Algoritmer og kreativitet til matematikkeksamen

Fra 2MX til R1:
Endret eksamensoppgavene seg med eksamensformen?

Aina Fossum

Master i realfagdidaktikk ved
Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling,
Det utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

28. mai 2009

Sammendrag

Elever som valgte full fordypning i matematikk i videregående skole, gikk etter læreplanen L97 kurset 2MX det andre året av videregående utdanning. Med Kunnskapsløftet (LK06) har kurset skiftet navn og delvis innhold og heter nå R1. I forbindelse med den nye læreplanen ble også formen på skriftlig eksamen todelt med én del uten hjelpemidler og én del med alle hjelpemidler. I det norske matematikkmiljøet har det vært diskusjon og til dels uenighet om hvilke hjelpemidler som bør være tillatt til eksamen, men det har vært bred enighet om behovet for en nivåheving.

Jeg har undersøkt om eksamensoppgavene endret seg med eksamensformen. Den første eksamenen i R1 – det vil si med ny læreplan og ny eksamensform – fant sted våren 2008. Etter det har det vært tilsvarende eksamener høsten 2008 og våren 2009. Disse tre eksamenssettene utgjør datagrunnlaget for R1-eksamen, mens det er valgt ut tre tilsvarende eksamenssett for 2MX for å gjøre sammenligningen.

For å kunne klassifisere og sammenligne oppgavene, har jeg brukt et verktøy utviklet av svenske forskere (Lithner, 2008, Bergqvist, 2007) for å avgjøre om en oppgave krever algoritmisk eller kreativt resonnement. De har blant annet studert oppgaver på laveregrads universitetsnivå og jeg har funnet det nødvendig å gjøre noen tilpasninger som det er redegjort nærmere for. I hvilken grad eksamensoppgavene kan løses ved hjelp av en algoritme eller om de krever problemløsning og kreativt resonnement danner det viktigste grunnlaget for sammenligningen. Jeg har i stor grad gjengitt analysene og vurderingene som er gjort i forbindelse med de enkelte deloppgavene for å gjøre undersøkelsen transparent og grunnlaget for konklusjonene tilgjengelig.

Hvis evne til problemløsning anses som en vesentlig kompetanse, har jeg ikke funnet entydige signaler i eksamensoppgavene som peker i en retning som vil bidra til nivåheving hos elevene. Men den hjelpemiddelfrie delen på R1-eksamen fører til at flere formler må ”sitte i fingrene”. Innføringen av mer avanserte digitale hjelpemidler enn grafisk kalkulator forgår svært forsiktig. Jeg har funnet stor likhet mellom oppgavesettene når det gjelder oppbygning, men at det er en økning i antall tekstoppgaver og noe økning i arbeidsmengde. Resultatet av oppgaveanalysen viser at krav til problemløsning varierer mer mellom de enkelte oppgavesettene enn mellom R1-eksamen og 2MX-eksamen sett under ett.

Innhold

1. Delte meninger om eksamensform

Med Kunnskapsløftet er det innført mulighet for en todelt eksamen og denne ble tatt i bruk ved matematikkeksamen i videregående skole våren 2008. Fra våren 2009 vil dette bli eksamensformen i matematikk også i grunnskolen. Slik formulerer Utdanningsdirektoratet (Vurderingsveiledning, 2009) reglene for gjennomføringen av slik eksamen:

> Del 1. Det er ikke tillatt å bruke hjelpemidler bortsett fra vanlige skrivesaker, passer, linjal med cm-mål. (s. 7)
> Del 2. Alle hjelpemidler tillatt å bruke, unntatt internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. (s. 7)

Eksamen varer i fem timer og Del 1 og Del 2 av eksamensoppgaven deles ut samtidig. Etter to timer leveres besvarelsen for Del 1 inn, og samtidig kan elevene ta frem hjelpemidlene for Del 2 (Vurderingsveiledning, 2009, s. 6).

I rundskriv og veiledninger fra Utdanningsdepartementet har det ikke lyktes meg å finne en begrunnelse for hvorfor den todelte modellen er valgt for eksamen i matematikk. Kristian Ranestad som var leder av læreplangruppa oppnevnt av Utdanningsdirektoratet, begrunner todelingen av eksamen med at det skal legges større vekt på å kunne enn å kjenne til, behovet for å øke tallforståelse og trene algebra, og å kunne kombinere ønsket om ”back to basics” med åpenhet for å bruke dagens teknologi (Ranestad, 2007).

Det vært uttrykt bekymring fra mange hold over for dårlige prestasjoner hos norske elever ved internasjonale undersøkelser av matematikkferdigheter. I boken som omhandler resultatene fra PISA-undersøkelsen i 2006 (Kjærnsli, Lie, Olsen, & Roe, 2007, s. 173), begrunnes det at nedgangen som er registrert kan beskrives som en nedgang i det generelle nivået i matematikk hos norske elever. I PISA-undersøkelsen er det 15-åringene som undersøkes, men et lavt nivå hos disse vil følge dem inn i videregående skole. Det er derfor nærliggende å tro at en endringen i eksamensform er ett av flere tiltak som er gjort i håp om å heve matematikkompetansen hos norske elever.

Vi har fått ny læreplan og det settes inn tiltak på flere områder for å snu den negative trenden. Det vil ta tid å vurdere om man lykkes i dette arbeidet – og det vil kreve omfattende undersøkelser og forskning for å finne ut *hva* som eventuelt fører til positiv utvikling.

Kartleggingen av eventuell endring i eksamensoppgavene og undersøkelsen av hva som kreves av elevene til eksamen som er gjort i denne oppgaven, er et bidrag til dette arbeidet.

1.1 Sluttvurdering

Eksamen er sammen med standpunktkarakteren den avgjørende ”dommen” eleven får i et fag. Sluttvurderingen skal gi informasjon om elevens nivå i forhold til kompetansemålene i Kunnskapsløftet ved avslutningen av opplæringen i grunnskolen og i videregående opplæring (Vurderingsveiledning, 2008, s. 2). Gjennom vurderingsveiledningen gis det også klare signaler om hvordan prestasjonene skal vurderes. Dette rimer godt med synet på eksamen som noe som gjennomføres ut fra samfunnets behov for å få en tilbakemelding om elevens kompetansenivå og for å sortere elevene. Evalueringen har en seleksjonsfunksjon; eksamensresultater og poeng avgjør videre utdanningsmuligheter (Imsen, 1999, s. 312).

