ISBN 82–553–0851–2
Pure Mathematics

No.20
August 1993

Calcul de densité de Radon-Nikodym sur l'espace de Wiener

by

Ali Süleyman ÜSTÜNEL et Moshe ZAKAI

PREPRINT SERIES – Matematisk institutt, Universitetet i Oslo

Calcul de densité de Radon-Nikodym sur l'espace de Wiener

Ali Süleyman ÜSTÜNEL et Moshe ZAKAI

Abstract

In this note we derive the Radon-Nikodym density for the image of the Wiener measure under a not-necessarily invertible perturbation of the identity with an $H-C^1$ random variable with values in the Cameron-Martin space. Then we give an extension of the degree theorem with the help of these results.

Résumé

Dans cette note nous donnons l'expression de densité de Radon-Nikodym pour l'image de mesure de Wiener sous une application non-nécessairement inversible, qui est de la forme d'une perturbation de l'identité avec une application de classe $H-C^1$ à valeurs dans l'espace de Cameron-Martin. Ensuite nous appliquons ces resultats à l'extension du théorème de degré.

Abridged English version: Let (W, H, μ) be an abstract Wiener space. Suppose now that $F : W \to H$is a measurable map such that, for any $h \in H$, $|F(w+h) - F(w)|_H \leq c|h|_H$, with $c < 1$. Suppose furthermore that the Hilbert-Schmidt norm of the Sobolev derivative of F, denoted by ∇F is essentially bounded. Then we have

$$E[f(w + F(w))|\Lambda_F|] = E[f],$$

for any $f \in C_b(W)$, where $\Lambda_F = det_2(I_H + \nabla F)\exp -\delta F - \frac{1}{2}|F|^2$, det_2 represents the Carleman-Fredholm determinant and δF is the divergence of the vector field F. If F is supposed to be $H-C^1$, but not necessarily with ∇F essentially bounded, using the above result, we show that on the set on which $det_2(I + \nabla F)$ is non-zero, almost surely, the multiplicity of the map $w \mapsto w + F(w) = T(w)$ is at most countably infinite and on every compact subset W on which the above determinant is non-zero, this multiplicity is almost surely finite. Let $D = \{w : det_2(I + \nabla F(w)) \neq 0\}$, then we have, for any $f \in C_b^+(W)$ and Borel set $B \subset W$

$$E[f \circ T|\Lambda_F|1_B] = E[fN(w, B \cap D)],$$

where $N(w, B \cap D)$ is the cardinal of the set $T^{-1}\{w\} \cap B \cap D$. With the help of this result we can show that

$$\frac{dT^\star \mu|_D}{d\mu}(w) = \sum_{y \in D, T(y)=w} \frac{1}{|\Lambda_F(y)|}.$$

This result gives us a generalization of the degree theorem as well.

Préliminaires- Soit (W, H, μ) un espace de Wiener abstrait, si X est un espace hilbertien séparable, nous noterons par $D_{p,k}(X)$ $(p > 1, k \in Z)$l'espace de Sobolev de fonctionnelles de Wiener à valeurs dans X, k-fois differentiables dans la direction de l'espace de Cameron-Martin, avec les dérivées appartenant à l'espace $L^p(\mu)$, où μ représente la mesure de Wiener . Nous notons par ∇ la dérivée de Sobolev et par δ son adjoint par rapport à μ, appelé la divergence.

La proposition suivante étend et développe le Théorème 6.1 de [4]:

Proposition 1 *Soit $F : W \mapsto H$ une application mesurable telle que pour tout $h \in H$, μ-p.s., on a*

$$|F(w+h) - F(w)|_H \leq c|h|,$$

où $1 > c > 0$ est une constante. De plus supposons que la dérivée de F au sens de distributions, ∇F, appartient à $L^\infty(\mu, H \otimes H)$. Alors nous avons, pour toute $f \in C_b(W)$,

$$E[f \circ T|\Lambda_F|] = E[f].$$

Remarque 1 *Notons que l'hypothèse ci-dessus implique que $F \in L^p(\mu, H)$ pour tout $p > 1$ (c.f., [7, 8]).*

Preuve: Soit $(e_i; i \in N) \subset W^\star$ une base orthonormée de H et notons par V_n la tribu engendrée par les gaussiennes $\{\delta e_1, \ldots, \delta e_n\}$, π_n la projection orthogonale sur l'espace engendré par $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et par $P_t, t \geq 0$ le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck sur W. En prenant $F_n = E[\pi_n P_{1/n} F|V_n]$, on réduit d'abord le problème à un problème en dimension finie. Comme $|\nabla F_n|_\infty \leq c < 1$, à l'aide de théorème de point fixe (cf. [4])on construit

