le δ -foncteur exact dérivés à droit du foncteur (2) , et on le note par

$$\coprod_{p\geqslant 0} H^p(G, *) = H^{\bullet}(G, *) .$$

Soit Z le groupe des entiers rationelles et faisons opérer G sur Z par, $g \in G$, $n \in Z$

$$gn = n$$

alors on a la caractérisation suivante de la cohomologie de G :

$$(3) \qquad H^{\bullet}(G,A) \simeq \operatorname{Ext}^{\bullet}_{Z(G)}(Z,A) .$$

Utilisant (3) on montre que

$$H^p(G,A) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad p \geqslant 1$$

si A est un G-module induit, i.e. de la forme suivante:

$$A = \operatorname{Hom}_Z(Z(G),A')$$

(voir ((1)) et ((2))) .

Il est facile de montrer que tout G-module A admet une résolution induit A° . De plus, soit H un sous-groupe de G , alors A peut être considéré comme un H-module, et on montre que $A^{\bullet}$ est une résolution induit de A dans la catégorie des H-modules (voir chap. I page 25 de ((2)))

Nous pouvons considérer tout groupe G comme une catégorie $\underline{G}$, ayant un seul objet et dont les flèches sont les éléments du groupe, la composition étant celui du groupe. Nous avons dans ((4)) remarqué qu'avec cette identification on a un isomorphisme de foncteurs

$$\varprojlim_{\underline{G}} A \simeq A^G$$

qui a un sens puisque tout G-module A peut être considérér comme un foncteur sur $\underline{G}$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, et inversement. Il est facile de montrer que si A est induit alors on a :

$$\varprojlim_{\underline{G}}{}^{(p)} A = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \geqslant 1 \text{ .}$$

Il en résulte un isomorphisme de foncteurs

$$H^{\circ}(G, \star) \simeq \varprojlim_{\underline{G}}{}^{(\cdot)} \star \tag{4}$$

Soit maintenant I un ensemble, ordonné par la relation d'ordre $<$, et soit F un système projectif constant sur I, i.e. tel que $F(i < i')$: $F_{i'} \longrightarrow F_i$ est un isomorphisme pour tout $i < i'$.

Supposons que I contient un plus petit élément i_o, alors on a

$$\varprojlim_{I}{}^{(p)} F = \begin{cases} F_{i_o} & \text{si} \quad p = 0 \\ 0 & \text{si} \quad p \neq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Considérons une injection $j : F' \longrightarrow F$ dans la catégorie des systèmes projectifs sur I , et soit $F'' = \operatorname{coker} j$. On a alors une suite exacte de systèmes projectifs

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

d'où il résulte une suite exacte de groupes abéliens:

$$0 \longrightarrow \varprojlim_I F' \longrightarrow F_{i_o} \longrightarrow \varprojlim_I F'' \longrightarrow \varprojlim_I{}^{(1)} F' \longrightarrow 0$$

On en déduit un isomorphisme

$$(6) \qquad \varprojlim_I{}^{(1)} F' \simeq \operatorname{coker}(F_{i_o} \longrightarrow \varprojlim_I F'')$$

Supposons que les seules rélations d'ordres de I sont $i_o < i$ pour tout $i \in I$, alors on a :

$$(7) \qquad \varprojlim_I{}^{(p)} = 0 \qquad \text{si} \qquad p \neq 0,1$$

et si F_1 est un système projectif tel que $F_{1i_o} = 0$ on a

$$(8) \qquad \varprojlim_I F_1 = \prod_{i \in I} F_{1i}$$

§2.

Considérons maintenant une famille de sous-groupes $\{H_i\}_{i \in I}$ de G , et supposons que le sous-groupe trivial fait partie de $\{H_i\}_{i \in I}$. Ordonnons I en posant $i < i'$ si et seulement si $H_i \subset H_{i'}$. Notons par H le sous-groupe de G engendré par tous les H_i. Pour tout G-module A on définit un système projectif sur I par

$$i \rightsquigarrow A^{H_i}$$

où pour $i < i'$ l'homomorphisme correspondant $A^{H_{i'}} \longrightarrow A^{H_i}$ est l'injection évident. On voit facilement que l'on a :

$$\varprojlim_{I} A^{H_i} = \bigcap_{i \in I} A^{H_i} = A^H \tag{9}$$

Soit alors $A^{\bullet}$ une résulttion induit de A et considérons le double complexe

$$\prod_I{}^{\bullet} A^{\bullet H_i}$$

(voir ((4))). Les suites spectrales qui y sont associées sont données par:

