Sur le groupe de Witt d'un anneau de Prüfer

Soient A un anneau de Prüfer, K son corps de fractions, $WQ(A)$ le groupe de Witt d'espaces quadratiques sur A, h_A^K l'application canonique de $WQ(A)$ dans $WQ(K)$. Nous savons que, si A est un anneau de Dedekind et si 2 n'est pas un diviseur de zéro dans A, alors

$$h_A^K(WQ(A)) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A} h_{A_{\mathfrak{m}}}^K (WQ(A_{\mathfrak{m}})) ,$$

où $\mathcal{M}_A$ désigne l'ensemble des idéaux maximaux de A, $A_{\mathfrak{m}}$ le localisé de A en l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. [5], [6].

Le but de cette note est d'étendre ce résultat à un anneau de Prüfer quelconque.

1. Sur l'anneau de Prüfer

Soient A un anneau intègre, K son corps de fractions. S désignant une partie multiplicative de A, nous identifierons les éléments de $S^{-1}A$ avec leurs images dans K par l'injection canonique de $S^{-1}A$ dans K.

A sera dit de Prüfer si tout A-module de type fini sans torsion est projectif.

Théorème 1.1. Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) A est un anneau de Prüfer,

ii) tout sous A-module de type fini de K est inversible,

iii) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de valuation.

Démonstration: elle est donnée dans [3], [4].

Corollaire 1.2. <u>Soit B un sous-anneau de K contenant A ; si A est un anneau de Prüfer, alors B est un anneau de Prüfer.</u>

Nous supposerons par la suite que A est un anneau de Prüfer.

Théorème 1.3. <u>Soient B un sous-anneau de K contenant A , I un idéal de B . On a : $I = (I \cap A) \cdot B$.</u> [3]

Démonstration: il est évident que $(I \cap A) \cdot B \subset I$. D'autre part, soit i un élément de I ; le sous-A-module de K engendré par 1 et i est de type fini, donc inversible (1.1. ii)); ceci entraine qu'il existe deux éléments α, β de A tels que $1 = \alpha + \beta . i$, $\alpha . i \in A \cap I$ et $\beta . i \in A \cap I$. En multipliant les deux termes de l'égalité par i , on obtient que $i = \alpha . i + (\beta . i) . i \in (I \cap A) . B$.

Corollaire 1.4. <u>Si, de plus, I est de type fini, il existe alors un système fini de générateurs de I contenus dans $I \cap A$.</u>

Théorème 1.5. <u>Soit B un sous-anneau de K contenant A , désignons par $\mathcal{P}_A$ (resp. $\mathcal{P}_B$) l'ensemble des idéaux premiers de A (resp. B). On a :</u> $\mathcal{P}_B = \{\mathfrak{p} . B ; \mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A \text{ et } \mathfrak{p} . B \neq B\}$. [3].

Démonstration: soit $\mathfrak{p}' \in \mathcal{P}_B$; d'après 1.3., $\mathfrak{p}' = (\mathfrak{p}' \cap A) . B$, où $\mathfrak{p}' \cap A$ est un idéal premier de A , vérifiant $(\mathfrak{p}' \cap A) . B \neq B$. D'autre part, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A vérifiant $\mathfrak{p} . B \neq B$; il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B contenant $\mathfrak{p} . B$; l'anneau local $B_{\mathfrak{m}}$ domine l'anneau local $A_{\mathfrak{m} \cap A}$, qui est un anneau de valuation (1.1. iii)), on a donc : $A \subset B \subset B_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m} \cap A} = A_{\mathfrak{p}}$. Considérons l'idéal maximal $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$; $\mathfrak{p} . A_{\mathfrak{p}} \cap B = ((\mathfrak{p} . A_{\mathfrak{p}} \cap B) \cap A) . B$

d'après 1.3.; de plus, $\mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{p}$; on en déduit que:
$\mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}} \cap B = ((\mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}} \cap B) \cap A).B = (\mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}} \cap A).B = \mathfrak{p}.B$ et, comme $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cap B \in \mathcal{P}_B$, il vient que $\mathfrak{p}B \in \mathcal{P}_B$.

