Un complexe resolvant pour certain idéaux détèrminentiels.

Note de T.H. Gulliksen et O.G. Negård.

Rèsumé: Soit $S$ un anneau commutatif. Soit $n \geq 2$, et soi $R$ l'anneau des polynomes sur $S$ en $n^2$ variables $X_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq n$). Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les $(n-1)$-mineurs de la matrice carrée $(X_{ij})$. Nous construisons une résolution libre de R-module $R/\mathfrak{a}$, qui montre que $R/\mathfrak{a}$ est de dimension projective 4 sur $R$. De plus, si $S$ est un anneau de Gorenstein, il en est de même de $R/\mathfrak{a}$.

Considerons $R$ un anneau commutatif avec unité. Fixons $X$ une $n{\times}n$ - matrice a coefficients dans $R$, avec $n \geq 2$. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les $(n-1)$-mineur de $X$. Soit $\mathcal{R}$ le R-module libre dont les éléments sont les $n{\times}n$ - matrices a coefficients dans $R$ et soit $I$ la matrice unité d'ordre $n$.

1. Construction du complexe $C^X$

Posons $C^X_p = 0$ pour $p < 0$ et $p > 4$,

$$C^X_0 = C^X_4 = R \quad \text{et} \quad C^X_1 = C^X_3 = \mathcal{R}.$$

Pour definir $C^X_2$, considérons la suite de R-modules:

$$R \xrightarrow{i} \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} \xrightarrow{j} R$$

où $i(r) = (rI, rI)$ et $j(M,N) = \text{trace}\,(M-N)$.

Soit alors $C^X_2$ l'homologie de cette suite, soit $\operatorname{Ker} j/\operatorname{Im} i$.

Pour definir l'opérateur bord $d$ sur $C^X$, considerons la suite:

$$\mathcal{R} \xrightarrow{g} \mathcal{R} \oplus \mathcal{R} \xrightarrow{h} \mathcal{R}$$

où $g(M) = (XM, MX)$ et $h(M,N) = MX - XN$.
Soit $Y$ la matrice des cofacteurs de $X$ ; en particulier, on a $XY = YX = (\det X)I$. On definit alors $d$ par:

$d_1(M) = \text{trace}\,(YM)$ pour $M \in \mathcal{R}$

$d_2$ et $d_3$ sont les applications induites par $h$ et $g$ respectivement,

$d_4(r) = rY$ pour $r \in \mathcal{R}$.

Remarquons que $C^X$ est un complexe de $R$-modules libres tels que $H_o(C^X) = R/\mathfrak{A}$.

Lemme 1: <u>Soit</u> $\varphi : R \to R'$ <u>un homomorphisme d'anneaux commutatifs. Soit</u> $X'$ <u>la matrice obtenue en appliquant</u> $\varphi$ <u>aux coefficients de</u> $X$. <u>Alors il existe un isomorphism canonique de</u> $R'$-<u>complexes</u>

$$C^X \otimes_R R' \simeq C^{X'}$$

2. Dualité dans $C^X$.

Soit $\cdot^*$ le foncteur $\mathrm{Hom}_R(\cdot, R)$, et soit $\lambda : R \to R^*$ l'isomorphisme canonique. Considérons $\mathcal{R}$ muni de la base naturelle $\epsilon_{ij}$ $(1 \leq i,j \leq n)$, et soit $\epsilon^*_{ij}$ la base dual de $\mathcal{R}^*$. Soit $\nu : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^*$ l'homomorphisme defini par $\nu(\epsilon_{ij}) = \epsilon^*_{ji}$. Alors, l'homomorphism $\nu \oplus (-\nu)$ induit un isomorphisme $\mu : C^X_2 \to (C^X_2)^*$.

Proposition: <u>Les isomorphismes</u> $\lambda, \nu$ <u>et</u> $\mu$ <u>definissent un isomorphisme de complexe</u> $C^X_i \simeq \left[\mathrm{Hom}_R\,(C^X, R)\right]^{4-i}$.

3. Profondeur.

Soit $\Lambda = \Lambda^{\bullet}\mathcal{R}$ le complexe de Koszul sur $R$ dont l'opérateur bord $\partial$ est induit par l'application $d_1 : \mathcal{R} \to R$.

Dans ce qui suit, $E$ sera un $R$-module quelconque.

Lemme 2. <u>On a</u> $\mathfrak{a}H_i(C^X \otimes E) = 0$ <u>pour</u> $i \neq 2$.