“Målet med Skoleporten er at skoler, skoleeiere, foreldre, elever og andre interesserte skal få tilgang til relevante og pålitelige nøkkeltall for grunnopplæringen.”, står det på forsiden til Utdanningsdirektoratets nettside Skoleporten (2008). Nøkkeltallene er i tillegg til elevantall og resultater fra Elevundersøkelsen, først og fremst gjennomsnittskarakterer. I tillegg til å sortere elevene i forhold til hverandre, er eksamenskarakterer derfor også en måte å vurdere og rangere skolene på.

1.2 Hjelpemidler – alle eller ingen

Det er flere i det norske matematikkmiljøet som har engasjert seg i hvilken form eksamener i matematikk i skolen skal ha. Noe av diskusjonen har dreid seg om hvilke hjelpemidler elevene kan bruke – spesielt hvilke digitale hjelpemidler som skal være tillatt. Det er grunn til å tro at den engasjerte debatten skyldes at deltakerne mener eksamensformen påvirker undervisningen og hva elevene lærer.

Blant de som sterkest har hevdet et behov for å gjennomføre i hvert fall deler av eksamen uten hjelpemidler, er Norsk matematikkråd (NMR). Professor Tom Lindstrøm utdyper NMRs syn ved å si at det er på bakgrunn av at mange lærere ved universiteter og høgskoler mener at ukritisk bruk av kalkulator i videregående skole har ført til et fall i basisferdighetene hos nye studenter. Det mest kritiske for universiteter og høgskoler er for dårlige ferdigheter i algebra (i betydning bokstavregning) og funksjonslære, mener

Lindstrøm. Lommeregnerteknikkene lar seg ikke videreføre til mer kompliserte oppgaver der funksjonene får parametre eller flere variable. Man føler derfor at den tradisjonelle eksamensformen i videregående skole gir for liten trening i de teknikkene som har størst verdi senere, men samtidig ønsker mange ikke å fjerne de mulighetene som lommeregneren gir. [1]

Lektor Tor Jan Aarstad har vært aktiv i arbeidet for bruk av digitale verktøy i matematikkopplæringen gjennom mange år. Han er tilknyttet Texas Instruments og har blant annet hatt oppdrag for Utdanningsdirektoratet med å lage oppgaver for eksamener med bruk av digitale hjelpemidler (T3 – Teachers Teaching with Technology 2008). I artikkelen *Bidrar tekniske hjelpemidler til å høyne kunnskapsnivået i matematikk?* (Aarstad, 2005), viser han til doktoravhandlingen til Paul Drijvers ved Freudenthal Institutt i Nederland som disputerte på arbeidet *Learning algebra in a computer algebra environment*.

Hvor vellykket bruk av CAS[2]-verktøyene er, avhenger blant annet av hvor godt samstemt denne teknikken er med elevenes forståelse og blyant- og papirmetoden, og hvor transparente CAS-metodene er (Drijvers, 2003, s. 327). Lærerens rolle hadde også større betydning enn Drijvers hadde forventet. Men fordi elevene slipper tidkrevende utregninger for hånd, kan bruk av datateknologi bidra til at oppmerksomheten rettes mot begrepsforståelse og utvikling av problemløsningsstrategier (Drijvers, 2003).

Resultatene i Drijvers' doktoravhandling taler klart i retning av å todele evalueringen av matematikkunnskaper, hvor både regneferdigheter uten hjelpemidler og anvendelser med hjelpemidler blir testet, hevder Aarstad (2005).

I Arbeidsplanen til Norsk matematikkråd for perioden 2008-2013 heter det;

> Norsk matematikkråd mener at det skal være todelt eksamen i grunnskole og videregående skole, der en del av eksamen løses uten digitale hjelpemidler, og der vurderingen kvalitetssikres.

[1] Uttalelsen er gitt i e-post til meg 01.09.2008

[2] CAS – Computer Algebra System

Det ser altså ikke ut til å være skarpe og uforsonlige konflikter i matematikkmiljøet rundt den nye eksamensformen i matematikk, men at det svarer som Ole Brumm gjorde i valget mellom melk og honning; ”Begge deler.” (Milne, 2001, s.20).

1.3 Hjelpemidlene

I Del 2 er alle hjelpemidler tillatt. Digitale ferdigheter er én av fem grunnleggende ferdigheter i læreplanen og i Del 2 er det mulig å teste disse – noe som ville vært umulig dersom hele eksamen var uten hjelpemidler.

Det er grunn til å anta at noe av hensikten med Del 2 av eksamen er å teste elevenes evne til å mestre mer kompleks problemløsning ved hjelp av digitale verktøy. Aarstad (2005) fremholder at bruk av tekniske hjelpemidler har vært til stor hjelp ved tidkrevende, gjentatte beregninger og bidratt til at fokus kan settes på begrepsforståelse. På dette området åpner de tekniske hjelpemidlene uante muligheter, men begrensingen har vært at elevene skal trenes i å løse ”tradisjonelle” eksamensoppgaver (Aarstad, 2005).

Norsk matematikkråds arbeidsplan (2008) reflekterer et lignende syn når de blant annet sier at hensikten med bruk av kalkulator og IKT bør være å gi innsikt og mulighet til å opparbeide solid teoretisk forståelse av matematikkfaget. Men advarer mot at hjelpemidlene brukes til å unngå innlæring av basisferdigheter.

Foreløpig kreves det ikke av elevene at de behersker digitale hjelpemidler ut over grafisk kalkulator. Slik formuleres det i Vurderingsveiledningen (2009, s. 6):

> Selv om alle hjelpemidler er tillatt i Del 2, er det likevel en forutsetning at oppgavene skal kunne løses ved hjelp av grafisk lommeregner, slik som før. Én av oppgavene i Del 2 vil imidlertid normalt komme i to varianter: Alternativ I som er standardoppgave med grafisk lommeregner som hjelpemiddel, og Alternativ II der det kan være en fordel å bruke annet digitalt verktøy.