<u>Lemme 1.6. Soient B un sous-anneau de K contenant A , $\mathfrak{p}$ un' elément de $\mathcal{P}_A$. Les conditions suivantes sont équivalentes:</u>

i) $\mathfrak{p}.B \in \mathcal{P}_B$

ii) $\mathfrak{p}.B \cap A = \mathfrak{p}$

Démonstration:

i) ⟹ (ii): il vient de la démonstration de 1.5. que $\mathfrak{p}.B = \mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}} \cap B$ d'ou $\mathfrak{p}.B \cap A = \mathfrak{p}$.

ii) ⟹ (i): d'après [2] Ch. 2, §2,n°5, Corollaire 3, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de B contenant $\mathfrak{p}.B$ et vérifiant $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}' = (\mathfrak{p}' \cap A).B = \mathfrak{p}.B$, on a que $\mathfrak{p}.B \in \mathcal{P}_B$.

<u>Théor ème 1.7. Soient B_1 et B_2 deux sous-anneaux de K tels que $B_1 \cap B_2 = A$, I_1 (resp. I_2) un idéal de type fini de B_1 (resp. B_2); désignons par B le sous-anneau de K engendré par B_1 et B_2 et supposons que $BI_1 = BI_2$ (nous dirons que le B_1-module I_1 et le B_2-module I_2 sont compatibles). Alors</u>

$I_1 = (I_1 \cap I_2).B_1$ <u>et</u> $I_2 = (I_1 \cap I_2).B_2$.

Démonstration: il suffit de montrer que, pour tout $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{B_1}$, $(I_1)_{\mathfrak{m}} = ((I_1 \cap I_2).B_1)_{\mathfrak{m}}$; or, d'aprés 1.5., pour tout $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{B_1}$, il existe $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$ tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}.B_1$; de plus,

$$((I_1 \cap I_2).B_1)_{\mathfrak{p}.B_1} = (I_1 \cap I_2)_{\mathfrak{p}}.(B_1)_{\mathfrak{p}.B_1} = ((I_1)_{\mathfrak{p}} \cap (I_2)_{\mathfrak{p}}).(B_1)_{\mathfrak{p}B_1}$$

car $A_{\mathfrak{p}}$ est un A-module plat. Il suffit donc de montrer que, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$ tel que $\mathfrak{p}.B_1 \in \mathcal{M}_{B_1}$, $(I_1)_{\mathfrak{p}.B_1} = ((I_1)_{\mathfrak{p}} \cap (I_2)_{\mathfrak{p}}).(B_1)_{\mathfrak{p}.B_1}$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$ tel que $\mathfrak{p}.B_1 \in \mathcal{M}_{B_1}$; remarquons que $A_{\mathfrak{p}} = (B_1)_{\mathfrak{p}.B_1}$ et que $B_{\mathfrak{p}} = (B_2)_{\mathfrak{p}}$: en effet, l'anneau local $(B_1)_{\mathfrak{p}.B_1}$ domine $A_{\mathfrak{p}}$ (1.6.), qui est un anneau de valuation (1.1. iii)) d'ou $(B_1)_{\mathfrak{p}.B_1} = A_{\mathfrak{p}}$; d'autre part, un élément de $B_{\mathfrak{p}}$ s'écrit comme somme d'éléments de la forme $\frac{b_1.b_2}{s}$ où $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$, $s \in A - \mathfrak{p}$; comme $b_1 \in B_1 \subset (B_1)_{\mathfrak{p}.B_1} = A_{\mathfrak{p}}$, $\frac{b_1.b_2}{s} \in A_{\mathfrak{p}}.(B_2)_{\mathfrak{p}} = (B_2)_{\mathfrak{p}}$; on a donc $B_{\mathfrak{p}} = (B_2)_{\mathfrak{p}}$. De l'égalité $B.I_1 = B.I_2$, il vient que $(B.I_1)_{\mathfrak{p}} = (B.I_2)_{\mathfrak{p}}$; or $(B.I_1)_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}.(I_1)_{\mathfrak{p}}$ et $(B.I_2)_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}.(I_2)_{\mathfrak{p}} = (I_2)_{\mathfrak{p}}$ puisque $B_{\mathfrak{p}} = (B_2)_{\mathfrak{p}}$; de plus, comme I_1 est un idéal de type fini de B_1 , il est non dégénéré et inversible d'où il vient de [2], Ch. 2, §5,N°6, Théorème 4 que le $(B_1)_{\mathfrak{p}.B_1}$-module $(I_1)_{\mathfrak{p}.B_1}$ est monogène et du fait que $A_{\mathfrak{p}} = (B_1)_{\mathfrak{p}.B_1}$, on déduit que $(I_1)_{\mathfrak{p}} = (I_1)_{\mathfrak{p}.B_1} = A_{\mathfrak{p}}.i_1$ où $i_1 \in I_1$. Nous avons donc que $(I_2)_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}.(I_1)_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}.A_{\mathfrak{p}}.i_1 = (B_2)_{\mathfrak{p}}.i_1$ d'où $(I_2)_{\mathfrak{p}} \supset (I_1)_{\mathfrak{p}}$ et $(I_1)_{\mathfrak{p}.B_1} = (I_1)_{\mathfrak{p}}.(B_1)_{\mathfrak{p}.B_1} = ((I_1)_{\mathfrak{p}} \cap (I_2)_{\mathfrak{p}}).(B_1)_{\mathfrak{p}.B_1}$.