$T_{G_n}(w) = w - G_n(w)$, $G_n : W \mapsto H$ telle que $T_{G_n} \circ T_{F_n} = T_{F_n} \circ T_{G_n} = Id_W$. Il est facile de voir que $\|\nabla G_n\|_\infty \le \frac{c}{1-c}$, donc un calcul simple donne $\|\nabla G_n\|_2 \le \frac{c}{1-c}\|\|\nabla F\|_2\|_{L^\infty(\mu)}$ où $\|.\|_\infty$ est la norme forte d'opérateurs et $\|.\|_2$ est la norme Hilbert-Schmidt d'opérateurs sur H. De plus, en utilisant l'identité (cf., par exemple [9])

$$(\delta F_n) \circ T_{G_n} = \delta(F_n \circ T_{G_n}) - (F_n \circ T_{G_n}, G_n)_H - trace(\nabla F_n \circ T_{G_n}.\nabla G_n),$$

on voit facilement que $\{E[|\Lambda_n| \log^+ |\Lambda_n|]; n \in N\}$ est borné, par conséquent $(\Lambda_n; n \in N)$ est uniformément intégrable.$\|QED$

Corollaire 1 *Sous les hypothéses de la proposition, T est p.s. inversible et nous avons*

$$\begin{aligned} E[f \circ T^{-1}] &= E[f.|\Lambda_F|], \\ E[f \circ T] &= E[f.\frac{1}{|\Lambda_F \circ T^{-1}|}], \end{aligned}$$

pour toute $f \in C_b(W)$.

Les applications $H - C^1$

On dit qu'une application mesurable $\phi : W \mapsto X$ est $H - C^1$, où X est un espace de Banach, si, presque surement, l'application $h \mapsto \phi(w + h)$ est Frćhet differentiable sur l'espace de Cameron-Martin H. Soit $F : W \mapsto H$ une application $H - C^1$ et soit $D = \{det_2(I_H + \nabla F) \neq 0\}$. Les résultats ci-dessus s'étendent de la manière suivante:

Théorème 1 *Soit $F : W \mapsto H$ une application mesurable et $H - C^1$. Alors la multiplicité de $T : W \mapsto W$, définie par $T(w) = w + F(w)$, sur l'ensemble D, i.e., le cardinal $|T^{-1}\{w\} \cap D|$, noté $N(w, D)$, est au plus infini-dénombrable et nous avons, pour tout $f \in C_b^+(W)$ et $B \subset W$ borelien de mesure positive*

$$E[f \circ T \; 1_B |\Lambda_F|] = E[f \; N(w, B \cap D)].$$

Preuve: D'après [4], il existe une partition dénombrable $(C_\alpha; \alpha \in N)$ de D telle que, sur chaque C_α, T se décompose comme

$$T(w) = (I_W - h_\alpha) \circ (I_W - \tilde{F}_\alpha) \circ (I_W - \tilde{K}_\alpha)(w)$$

où $h_\alpha \in H$, F_α satisfait à l'hypothèse de la proposition 1 et K_α est un opérateur de W dans $W^\star$, de rang fini, tel que $I_H - K_\alpha$est inversible sur H. Alors, en combinant ceci avec la proposition 1, nous avons pour toute $f \in C_b^+(W)$,

$$\begin{aligned}
E[f \circ T \ 1_B |\Lambda_F|] &= E[\sum_\alpha f \circ T_\alpha 1_{B\cap D\cap C_\alpha} |\Lambda_{F_\alpha}|] \\
&= E[\sum_\alpha f \circ T_\alpha 1_{B\cap D\cap C_\alpha} \circ T_\alpha^{-1} \circ T_\alpha |\Lambda_{F_\alpha}|] \\
&= E[\sum_\alpha f \ 1_{T_\alpha(B\cap D\cap C_\alpha)}] \\
&= E[\sum_\alpha f \ 1_{T(B\cap D\cap C_\alpha)}] \\
&= E[f \ |T^{-1}\{w\} \cap B \cap D|] \\
&= E[f \ N(w, B\cap D)].
\end{aligned}$$