Det er ikke utenkelig at det etter hvert kan bli en større fordel i flere oppgaver og mer nødvendig for maksimal uttelling å beherske mer avanserte digitale verktøy enn lommeregner.

På Utdanningsdirektoratets sensorskolering våren 2009, der jeg deltok, fortalte flere lærere om store forskjeller på hvilke digitale hjelpemidler elevene har. Både økonomi og ferdigheter har betydning for elevenes mulighet til å anskaffe og å sette seg inn i bruken av verktøyene. Det kan være en utfordring for lærere å evaluere det elevene produserer med ulik programvare fordi de må vite om det er "knappetrykking" eller matematikkferdigheter som ligger til grunn for det ferdige produktet.

Det er ikke bare kalkulator og mer avanserte digitale hjelpemidler som er tillatt på Del 2 av eksamen. Alle andre hjelpemidler bortsett fra kommunikasjon og internett kan nå også brukes på denne delen. Tidligere var disse hjelpemidlene begrenset til en elevbok i form av formelsamling med egne notater. I tillegg kom eventuelt forberedelsesmateriale. Undersøkelser har vist at elever på alle trinn og nivåer i begrenset grad klarer å gjøre seg nytte av skriftlige hjelpemidler.

I en masteroppgave om elevbok i matematikk i ungdomsskolen, vises det til flere eksempler hvor elevene har informasjonen, men ikke klarer å finne eller bruke den. Og konklusjonen er at når det gjelder å løse matematikkoppgaver, er det elevens kunnskap og forståelse som er det viktigste (Lauritsen, 2007, s.64).

Selv studenter på universitetsnivå har vansker med å nyttegjøre seg skriftlige hjelpemidler, viser en svensk undersøkelse. De leter etter eksempler eller hint til løsningsvalg, men bruker i liten grad bøkene til å tilegne seg forståelse for stoffet (Lithner, 2003).

Elevenes notater i formelsamlingen har vært av varierende kvalitet, men det å forberede seg gjennom å velge ut og skrive ned informasjon har vært en måte å tilegne seg kunnskap på for noen elever. Når det nå er tillatt å ta med alle trykte hjelpemidler, kan det føre til at både elever og lærere legger mindre vekt på denne delen av forberedelsesprosessen.

1.4 Kalkulatorabstinens

Del 1 som er uten hjelpemidler, passer godt med formuleringen som går igjen i den nye læreplanen; "Målet etter endt opplæring er at eleven skal kunne…" (Læreplan i matematikk for realfag). Formuleringen "skal kunne" kan tolkes slik at kunnskapen skal kunne anvendes uten å ty til hjelpemidler. Utdanningsdirektoratet har da også som vedlegg til vurderingsveiledningen, gitt lister over hvilke formler og regler det er forventet at elevene skal beherske uten hjelpemidler (Vurderingsveiledning, 2009).

Undervisningen i kurs som forbereder for videre studier må være rettet mot de delene av matematikken som gjør studentene i stand til å mestre de utfordringene de møter ved universitetene og høgskolene. Oppmerksomheten må rettes mot begrepsforståelse så vel som å beherske håndverket (Arbeidsplanen for Norsk matematikkråd for perioden 2008-2013).

"Drill" i form av å huske formler og beherske algoritmer er ikke nødvendigvis det eneste som testes i den hjelpemiddelfrie delen. Grunnleggende forståelse på flere områder kan også testes. Vurderingsveiledningen (2009, s. 6) sier om innholdet:

> I Del 1 prøves ferdigheter og grunnleggende matematikkforståelse. Det kan være flere mindre oppgaver med temaer spredt ut over kompetansemålene i læreplanen. I tillegg kan det eventuelt være en mer sammenhengende oppgave.

Selv om det for mange elever oppleves som et skrekkscenario å ikke ha kalkulator og formelsamling tilgjengelig på eksamen, kan det være at noen av dem vil finne det enklere fordi de uansett har problemer med å finne frem til riktig formel eller regel i formelsamlingen på egenhånd eller å utnytte kalkulatoren maksimalt.

1.4.1 Klipp fra førsteutgavene av Del 1

Tema for denne oppgaven er eksamensoppgaver for elever med full fordypning i matematikk, men eksamensformen er den samme uansett hvilket kurs elevene velger. Et par eksempler fra andre kurs kan illustrere at eksamensformen og oppgavene kanskje ikke var helt konsistente for alle kursene ved oppstarten. S1-elevene hadde den korteste listen med formler (Vurderingsveiledning, 2007) som forutsettes kjent til Del 1 av eksamen. Til gjengjeld fikk så og si hele listen plass på eksamen gjennom oppgaver som ser ut til å teste nettopp bruken av disse og lite annet (S1 vår 2008). Det gis et hint i form av "Bruk $f'(x)$ til å finne…", men oppgaven ser ut til å inneholde lite testing av grunnleggende matematikkforståelse – kun basisferdigheter i form av formel- /algoritmebruk. Den falt ikke heldig ut for elevene. I forhåndssensuren basert på 196 besvarelser får 28 % av elevene karakteren 1 på den første delen, og Utdanningsdirektoratet skriver i Sensorveiledning etter forhåndssensur våren 2008, REA3026 Matematikk S1 (s. 3):

> Antall elever med karakteren 1 i Del 1 er bekymringsfullt. Samtidig synes oppgavene i Del 1 å være sentrale i forhold til læreplanen. Elevene mangler tydeligvis basisferdigheter.

Elevene som avla eksamen i 1P + 2P hadde til sammen et åttetimers matematikkurs bak seg og en litt mer omfangsrik formelliste (Vurderingsveiledning, 2007) enn elevene på S1-eksamen. Det er ikke så mye fra denne listen å finne igjen i oppgavene (2P, vår 2008). Derimot finnes i større grad regneteknisk enkle oppgaver som tester forståelse i en stor del av pensum. Et par av oppgavene krever mer enn direkte algoritmebruk i løsningen.