Par un raisonnement identique, on obtient que $I_2 = (I_1 \cap I_2).B_2$.

<u>Corollaire 1.8.</u> <u>Le théorème précédent est encore valable lorsque les I_1 sont des sous - B_i-modules de type fini de K compatibles.</u>

2. Sur le groupe de Witt d'un anneay de Prüfer.

Soient A un anneau de Prüfer, K son corps de fractions.
On appelle espace quadratique sur A tout couple (X,q) où X est un A-module projectif de type fini muni d'une forme quadratique q à valeurs dans A et non dégénérée (i.e., B_q désignant la forme bilinéaire associée à q, l'application canonique $d_q : X \longrightarrow X^* = \mathrm{Hom}_A(X,A)$ définie par $d_q(x)(x') = B_q(x,x')$ est un isomorphisme).
Désignons par $Q(A)$ l'ensemble des espaces quadratiques; $Q(A)$ muni de l'opération dite somme orthogonale définie comme suit:

$$(X',q') \oplus (X'',q'') = (X'\oplus X'',q)$$

$$\text{où} \quad q : X'\oplus X'' \longrightarrow A : (x',x'') \longmapsto q'(x') + q''(x'')$$

a une structure de monoide.
On appelle plan hyperbolique sur A tout élément (X,q) de $Q(A)$, où X est somme directe de deux sous-A-modules X' et X'' de rang 1 et totalement isotropes (i.e. la restriction de q à X' est nulle, ainsi que la restriction de q à X'').
Désignons par $H(A)$ le sous-monoide de $Q(A)$ formé des sommes orthogonales de plans hyperboliques sur A. Les éléments de $H(A)$ sont appelés espaces neutres sur A et notés (N,q_o).
Considérons la relation d'équivalence définie sur $Q(A)$ comme suit:
(X',q') et (X'',q'') sont dans la même classe d'équivalence si et seulement s'il existe deux espaces neutres (N',q'_o) et (N'',q''_o) sur A tels que $(X_1,q_1) = (X',q') \oplus (N',q'_o)$ et $(X_2,q_2) = (X'',q'') \oplus (N'',q''_o)$ sont isométriques (i.e. il existe un isomorphisme $i : X_1 \longrightarrow X_2$ satisfaisant $q_2(i(x_1)) = q_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in X_1$).