Demonstration: Posons $C = C^X$. Il existe un homomorphisme $f : \wedge^2 \mathcal{R} \to C_2$ tel que $\partial_2 = d_2 f$. D'apres la proposition prècédente, nous avons un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & & \wedge^2\mathcal{R} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \wedge^1\mathcal{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \wedge^0\mathcal{R} \arrow[d, equal] \\
C_4 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C_3 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C_1 \arrow[r] & C_o \\
C_o^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_1^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_2^* \arrow[d, "f^*"] & & \\
(\wedge^o\mathcal{R})^* \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\wedge^1\mathcal{R})^* \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\wedge^2\mathcal{R})^* \arrow[d, "\wr"] & & \\
\wedge^{n^2}\mathcal{R} \arrow[r] & \wedge^{n^2-1}\mathcal{R} \arrow[r] & \wedge^{n^2-2}\mathcal{R} & &
\end{tikzcd}$$

En tensorisant ce diagramme par $E$, et èn remarquant que $\mathfrak{a}H(\wedge \otimes E) = 0$ (cf. (1)), on démontre le lemme 2.

Lemme 3: <u>Si la matrice</u> $X$ <u>est inversible</u>, <u>alors</u> $H(C^X \otimes E) = 0$.

Lemme 4: <u>On a</u> $\mathfrak{a}^2 H_2(C^X \otimes E) = 0$.

Demonstration: Soit $R_1$ un anneau intègre dont $R$ est quotient. Considerons $R$ comme une algebre sur l'anneau des polynomes $\tilde{R} = R_1[Y_{11}, \dots, Y_{nn}]$ en envoyant $Y_{ij}$ sur $x_{ij}$ ou $X = (x_{ij})$. Soit $\tilde{E}$ un $\tilde{R}$-module libre tel que on ait une suite exacte de $\tilde{R}$-modules: $0 \to N \to \tilde{E} \to E \to 0$. On obtient une suite exacte:

(*) $$H_2(C^Y \otimes_{\tilde{R}} \tilde{E}) \to H_2(C^X \otimes_R E) \to H_1(C^Y \otimes_{\tilde{R}} N)$$

où $Y = (Y_{ij})$. Soit $\alpha = \det Y$ et soi $C$ le conoyan de l'application injective $\tilde{E} \to \tilde{E}_\alpha$. D'apres les lemmes 1 et 3, on a $H(C^Y \otimes_{\tilde{R}} \tilde{E}_\alpha) = 0$, donc $H_2(C^Y \otimes_{\tilde{R}} \tilde{E}) \simeq H_3(C^Y \otimes_{\tilde{R}} C)$.

Alors le lemme 2 et la suite exacte (*) montre $\mathfrak{a}^2 H_2(C^X \otimes_R E) = 0$.

En appliquant les lemmes 2 et 4, on demontre le resultat suivant:

Théorèm 1: Soit $R$ un anneau noethérien. Soit $X$ une $n \times n$-matrice a coefficients dans $R$, et soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de $R$ engendré par les $(n-1)$-mineur de $X$. Soit $E$ une $R$-module de type fini tel que $\mathfrak{a}E \neq E$. Soit $c$ la longeur d'une suite $E$-reguliere de longueur maximale, contenu dans $\mathfrak{a}$. Soit $q$ le plus grand entier $i$ tel que $H_i(C^X \otimes E) \neq 0$. Alors $c+q = 4$.

4. Applications. En combinant ce théorème et (5.1) dans (2) on demontre:

Corollaire: Dans les hypothèsis du théorème, on a $\mathrm{grade}_R {}^R/\mathfrak{a} \leq 4$. De plus si $R$ est Gorenstein, et si $\mathrm{grade}_R {}^R/\mathfrak{a} = 4$, alors, $R/\mathfrak{a}$ est un anneau de Gorenstein.

Théorème 2: Soit $S$ un anneau commutatif avec unité. Soit $R = S[X_{11}, \dots, X_{nn}]$ l'algebre des polynomes a $n^2$ variables $X_{ij}$ $(1 \leq i,j \leq n)$. Soit $\mathfrak{a}$ l'ideal de $R$ engendre par les $(n-1)$- mineur de la matrice $X = (X_{ij})$. Alors

(i) $C^X$ est une resolution libre du $R$-module $R/\mathfrak{a}$. En particulier $R/\mathfrak{a}$ est de dimension projective $4$ sur $R$.

(ii) Si $S$ est un anneau de Gorenstein, alors il en est de même de $R/\mathfrak{a}$.

Demonstration: Si $S = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors (i) est une consequence de théorème 1 en utilisant le théorème 2 dans (3). On en déduit que (i) est vrai lorsque $S = \mathbb{Z}$. Comme dans ce cas $H_0(C^X)$ est sans torsion sur $\mathbb{Z}$, le lemme 1 montre que $C^X$ est acyclic en général.

References


(1) M. Auslander et D.A. Buchsbaum,
Ann. Math., 68, 1958, p. 625-657.

(2) H. Bass, Math. Zeitschr. 82, 1963, p. 8-28.

(3) J.A. Eagon, Math. Zeitschr. 109, 1969, p. 109-111.