1.5 Undervisningen

Lærere vil gjerne at elevene skal være interessert i å lære matematikk fordi de er interessert i faget og har en indre motivasjon for læring (Imsen, 2005, s.132). Men for mange elever er situasjonen at for dem er ikke matematikk nyttig i seg selv, det er matematikk-karakterene som er nyttige (Imsen, 2005, s.133). Det er jo også riktig at det er etter karakterene de vil rangeres med tanke på videre muligheter til utdanning og jobb. I tillegg til eksamenens seleksjonsfunksjon og skolevurderingsfunksjon, fungerer eksamensresultatene som tilbakemelding til lærerne. Til en viss grad har eksamensoppgavene også styrt matematikkundervisningen (Solvang 1992, s.21).

Hvis man betrakter prøver underveis i året som en del av undervisningen, er det åpenbart at eksamensformen påvirker matematikkundervisningen. Tentamen avvikles etter mønster av eksamen og hjelpemiddelbruk på mindre prøver tilpasses også det som vil være tilfelle ved eksamen. Denne konsekvensen hadde eksamensformen allerede fra den ble annonsert og før første eksamen var avholdt. Det er grunn til å anta at listen over formler som forutsattes kjent ved Del 1 av eksamen ble kommunisert til elevene. Men fordi den kom forholdsvis sent, kunne den ikke prege undervisningen gjennom hele året. Ved starten av skoleåret 2008/2009 var både en formelliste og et sett eksamensoppgaver tilgjengelig. Solvang (1992, s. 21) mener at lærere flest er overbevist om at en undervisning som tar sikte på å klare eksamensoppgaver, er en undervisning i samsvar med målene. Dersom han har rett, vil det legges vekt på hva det er forventet å kunne uten hjelpemidler og hvordan det er forventet å vise denne kunnskapen når det undervises i de enkelte emnene.

Til en viss grad har vi kanskje tatt for gitt at eksamensoppgavene har stor innflytelse på undervisningen. Samtidig viser et doktorgradsarbeid fra Sverige at det er forholdsvis stor forskjell på oppgavene som gis av lærerne og oppgavene som gis i de sentralgitte prøvene (Boesen, 2008). Forskjellen gir seg særlig uttrykk i hvilken kompetanse som kreves av elevene. De lærergitte oppgavene er i stor grad basert på løsning ved hjelp av algoritmer, mens de nasjonale og sentralgitte oppgavene i større grad krever ferdigheter i modellering, problemløsning og kommunikasjon (Boesen, 2008). Det er derfor mulig at det kun er formen, det vil si prøver der en del er uten hjelpemidler og en del er med, som påvirkes av de sentralgitte eksamenene. I den følgende undersøkelsen sammenliknes eksamensoppgavene kun med eksempler og oppgaver i lærebøkene. Hvilke krav som stilles til elevene i form av oppgaver på prøver gjennom året, blir ikke undersøkt.

2. Problemstilling og hensikt

Det kan reises mange interessante problemstillinger rundt todelingen av eksamen i matematikk, men foreløpig er datamaterialet lite siden det kun har vært arrangert slike eksamener tre ganger, nemlig våren og høsten 2008 og våren 2009. Hvis vi antar, som Solvang (1996) hevder, at eksamensoppgavene i noen grad styrer undervisningen i matematikk, kan eksamensoppgavene være et sted å starte når effekten av endret eksamensform skal evalueres.

2.1 Forskningsspørsmål

Omleggingen av eksamensformen i matematikk i matematikk er omfattende. Derfor er det interessant å se hvilke konsekvenser dette har fått for eksamen – både de enkelte oppgavene og eksamenssettene.

Hvordan påvirkes oppgavene av at ingen hjelpemidler – og spesielt ikke kalkulator – er tillatt på den ene delen? Blir bare tallene endret slik at de er litt letter å "håndregne" enn de var da elevene hadde kalkulator hele veien eller skjer det andre endringer? Og hvordan påvirkes oppgavene av at det på én del er tillatt med alle digitale og skriftlige hjelpemidler?

For å se om det har skjedd endringer, er det nødvendig å sammenligne med tidligere eksamenssett på samme nivå og med samme grad av fordypning. I og med at disse eksamenene skal teste måloppnåelse i forhold til to ulike læreplaner, vil det sannsynligvis være en viss tematisk ulikhet. Samtidig er det snakk om elever på samme nivå og med samme grad av fordypning, så det bør være mulig å se om det har skjedd endringer utover de som følger av nytt pensum.

Problemløsning er sentralt i matematikk (Polya, 1973), og den analytiske rammen for oppgavegjennomgangen vil være å identifisere krav til problemløsning i eksamensoppgavene. Automatisering av regneoperasjoner er også et viktig tema i matematikkdidaktikk (Imsen, 2005, s. 210). Når eleven til deler av eksamen i R1 ikke kan bruke formelsamling og kalkulator, vil kravet til å huske formler og algoritmer bli større.

På bakgrunn av dette har jeg formulert følgende forskningsspørsmål:

a. **Hvor stor del av eksamensoppgavene i matematikk 2MX og matematikk R1 krever evne til problemløsning og hvor stor del krever algoritmebruk? Har det skjedd endring i fordelingen med overgangen til ny eksamensform?**
b. **Er det likheter og forskjeller i eksamenssettene utover det som har med krav til problemløsning?**

2.2 Hensikt

Eksamen kan være et virkemiddel for å endre undervisningspraksisen (Solvang, 1996, Grythe, 2009). Evne til problemløsning er en viktig ferdighet og et av kriteriene som brukes i vurderingen av elevenes eksamensbesvarelser (Vurderingsveiledning 2009). Kartleggingen av krav til problemløsning til eksamen som gjøres i denne undersøkelsen, kan bidra til å si om det kan forventes endringer i undervisningen på dette området som følge av endringer i eksamen.

Norsk matematikkråd er positive til en todelt eksamen, men etterspør evaluering av ny eksamensform (Arbeidsplan for Norsk matematikkråd 2008-2013). Det vil være behov for langt mer omfattende forskning rundt eksamen enn det denne undersøkelsen innebærer, men den belyser sider ved innholdet i eksamen som er sentralt innen matematikkundervisning. Sånn sett vil den kunne gi et bidrag til den totale vurderingen av eksamenens form og innhold.