Soit $WQ(A)$ l'ensemble quotient de $Q(A)$ par la relation d'équivalence définie ci-dessus ; $WQ(A)$, muni de l'opération induite par l'opération somme orthogonale définie sur $Q(A)$, a une structure de groupe; on le nomme groupe de Witt d'espaces quadratiques sur A et on note ses éléments $[(X,q)]_A$. Remarquons que cette définition coincide avec celle donnée dans [6], Appendice 1 et est une généralisation de la notion de groupe de Witt d'un corps défini dans [1].

Lemme 2.1. Soit B un sous-anneau de K contenant A . L'homomorphisme canonique suivant est injectif:

$$h_A^B : WQ(A) \hookrightarrow WQ(B)$$

$$[(X,q)]_A \longmapsto [B.(X,q)]_B \;,\; \text{où } B.(X,q) = (B \otimes_A X, q'), q'$$

désignant l'extension de q à $B \otimes_A X$ ([1],Ch 9,§3,n°4,Proposition 3)

Démonstration: elle se trouve dans [4] Ch.2.

Définition 2.2. Soient B un sous-anneau de K contenant A , (X,q) un espace quadratique sur B ; nous appellons A-réseau unimodulaire de (X,q) tout couple (X',q') , où X' est un sous-A-module de type fini de X vérifiant $B.X' = X$, où q' est la restriction de q à X' et est une forme quadratique à valeurs dans A et non dégenerée. Nous désignerons le A-réseau unimodulaire (X',q') , qui est évidemment un élément de $Q(A)$, par X' .

Lemme 2.3. Soient B un sous-anneau de K contenant A , (X,q) un espace quadratique sur B , X' un sous-module de type fini de (X,q) vérifiant $B.X' = X$. X' est un A-réseau unimodulaire de

(X,q), si et seulement si $X' = (X')^{o}$, où $(X')^{o} = \{y \in X \ ; \ (\forall x \in X')B_q(x,y) \in A\}$.

Démonstration: ceci provient du fait que $(X')^{o}$ est isomorphe à $(X')^{*} = \mathrm{Hom}_A(X',A)$.

Lemme 2.4. Soient B un sous-anneau de K contenant A , (N,q_o) un espace neutre sur B ; il existe un A-réseau unimodulaire de (N,q_o) .

Démonstration: (N,q_o) est une somme orthogonale de plans hyperboliques sur B ; il suffit donc de montrer que, pour tout plan hyperbolique (H,q_o) sur B , il existe un A-reseau unimodulaire H' de (H,q_o) .

Nous avons vu dans [4], Ch.2 que, pour tout plan hyperbolique (H,q_o) sur B , il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini de B tel que (H,q_o) soit le B-réseau unimodulaire $h = \mathfrak{a}.x \oplus \mathfrak{a}^{-1}.y$ de l'espace quadratique sur K :$(X = Kx \oplus Ky, q)$, q étant défini par $q(x) = q(y) = 0$ et $B_q(x,y) = 1$.
Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ un système de générateurs de $\mathfrak{a}$; posons $\mathfrak{a}' = Aa_1 + Aa_2 + \dots + Aa_n$, $\mathfrak{a}'$ est un sous-A-module de type fini de K tel que $B.\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$; de plus, on vérifie que $B.(\mathfrak{a}')^{-1} = \mathfrak{a}^{-1}$.
$H' = \mathfrak{a}'.x \oplus (\mathfrak{a}')^{-1}.y$ est donc un A-réseau unimodulaire de (H,q_o) , H' est bien entendu neutre sur A .

Lemme 2.5. Soient (X_1,q_1), (X_2,q_2) et (X,q) des espaces quadratiques sur K , tels que $(X_1,q_1) = (X_2,q_2) \oplus (X,q)$. S'il existe un A-réseau unimodulaire X_1' de (X_1,q_1) et X_2' de (X_2,q_2) , alors il existe un A-réseau unimodulaire de (X,q) .

Démonstration: c'est une conséquence immédiate de la proposition 1.3.5 de [5].