(10)
$$'E_2^{p,q} = \varprojlim_I{}^{(p)} H^q(H_i, A)$$

$$''E_2^{p,q} = H^p(\varprojlim_I{}^{(q)} A^{\bullet H_i})$$

Par (9) on a :

$$''E_2^{p,o} = H^p(H,A) \ .$$

Supposons maintenant que I est un arbre, donc, d'après l'introduction de ((6)) , tel que l'on a :

$$(11) \qquad \varprojlim_I{}^{(p)} = 0 \qquad \text{pour} \qquad p \neq 0,1$$

et calculons $\varprojlim_I{}^{(1)} A^{H_i}$. Puisque $A^{H_i} \subset A$ on a par (6) un isomorphisme

$$(12) \qquad \varprojlim_I{}^{(1)} A^{H_i} = \operatorname{coker}(A \longrightarrow \varprojlim_I A/A^{H_i})$$

T h é o r è m e 1 . Il existe un groupe abélien K^n, $n \geqslant 0$ tel que les suites suivantes sont exactes

$$0 \longrightarrow \varprojlim_I{}^{(1)} H^{n-1}(H_i,A) \longrightarrow K^n \longrightarrow \varprojlim_I H^n(H_i,A) \longrightarrow 0$$

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(H,A) \longrightarrow K^{n-1} \longrightarrow H^{n-2}(\varprojlim_I{}^{(1)} A^{\cdot H_i}) \longrightarrow H^n(H,A) \longrightarrow$$

$$K^n \longrightarrow H^{n-1}(\varprojlim_I{}^{(1)} A^{\cdot H_i}) \longrightarrow \cdots$$

D é m o n s t r a t i o n . Cela résulte des suites spectrales (10) , de (11) et des Théorèmes 8.1 et 8.3 du Chap. VIII de ((3)) . (Notons que le corollaire 8.4 loc. cit. est faux.) Q.E.D.

Considérons le cas particuler où la famille $\{H_i\}_{i\in I}$ est réduit à deux sous-groupes non triviaux H_1 et H_2 et le sous-groupe trivial. Supposons que $H_1 . H_2 = G$, alors on a :

$$\varprojlim_I H^m(H_i,A) = \begin{cases} H^m(H_1\ A) \times H^m(H_2,A) & \text{si} \quad m \neq 0 \\ H^o(G,A) & \text{si} \quad m = 0 \end{cases}$$

$$\varprojlim_I{}^{(1)} H^m(H_i,A) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq 0 \\ A/A^{H_1} + A^{H_2} & \text{si} \quad m = 0 \end{cases}$$

$$\varprojlim_I{}^{(1)} A^{H_i} = A/A^{H_1} + A^{H_2}$$

donc on a :

$$H^m(\varprojlim{}^{(1)} A^{\cdot H_i}) = H^{m+1}(A^{\cdot H} + A^{\cdot H_2}) \qquad \text{si} \quad m \geqslant 1$$

et une suite exacte:

$$0 \longrightarrow H^o(A^{\cdot H_1} + A^{\cdot H_2}) \longrightarrow A \longrightarrow H^o(\varprojlim_I{}^{(1)} A^{\cdot H_i}) \longrightarrow H^1(A^{\cdot H_1}\ A^{\cdot H_2}) \longrightarrow 0$$

Utilisant le Théorème 1. on obtient une suite exacte

$$\longrightarrow H^n(G,A) \longrightarrow H^n(H_1,A) \times H^n(H_2,A) \longrightarrow H^n(A^{\cdot H_1} + A^{\cdot H_2}) \longrightarrow H^{n+1}(G,A) \longrightarrow \quad \dots$$

pour $n \geqslant 2$, et bien sûr pour les petits dimensions on a des suites exactes analogues un peu plus compliquées.

§3.