Hovedhensikten med undersøkelsen er nettopp å være en del av diskusjonen om og evalueringen av den todelte eksamensformen i matematikk. Eksamensformen innføres nå både i grunnskole og videregående skole og bør være gjenstand for diskusjon og vurdering.

3. Problemløsning

Siden krav til problemløsning vil stå sentralt i vurderingen av eksamensoppgavene, vil jeg først gå litt nærmere inn på problemløsning generelt og i matematikk spesielt.

Problemløsende metode er en arbeidsmåte der elevene selv søker svaret på et problem som opptar dem (Bø & Helle, 2002, s.198). Utdanningsfilosofen John Dewey mente det var store likheter mellom måten barn lærer på og den naturvitenskapelige, eksperimenterende metoden (Imsen, 2003, s. 73). Dewey så på problemløsning som en metode for alle fag.

3.1 Hva er et problem?

Man har et problem hvis man har et mål som man av en eller annen grunn, for eksempel mangel på ressurser eller kunnskap, ikke kan nå. Det man så foretar seg for å nå målet er problemløsning (Kahney, 1993).

Hvis man skal vurdere om en matematikkoppgave krever problemløsning eller ikke, må det være definert hva det er som er et matematisk problem. Én mulig definisjon er at et problem er en oppgave som skal utføres og at det i utgangspunktet er uklart for den som skal løse oppgaven hvilken metode som skal brukes (Björkqvist, 2003). Denne definisjonen er personavhengig fordi det vil variere fra elev til elev hva som er et problem. Det samme er definisjonen Solvang (1996, s. 135) gir;

> En utfordring vil for en person være et problem dersom denne personen ikke har noen algoritme som vil gi en løsning når personen konfronteres med utfordringen.

Det som er en utfordring for én person vil ikke nødvendigvis være det for en annen. Dermed vil problemløsning alltid ha et element av individualitet. Også i en skoleklasse vil elevenes kunnskaper og nivå være forskjellig og deres opplevelse av hva som er et problem og hva som ikke er det, vil være ulik.

Når elevene presenteres for et nytt emne i matematikk, presenteres de også for en utfordring. Solvang (1996, s.134) definerer en algoritme som et sett med instruksjoner som ved et endelig antall operasjoner fører til at en gitt oppgave kan løses. I møtet med en utfordring der man kjenner en algoritme som kan brukes, er det snakk om en rutineoppgave. Dersom en slik algoritme savnes, er det snakk om et problem. Og ”problemet” kan fra lærerens side takles på to måter; elevene kan presenteres for en algoritme som gir en løsning på problemet og gjør det til en rutineoppgave eller elevene kan inviteres til å utforske problemet med tanke på å finne en løsning.

3.2 Hvordan løse det?

Georg Polyas bok *"How to solve it"* er sentral når temaet problemløsning i matematikk behandles. Her presenteres en "oppskrift" i fire trinn som i grove trekk ser slik ut; Først forstå problemet, så utarbeide en plan, deretter gjennomføre planen og til slutt gå gjennom løsningen på nytt (Polya, 1973, s. xvi-xvii).

Heuristikk er sterkt knyttet til problemløsning som undervisningsmetode og behandles av Polya i ordlisten, som er en vesentlig del av boken. Hensikten med heuristikk er å studere metoder og regler for oppdagelse og oppfinnelse (Polya, 1973, s. 112). Et heuristisk resonnement er ikke endelig og strikt, men foreløpig og plausibelt med tanke på å finne løsningen på det aktuelle problemet.

Man kan utvikle heuristiske strategier som gjør problemløsningen lettere. Kahney (1993, s. 29-31) karakteriserer problemer hvor man skritt for skritt kan følge den samme strategien i løsningen som isomorfe problemer, mens problemer med relatert eller lignende løsningsstrategier er å betrakte som homomorfe problemer. Problemløsningsstrategier kan overføres mellom veldefinerte problemisomorfier dersom forholdene ligger til rette.

Den norske matematiker og didaktiker Ragnar Solvang sier at problemløsning betyr å finne en vei, en strategi for å takle en ukjent situasjon. Problemløsning knyttet direkte til matematikk blir da også kalt kreativ matematikk (Solvang, 1996, s. 134).

3.2.1 Problemløsning i læreplanen

Det følgende er sitat fra Læreplan i matematikk for grunnskolen;

> Problemløysing høyrer med til den matematiske kompetansen. Det er å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig det er. (…) Opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening.

I Læreplanen for matematikk for realfag heter det som en del av formålet;

> Programfagets egenart skal bidra til forståelse av matematikkens betydning i vår kultur og til utvikling av argumenterende, analyserende og utforskende ferdigheter.

Blant de grunnleggende ferdighetene i matematikk er;

> Å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig i matematikk for realfag innebærer å formulere logiske resonnementer, forklare en tankegang og sette ord på oppdagelser, ideer og hypoteser. Det vil si å stille spørsmål, delta i samtaler og drøftinger av matematiske situasjoner og problemer og argumentere for egne løsningsforslag.

Ut over dette kan evne til problemløsning sees som integrert i de enkelte mer konkrete kompetansemålene. Problemløsning i matematikk kan betraktes som en ferdighet og dette kommer tydelig frem i Vurderingsveiledningen (2008). Denne har et eget avsnitt med kjennetegn på måloppnåelse gitt i en matrise som viser hva som kreves for de ulike karakterene. Denne matrisen har fire kategorier elevene skal vurderes innen:

- begreper, forståelse og ferdigheter
- problemløsning
- bruk av hjelpemidler
- kommunikasjon

Innen problemløsning er det tre underpunkter som omhandler evne til løsning/utforsking av problemstilling, evne til planlegging og kreativitet i løsningen, og evne til vurdering av svarene.