Proposition 2.6. Soient B_1 et B_2 deux sous-anneaux de K tels que $B_1 \cap B_2 = A$, B le sous-anneau de K engendré par B_1 et B_2, (X,q) un espace quadratique sur K. S'il existe un B_1-réseau unimodulaire X_1 de (X,q) et un B_2-réseau unimodulaire X_2 de (X,q), qui sont compatibles (i.e. $B.X_1 = B.X_2$), alors $X_1 \cap X_2$ est un A-réseau unimodulaire de (X,q).

Démonstration: montrons tout d'abord que $X_i = (X_1 \cap X_2)\cdot B_i$ pour $i = 1$ et 2. Nous avons: $X_i = \bigcup_{x\in X} Kx \cap X_i = \bigcup_{x\in X} I_i^x \cdot x$, où les I_i^x sont des sous-B_i-modules de type fini de K ([4],Ch.2,Proposition 1); les B_i-modules I_i^x sont compatibles: en effet, comme $B.X_1 = B.X_2$, on a, pour tout $x \in X$, $(B.X_1)\cap Kx = (B.X_2)\cap Kx$ ou encore $B.(X_1 \cap Kx) = B.(X_2 \cap Kx)$ car B est un B_i-module plat; d'où $B.I_1^x = B.I_2^x$ pour tout $x \in X$. Appliquons le corollaire 1.8. aux idéaux compatibles I_1^x et I_2^x, on obtient que $I_i^x = (I_1^x \cap I_2^x).B_i$ pour tout $x \in X$ et pour $i = 1,2$, d'où il vient que, pour $i = 1,2$, $(X_1 \cap X_2).B_i = (\bigcup_{x\in X}(X_1 \cap X_2 \cap Kx)).B_i = \bigcup_{x\in X}(X_1 \cap X_2 \cap Kx).B_i$

$$= \bigcup_{x\in X}(I_1^x x \cap I_2^x x).B_i = \bigcup_{x\in X}((I_1^x \cap I_2^x).B_i)\cdot x$$

$$= \bigcup_{x\in X} I_i^x . x = X_i .$$

On peut donc choisir un système de générateurs de X_1 et X_2 dans $X_1 \cap X_2$; notons le $(g_1,g_2,\dots,g_m)$. Soit Y le sous-A-module de X engendré par $g_1,g_2,\dots,g_m$; on a que $Y \subset X_1 \cap X_2$, $Y.B_1 = X_1$ et $Y.B_2 = X_2$. Nous allons montrer que Y est un A-réseau unimodulaire de (X,q) égal à $X_1 \cap X_2$.

On a que $X_1 \cap X_2 \subset (X_1 \cap X_2)^o$: en effet, soit $x \in X_1 \cap X_2$;

pour tout $y \in X_1 \cap X_2$, $B_q(x,y) \in B_1 \cap B_2$, car $X_1 = (X_1)^o$ et $X_2 = (X_2)^o$ d'après le lemme 2.3.; d'où $x \in (X_1 \cap X_2)^o$.
D'autre part, $Y^o \subset X_1 \cap X_2$: en effet, soit $x \in Y^o$; pour tout $y \in Y$, $B_q(x,y) \in A$ d'où, pour tout $y \in X_i = Y.B_i$, $B_q(x,y) \in B_i$, ceci pour $i = 1$ et 2 ; il vient donc que $x \in X_1^o = X_1$ et $x \in X_2^o = X_2$ soit que $x \in X_1 \cap X_2$.
On a donc que $Y^o \subset X_1 \cap X_2 \subset (X_1 \cap X_2)^o$; de plus, comme $Y \subset X_1 \cap X_2$, $(X_1 \cap X_2)^o \subset Y^o$; il vient alors que $(X_1 \cap X_2)^o \subset Y^o \subset X_1 \cap X_2 \subset (X_1 \cap X_2)^o$ soit que $Y = X_1 \cap X_2$ est un A-réseau unimodulaire de (X,q) .