$\|QED$

Remarque 2 *Ici les espèrances peuvent prendre la valeur $+\infty$, de plus, si $E[|\Lambda_F|] < +\infty$, alors $E[|T^{-1}\{w\} \cap D|] < \infty$.*

Remarque 3 *En fait le résultat du théorème implique, grâce au Théorème d'Egoroff, que l'image de la restriction de μ à D, notée $\mu|_D$, est absolument continue par rapport à μ.*

Le corollaire ci-dessous donne une version symétrique de l'énoncé du théorème:

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du thórème, nous avons, pour toutes $f, g \in C_b^+(W)$,*

$$E[f \circ T \ g \ |\Lambda_F|] = E[\ f \sum_{y\in T^{-1}\{w\}\cap D} g(y)] \ .$$

Si F est $H - C^1$, nous pouvons calculer la densité de $T^\star(\mu|_D)$ par rapport à μ:

Proposition 2 *Supposons que F est $H - C^1$, alors nous avons:*

$$\frac{dT^\star(\mu|_D)}{d\mu}(w) = \sum_{y\in T^{-1}\{w\}\cap D} \frac{1}{|\Lambda_F(y)|} \ .$$

La preuve découle de la méthode utilisée dans la démonstration du théorème.

Nous pouvons donner aussi une extension du théorème de dégré (c.f. [3, 5, 10]) comme ci-dessous:

Théorème 2 *Soit $F : W \mapsto H$ une application mesurable et $H - C^1$. Supposons de plus que pour un $\gamma > 0$ et $r > (1+\gamma)/\gamma$, $F \in D_{r,2}(H)$, $\Lambda_F \in L^{1+\gamma}(\mu)$ et que $\Lambda_F(I_H + \nabla F)^{-1}v \in L^{1+\gamma}(\mu, H)$ pour tout $v \in W^\star$. Alors nous avons presque surement*

$$E[\Lambda_F] = \sum_{y \in T^{-1}\{w\} \cap D} sign\ \Lambda_F(y).$$

Preuve: Les hypothèses d'intégrabilité impliquent que l'on ait (c.f. [3, 10])

$$E[f \circ T\ \Lambda_F] = E[f]E[\Lambda_F],$$

pour toute $f \in C_b(W)$. La propriètè $H - C^1$ implique que l'on ait

$$E[f \circ T\ \Lambda_F] = E[f(w) \sum_{y \in T^{-1}\{w\} \cap D} sign \Lambda_F(y)],$$

pout toute $f \in C_b(W)$. En comparant les deux égalités, on obtient le théorème. $\| QED$

References

[1] N. Bouleau and F. Hirsch: Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space. De Gruyter Studies in Math., Vol. 14, Berlin-New York, 1991.

[2] R. Buckdahn: "Anticipative Girsanov transformations". Proba. Th. and Related Fields, vol.89, p. 223-240(1991).

[3] E. Getzler: "Degree theory for Wiener maps". J. Funct. Anal., 68, p.388-403 (1986).

[4] S. Kusuoka: "The nonlinear transformation of Gaussian measures on Banach space and its absolute continuity, I". J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.IA, Math. 29, p.567-598 (1982).

[5] S. Kusuoka: "Some remarks on Getzler's degree theorem". In Proc. of 5th Japan-USSR Symp. Lecture Notes in Math. Vol. 1299, p.239-249. Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[6] R. Ramer:"On nonlinear transformations of Gaussian measures". J. Funct. Anal. 15, p. 166-187 (1974).

[7] A. S. Üstünel: "Intégrabilité exponentielle de fonctionnelles de Wiener". CRAS, Paris, Série I, Vol. 305, p.279-282 (1992).

[8] A. S. Üstünel: "Exponential tightness of Wiener functionals". Preprint, à paraître dans les Proceedings of Oslo-Silivri Conference on Stochastic Analysis and related Topics, Gordon and Breach.

[9] A. S. Üstünel and M. Zakai: "Transformations of Wiener measure under anticipative flows". Proba. Theory Relat. Fields 93, p.91-136 (1992).

[10] A. S. Üstünel and M. Zakai:"Applications of the degree theorem to absolute continuity on Wiener space". Probab. Theory Relat. Fields, vol. 95, p. 509-520 (1993).

A. S. Üstünel : ENST, Dépt. Réseaux, 46, rue Barrault, 75013 Paris, France et Institute of Mathematics, University of Oslo, P.O. Box 1053, Blindern, N-0316, Oslo, Norway.
M. Zakai : Dept. of Electrical Engineering, Technion, Haifa 32000, Israel.