3.2.2 Problemløsning i bøkene

Det er tre forlag som utgir lærebøker i matematikk for den videregående skolen. I dette avsnittet begrenser jeg meg til bøkene i det nye R1-faget. Der er bøkene Sinus R1 (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch & Hals, 2007) fra Cappelen, Sigma R1 (Sandvold, Øgrim, Bakken, Pettersen, Skrindo, Dypbukt, Mustaparta, Thorstensen & Thorstensen, 2007) fra Gyldendal og kort og godt Matematikk R1 (Heir, Erstad, Borgan, Moe & Skrede, 2007) fra Aschehoug. Bøkene har litt ulik oppbygning, oppdeling i temaer og rekkefølge.

Eksempler fra Sinus R1

Innledning til en oppgave i vektorkapittelet i Sinus R1 (Oldervoll et al., 2007, s. 168) er som følger;

> Tegn en firkant og finn midtpunktene på hver side. Tegn en firkant som har hjørner i hvert av disse midtpunktene. Hva slags figur ser det ut til å være? Tegn flere firkanter med forskjellige fasonger og se hva som skjer med firkantene mellom midtpunktene. Hvilken regel ser ut til å gjelde?
> Vi skal nå bevise regelen ved hjelp av vektorregning.

Deretter loses eleven frem mot resultatet gjennom figurtegning og deloppgaver.

Flere steder i geometrikapittelet innledes temaet med en eller to ”utforskingsoppgaver” som gir sammenhengen som senere vises gjennom eksempler og oppgaver.

Et eksempel på gjenkjennelig tema er Lotto brukt til å illustrere sannsynlighet. Etter å ha regnet på sannsynligheten for å få seks og sju rette i Lotto, går boken et skritt videre og gir i oppgave å se på forholdet mellom premiene i disse tilfellene (Oldervoll et al., 2007, s. 115).

Eksempler fra Sigma R1

Denne boken har valgt en form med oppgaver på hvert oppslag, det vil si på hver dobbeltside. På slutten av disse kommer det ofte en utfordring som i følge læreboken ikke nødvendigvis skal være på høyt faglig nivå, men skal kunne løses ved at man tenker kreativt og angriper oppgaven på nye måter (Sandvold et al., 2007, s. 5). Først en funksjon som inviterer til refleksjon rundt temaet (Sandvold et al., 2007, s. 205):

> En funksjon *f* er gitt ved $\left\{\begin{matrix} 2x+1, x \geq 1 \\ x^2+2, x<1 \end{matrix}\right\}$ og oppgaven går ut på at eleven uten å tegne grafen, skal avgjøre om funksjonen er kontinuerlig for x =1 og om den er deriverbar for $x = 1$.

En geometrisk utfordring (Sandvold et al., 2007, s. 231):

> I ΔABC er $AB = 20$ og $\angle C = 90°$. Normalen fra C treffer AB i punktet H, og $CH = a$. Her skal elevene finne når det er én, to eller ingen løsningstrekanter og finne AH uttrykt ved a.

Eksempler fra Matematikk R1

I Matematikk R1 (Heir et al., 2007) starter hvert hovedkapittel med en aktivitet. De inviterer til utforsking som kan være godt utgangspunkt for videre problemløsning. Vektorkapittelet innledes med en beskrivelse av Lailas og Lars' forflytning i en labyrint med stier i kompassretningene (Heir et al., 2007, s. 8);

> Lars går 2 m mot øst, 3 m mot sør, 1 m vest, 2 m sør, 4 m øst, 6 m nord, 1 m vest og 2 m nord.
> Laila går 1 m mot nord, 2 m vest, 2 m sør, 3 m vest, 5 m nord og 2 m øst.
> Hvor langt fra utgangspunktet er Lars og Laila? Hvilken posisjon har Lars i forhold til Laila? Hvor langt fra hverandre er Lars og Laila?

Algebrakapittelet innledes med invitasjon til utforske påstanden:

> "Når n er et naturlig tall (et helt, positivt tall), så er minst ett av tallene $6n - 1$ og $6n + 1$ et primtall." (Heir et al., 2007, s.58)

I tillegg tar jeg med en oppgave fra denne boka hvor dynamisk programvare tas i bruk (Heir et al., 2007, s. 269):

> Bruk et dynamisk konstruksjonsprogram til å undersøke når ortosenteret i en trekant er identisk med et av hjørnene i trekanten og når det er utenfor trekanten.

Bøkene sett under ett

Hensikten med eksemplene over var ikke å gjøre en lærebokanalyse, men å vise litt om hvordan lærebøkene inviterer elevene til utforskning og problemløsning. Inntrykket er at det ikke legges opp til problemløsning i stor utstrekning. Jeg har begrenset meg til oppgavene i selve teksten, så eventuelle problemløsningsoppgaver fra oppgavesamlingen er ikke vurdert. Hvis dette ble tatt med, ville kanskje dette inntrykket endret seg noe.

3.2.3 Problemløsning i undervisning og tester

Ovenfor er det vist noen eksempler på invitasjon til problemløsning i bøkene, men den overveldende delen av bøkene er forklarende eksempler og øvingsoppgaver i tråd med disse. Flere forskere innen matematikkdidaktikk har undersøkt effekten av at elevene arbeider med problemløsning og i noen grad gjenoppfinner matematikken. Dette styrker prosessen med å gjøre kunnskapen til elevenes egen – deres forståelse av matematikken blir dypere og evnen til å bruke den i nye kontekster øker (Lithner, 2008, Sfard, 1991, Gravemeijer & Doorman, 1999).

Problemløsningsmetode i undervisning betegnes ofte som induktiv metode. Elevene får enten presentert eksempler eller utfører aktiviteter som skaper eksempler de kan forske videre på for å finne det generelle og selv formulere en regel. En utfordring med den induktive metoden er at den er tidkrevende hvis den skal anvendes i stor skala (Imsen, 2005, s. 329). Alternativet er en deduktiv metode hvor læreren presenterer en algoritme og går gjennom noen eksempler.