Théorème 2.7. Soit (X,q) un espace quadratique sur K , tel que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , il existe un $A_{\mathfrak{m}}$-réseau unimodulaire $X_{(\mathfrak{m})}$ de (X,q) , alors il existe un A-réseau unimodulaire de (X,q) .

Démonstration: soit $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A$; $A_{\mathfrak{m}}$ étant un anneau local de Prüfer, $X_{(\mathfrak{m})}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module libre de rang n , n étant la dimension de X ; choisissons une base $(e_1^{\mathfrak{m}}, e_2^{\mathfrak{m}}, \dots, e_n^{\mathfrak{m}})$ de $X_{(\mathfrak{m})}$, de sorte que les $B_q(e_i^{\mathfrak{m}}, e_j^{\mathfrak{m}})$ soient dans A ; soit $d_{(\mathfrak{m})}$ le déterminant de l'homomorphisme canonique $d_q^{\mathfrak{m}} : X_{(\mathfrak{m})} \longrightarrow (X_{(\mathfrak{m})})^* : x \longmapsto (y \longmapsto B_q(x,y))$ dans la base $(e_1^{\mathfrak{m}}, \dots, e_n^{\mathfrak{m}})$; $d_q^{\mathfrak{m}}$ étant un isomorphisme, $d_{(\mathfrak{m})}$ est inversible dans $A_{\mathfrak{m}}$ d'où $d_{(\mathfrak{m})} \in A - \mathfrak{m}$.
Considérons l'idéal I de A engendré par les $d_{(\mathfrak{m})}$, $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A$; $I.A_{\mathfrak{m}}$ est un idéal de $A_{\mathfrak{m}}$ contenant $d_{(\mathfrak{m})}$, qui est inversible dans $A_{\mathfrak{m}}$; on a donc que $I.A_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A$. Or
$I = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A} I.A_{\mathfrak{m}}$ ([2],Ch.2, §3,n°3, Corollaire 4) d'où
$I = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A} I.A_{\mathfrak{m}} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A} A_{\mathfrak{m}} = A$. Il existe donc un nombre fini

d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \dots, \mathfrak{m}_k$ de A tels que $d_{(\mathfrak{m}_1)}, \dots, d_{(\mathfrak{m}_k)}$ engendrent A .

Posons, pour $i = 1,2,\dots,k$, $B_i = \bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{m}\in \mathcal{M}_A \\ d_{(\mathfrak{m}_i)}\notin \mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}}$,

$X_i = B_i e_1^{\mathfrak{m}_i} \oplus\dots\oplus B_i e_n^{\mathfrak{m}_i}$; B_i est un sous-anneau de K contenant A dans lequel $d_{(\mathfrak{m}_i)}$ est inversible; X_i est un B_i-réseau unimodulaire de (X,q) : en effet, $K.X_i = K.B_i.X_{(\mathfrak{m}_i)} = K.X_{(\mathfrak{m}_i)} = X$ et $(X_i)^o = (B_i.X_{(\mathfrak{m}_i)})^o = B_i(X_{(\mathfrak{m}_i)})^o = B_i.X_{(\mathfrak{m}_i)} = X_i$.

Soit $B_{1,2}$ le sous-anneau de K engendré par B_1 et B_2 ; considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
WQ(B_i) \arrow[rr, hook, "h_{B_i}^{B_{1,2}}"] \arrow[dr, hook, "h_{B_i}^{K}"'] & & WQ(B_{1,2}) \arrow[dl, hook', "h_{B_{1,2}}^{K}"] \\
& WQ(K) &
\end{tikzcd} \qquad i = 1,2,\dots,k \ ;$$

appelons q_i la restriction de q à X_i ; comme $K.X_1 = K.X_2$, $h_{B_1}^K([(X_1,q_1)]_{B_1}) = h_{B_2}^K([(X_2,q_2)]_{B_2})$ d'où