Considérons le complexe $\prod^{\cdot}_{\underline{G}}$ de ((4)), et supposons que $\{H_i\}_{i\in I}$ est une famille de sous-groupes de G telle que pour $i, i' \in I$ il existent $i'', i''' \in I$ tels que $H_i \cap H_{i'} = H_{i''}$ et tel que $H_i \cup H_{i'} = H_{i'''}$. On montre alors que le système projectif sur I

$$i \rightsquigarrow \prod^{\cdot}_{\underline{H}_i}$$

est flasque, donc que la deuxième suite spectrale du double complexe

$$\prod^{\cdot}_{I} \prod^{\cdot}_{\underline{H}_i}$$

dégénère. Il en résulte un isomorphisme

$$H^m(\prod^{\cdot}_{I} \prod^{\cdot}_{\underline{H}_i}) \simeq H^m(\varprojlim_{I} \prod^{\cdot}_{\underline{H}_i})$$

La première suite spectrale est donnée par:

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{I}{}^{(p)} H^q(H_i, *) \quad .$$

<u>Théorème 2.</u> Supposons que l'union au sens ensembliste des H_i est égal à G alors il existe un suite spectrale donnée par.

$$E_2^{p,q} = \varprojlim_{I}{}^{(p)} H^q(H_i, *)$$

aboutissant à

$$H^{\bullet}(G, \star) \quad .$$

D é m o n s t r a t i o n . Il suffit de montrer que $\varprojlim_{I} \prod^{\bullet}_{\underline{H_i}} = \prod^{\bullet}_{\underline{G}}$ ce qui est évident. Q.E.D.

Remarquons qu'en général on ne sait pas que $\varprojlim_{I} \prod'_{\underline{H_i}} = \prod'_{\underline{H}}$ où H est le sous-groupe de G engendré par les H_i . En effet cela est faux dans le cas très simple $G = Z/(6)$, $H_1 = Z/(2)$, $H_2 = Z/(3)$.

C o r o l l a i r e 1 . Supposons que I contient un sous-ensemble dénombrable cofinal, alors on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{I}{}^{(1)} H^{n-1}(H_i, \star) \longrightarrow H^n(G, \star) \longrightarrow \varprojlim_{I} H^n(H_i, \star) \longrightarrow 0$$

D é m o n s t r a t i o n . On utilise le corollaire 8.2 du Chap. VIII de ((3)) . Q.E.D.

Supposons maintenant que A est un G-module et G un groupe dénombrable tels que

(i) $H^p(G,A)$ est dénombrable pour $p = m, m+1$.

(ii) Pour tout sousgroupe de type fini H de G , $H^p(H,A)$ est dénombrable pour $p = m-1$, m alors on démontre.

C o r o l l a i r e 2 . Il existe un sous-groupe de type fini H dans G tel que $H^m(G,A) \simeq H^m(H,A)$.

D é m o n s t r a t i o n . Considérons la famille $\{H_i\}_{i \in I}$ des sous-groupes de type fini de G (i.e. engendré par un nombre fini d'éléments de

G) . Puisque G est dénombrable il existe un sous-ensemble cofinal dénombrable dans I . Par le Corollaire 1. on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \varprojlim_I{}^{(1)} H^m(H_i,A) \longrightarrow H^{m+1}(G,A) \longrightarrow \varprojlim_I H^{m+1}(H_i,A) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \varprojlim_I{}^{(1)} H^{m-1}(H_i,A) \longrightarrow H^m(G,A) \longrightarrow \varprojlim_I H^m(H_i,A) \longrightarrow 0$$

Puisque $H^p(G,A)$ est dénombrable pour $p = m$, $m + 1$, on a d'après le lemme du Chap. III de ((5)) :

$$\varprojlim_I{}^{(1)} H^m(H_i,A) = 0$$

$$\varprojlim_I{}^{(1)} H^{m-1}(H_i,A) = 0$$

donc $H^m(G,A) \simeq \varprojlim H^m(H_i,A)$. Utilisant le Théorème "de Mittag-Leffler" de ((4)) on trouve que le système projectif sur I

$$i \rightsquigarrow H^m(H_i,A)$$

est "essentiellement constant", d'où le corollaire.

Q.E.D.

Bibliographie

((1)) H. Cartan & S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton.

((2)) J.P. Serre: Homologie des groupes. Applications arithmétiques. Collèges de France. Paris (1959).

((3)) S.T. Hu: Homotopy theory. Academic Press. New York & London. (1959).

((4)) O.A. Laudal: Sur la limite projective et la théorie de la dimension. Seminaire C. Ehresmann, Paris (1962).

((5)) O.A. Laudal: Sur la cohomologie et l'homologie des ensembles ordonnés. Miméographié. Oslo (1963).

((6)) O.A. Laudal: Cohomologie et homologie pour les ensembles ordonnés. Seminaire C. Ehresmann. Paris (1962).