Det er ikke uvanlig å anta at eksamensoppgaver i et fag påvirker undervisningen i faget. Jesper Boeson har undersøkt oppgaver på prøver gitt av lærere kontra oppgaver gitt til sentrale eksamener i Sverige. Han fant at de lærergitte oppgavene i stor grad lot seg løse ved imiterende resonnement, det vil si å etterligne tidligere eksempler og løsninger. De sentralgitte oppgavene krevde i langt større grad bruk av kreativt, matematisk fundert resonnement (Boesen, 2003). Forklaringen på det kan ligge i at påvirkningen fra de sentrale eksamenene til klasserommene ikke er så stor. Men det kan også være at når standpunktkarakteren læreren setter, blir stående på vitnemålet og at ikke alle elever skal prøves til sentralgitt eksamen, vil lærerne gjøre det de kan for å få flest mulig gjennom kurset med ståkarakter. Det er lettere hvis oppgavene ikke krever så stor grad av problemløsning.

Den følgende undersøkelsen vil begrense seg til å se på sentralgitte eksamensoppgaver i matematikk.

4. Metode

Undersøkelsen som gjøres gjennom denne masteroppgaven, er å betrakte som samfunnsfaglig forskning. Den fokuserer på en side ved utdanningssystemet generelt og eksamen i matematikk spesielt som har betydning for medlemmer av samfunnet. Undersøkelsen følger i grove trekk prosessen for kvalitativ samfunnsforskning slik den er beskrevet av Ragin (1994, kap. 4 og 5).

Hensikten er i første omgang å få best mulig kjennskap til hva som kjennetegner eksamenssettene i 2MX og hva som kjennetegner eksamenssettene i R1 for deretter å foreta en sammenlikning for å avdekke likheter og forskjeller.

4.1 Analytisk ramme

For å kunne besvare forskningsspørsmålene er det nødvendig å analysere hver enkelt oppgave og hvert eksamenssett med tanke på å se hva som kreves for å løse oppgavene.

Hensikten er å få utfyllende informasjon om eksamen i matematikk med full fordypning i videregående skole på VG2-nivå. Forskningsdesignet vil være et casestudium på flere nivåer og kan kategoriseres som et fler-case-design med flere analyseenheter (Johannessen, Tufte & Kristoffersen 2005, s. 86).
- hver enkelt deloppgave i hvert enkelt eksamenssett vil være å betrakte som et case
- samlingen av et antall deloppgaver som utgjør et eksamenssett vil være et case
- samlingen av eksamenssettene innenfor hvert av de to fagene vil utgjøre et case
- det er også mulig å samle oppgaver som tester omtrent de samme læreplanmålene eller har andre kjennetegn felles og se på disse som et case

Det kan ligge en fare i å miste helheten i fokuset på detaljene eller å gå glipp av detaljer hvis man bare betrakter det store bildet. Dette forsøker jeg å unngå ved å gjøre ulike kombinasjoner av det samme materialet og betrakte det på flere nivåer. Her har jeg også hatt nytte av Leiulfsrud og Hvindens (1996) fem praktiske råd for analyse av kvalitative data: klargjøre mønstre, spørre om disse inngår i større mønstre, peke ut kontraster, lete etter ambivalens og ta vare på ad-hoc-iakttagelser.

4.2 Analyseverktøy

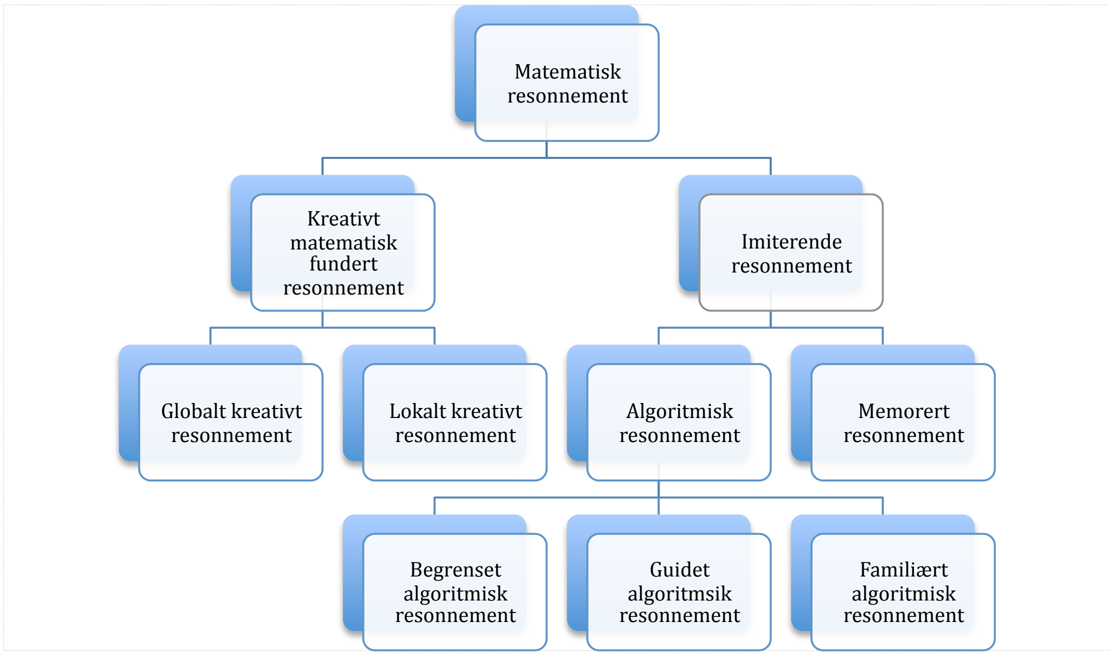
Valg av kategorier og analysemetode er avgjørende for kvaliteten og reliabiliteten til denne undersøkelsen. For å kunne bruke definisjonene av hva som er et problem til å vurdere om en matematikkoppgave er et problem og krever problemløsningsatferd, må vi ha en metode for å gjøre vurderingen av oppgavene uavhengig av hver enkelt elev. Oppgavene må kunne vurderes i seg selv. Johan Lithner har gjennom flere arbeider utviklet verktøy for å kategorisere matematikkoppgavers krav til løsningsstrategi (Lithner, 2004) og elevers valg av løsningsstrategi i møte med matematikkoppgaver (Lithner, 2003).