$h_{B_1}^{B_{1,2}}([(X_1,q_1)]_{B_1}) = h_{B_2}^{B_{1,2}}([X_2,q_2)]_{B_2})$; il existe donc deux espaces neutres (N',q_o') et (N'',q_o'') sur $B_{1,2}$ tels que $(B_{1,2}.(X_1,q_1)) \oplus (N',q_o')$ et $(B_{1,2}.(X_2,q_2)) \oplus (N'',q_o'')$ soient isométriques; remarquons, en particulier, que $K.(N',q_o')$ et $K.(N'',q_o'')$ sont deux espaces neutres de même dimension sur K ; d'après [1],Ch.9,§4,n°2, il existe une isométrie i_o de $K(N',q_o')$ sur $K.(N'',q_o'')$; d'autre part, d'après le lemme 2.4., il existe un B_1-réseau unimodulaire N_1' de (N',q_o') et un B_2-réseau unimodulaire N_2'' de (N'',q_o'') . On en déduit donc que $B_{1,2}.(X_1 \oplus i_o(N_1'))$ et $B_{1,2}.(X_2 \oplus N_2'')$ sont des $B_{1,2}$-réseaux unimodulaires de $(X,q) \oplus K.(N'',q_o'')$ qui sont égaux. Appliquons la proposition 2.6.

au B_1-réseau unimodulaire $X_1 \oplus i_o(N'_1)$ de $(X,q) \oplus K.(N'',q''_o)$ et au B_2-réseau unimodulaire $X_2 \oplus N''_2$ de $(X,q) \oplus K.(N'',q''_o)$ qui sont compatibles, il vient que $(X_1 \oplus i_o(N'_1)) \cap (X_2 \oplus N''_2)$ est un $B_{1,2}$-réseau unimodulaire de $(X,q) \oplus K.(N'',q''_o)$ et les lemmes 2.4 et 2.5. entrainent qu' il existe un $B_{1,2}$-réseau unimodulaire $X_{1,2}$ de (X,q) .

Reprenons le même raisonnement en remplacant B_1 par $B_{1,2}$, B_2 par B_3 , X_1 par $X_{1,2}$, X_2 par X_3 .

On obtient finalement qu'il existe un $A = \bigcap_{i=1}^{k} B_i$-réseau unimodulaire de (X,q) .

<u>Corollaire 2.8.</u> $h_A^K(WQ(A)) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A} h_{A_\mathfrak{m}}^K(WQ(A_\mathfrak{m}))$.

Démonstration: il est évident que $h_A^K(WQ(A)) \subset \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A} h_{A_\mathfrak{m}}^K(WQ(A_\mathfrak{m}))$.

D'autre part, soit $[(X,q)]_K$ un élément de $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A} h_{A_\mathfrak{m}}^K(WQ(A_\mathfrak{m}))$;

pour tout $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A$, il existe $(X_{(\mathfrak{m})},q_{(\mathfrak{m})}) \in Q(A_\mathfrak{m})$ tel que $h_{A_\mathfrak{m}}^K([(X_{(\mathfrak{m})},q_{(\mathfrak{m})})]_{A_\mathfrak{m}}) = [(X,q)]_K$; des lemmes 2.4 et 2.5., on déduit que, pour tout $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_A$, il existe un $A_\mathfrak{m}$-réseau unimodulaire $X'_{(\mathfrak{m})}$ de (X,q) ; le théorème 2.7. nous permet de conclure.

Bibliographie:

[1] Bourbaki, N. Algèbre. Chapitre 9. Hermann - Paris - 1959.

[2] ———— Algèbre Commutative. Chapitres 1 et 2. Hermann - Paris - 1961.

[3] Gilmer, R. Multiplicative Ideal Theory. 12 Pure and Applied Mathematics. New York 1972.

[4] Høstmælingen- Lefranc, Ch. Formes bilinéaires sur un anneau de Prüfer. D.E.A. Montpellier - 1970.

[5] ———— Anneaux de Witt de certains anneaux de Prüfer. Thèse de 3ième cycle. Montpellier - 1972.

[6] Milnor, S. and Husemoller, D. Symmetric Bilinear Forms. Springer-Verlag - Berlin - Heidelberg - New York - 1973.