I studien ”Mathematical reasoning in calculus textbook exercises” (Lithner, 2004) analyseres nesten 600 oppgaver fra Adams’ kalkulusbok for laveregrads universitetsstudier med tanke på å se i hvilken grad lærebokoppgavene lar seg løse uten å ta i betraktning de innebygde matematiske egenskapene i de involverte komponentene. Lithner (2008, s 257) lister opp fire trinn for å illustrere hva det vil si å løse en matematikkoppgave (min oversettelse fra engelsk):

1. Møtet med en (del)oppgave betegnes som en problematisk situasjon dersom det ikke er opplagt hvordan man skal fortsette.
2. Det gjøres et strategivalg der ”strategi” kan være alt fra lokale prosedyrer til generell tilnærming og ”valg” gis en vid betydning (velge, gjenkalle, konstruere, oppdage, gjette, etc.) (…)
3. Strategien blir implementert. (…)
4. En konklusjon er funnet.

Fokuset til Lithner i de arbeidene jeg har referert til er, slik jeg ser det, å skille mellom pugg og problemløsning. Den grunnleggende ideen er at resonnement som følge av pugg er imiterende, mens den motsatte resonnementstypen er kreativ (Lithner, 2008, s. 256). Det er Lithners rammeverk jeg vil legge til grunn i analysen av eksamensoppgavene som utgjør data for denne undersøkelsen.

Det gjorde også Ewa Bergqvist (2007) da hun analyserte hvilke typer resonnement som kreves for å løse laveregrads eksamensoppgaver i matematikk på universitetsnivå. Hun har sammenfattet de ulike formene for matematisk resonnement i en figur som jeg har oversatt til norsk (se figur 4-1).



Figur 4-1 Resonnementstyper - matematikkoppgaver (Bergqvist, 2007, s.350)

4.2.1 Imiterende resonnement

Imiterende resonnement er i stor grad basert på overflatisk betraktning av oppgavene og tar ikke den grunnleggende matematikken i betraktning. Denne typen resonnement kan ytterligere deles i to hovedkategorier basert på gjengivelse etter hukommelsen eller etter algoritmebruk (Lithner, 2008, s.258). Og som vi ser av figuren, kan det skje en ytterligere oppdeling som vil bli gjennomgått i det følgende.

Memorert resonnement (MR)

Dersom en oppgave skal kunne løses ved memorert resonnement, oppfyller den følgende forutsetninger (Lithner, 2008, s. 258):

- Strategivalget er basert på å gjenkalle en fullstendig løsning ut fra hukommelsen.
- Implementeringen av strategi innebærer kun å skrive ned svaret etter hukommelsen.

Typiske oppgaver som kunne havne i denne kategorien er gjengivelse av enkle bevis eller å oppgi navn (Bergqvist, 2007, s.351). For R1-eksamnene er det kun oppgaver fra Del 1 som eventuelt kunne havne i denne kategorien – og da vil informasjonen måtte gjenfinnes i alle lærebøkene.

Når det gjelder 2MX-eksamnene er det et usikkerhetsmoment i at elevene hadde mulighet til å ha egne notater i formelsamlingen som var tilgjengelig gjennom hele eksamen. Da vil det være vanskelig å si om det dreier seg om memorert resonnement eller om ren avskrift av egne notater.

Siden det er så stor usikkerhet knyttet til denne kategorien, har jeg valgt å utelate den. De oppgavene som kunne vært kategorisert her, vil plasseres i kategorien familiært algoritmisk resonnement som omtales nedenfor.

Algoritmisk resonnement (AR)

Hvis vi skal si at en oppgave krever algoritmisk resonnement må følgende to betingelser være oppfylt (Lithner, 2008, s. 259):

- Strategivalget er å bruke en løsningsalgoritme. Det er ikke nødvendig å lage en ny løsning.
- Implementeringen av løsningsstrategi er å gjennomføre enkle regneoperasjoner ved å følge et sett regler.

Dette strategivalget og implementeringen er det mulig å gjøre både for en elev som forstår matematikken som ligger til grunn og for én som kun kjenner algoritmen og har trening i å bruke den. Første oppgave har mange ulike deloppgaver både på oppgavesettene til 2MX-eksamen og R1-eksamen. Denne har tradisjonelt vært en test i algoritmebruk. Dette kommer jeg tilbake til i oppgaveanalysen senere.

Det som kan være utfordringen i denne typen oppgaver, er å finne den riktige algoritmen og Lithner (2008) har identifisert tre ulike måter. Alle er tatt med i redegjørelsen under, men det er kun to som vil være i bruk som kategorier i den følgende undersøkelsen.

Familiært algoritmisk resonnement (FAR)

Kjente nøkkelord kan i noen tilfeller bidra til at det er opplagt hvilken algoritme som skal brukes. I andre tilfeller kan oppgaven være av kjent type og sånn sett ”familiær” for eleven. Den kan endog være identisk med en oppgave eleven husker fra tidligere (se memorert resonnement). En oppgave som krever familiært algoritmisk resonnement er av en kjent type og kan løses ved hjelp av en kjent algoritme knyttet til oppgavetypen (Lithner, 2008, s. 262). Løsningen kan da gjøres på grunnlag av etablert erfaring. I denne undersøkelsen har jeg forutsatt at elevene har løst oppgavene som står i selve lærebokteksten, men ikke nødvendigvis i oppgavesamlingen. Eksamensoppgaver på Del 1 som er lik eksempler og oppgaver i lærebøkene, vil ende i denne kategorien. Det samme gjelder tilsvarende oppgaver til 2MX-eksamen.

Når eksamensoppgavene i det følgende skal analyseres og kategoriseres, vil den samme oppgaven kunne komme ulikt ut for de forskjellige lærebøkene fordi lærebøkene har ulik teoritekst og eksempler og elevene vil derfor til en viss grad ha noe ulik kunnskap. Det kan altså forekomme tilfeller av at noen elever er presentert for og har fått trening i en algoritme som er ukjent for andre.

Guidet algoritmisk resonnement (GAR)

Guidet algoritmisk resonnement vil være mulig når skriftlige kilder er tilgjengelige. Metoden er da å lete etter eksempler, oppgaver eller regler som har likhet med oppgaven og implementere disse (Lithner, 2008, s. 263). Identifikasjon av likhet mellom eksempler/oppgaver i lærebøkene står sentralt. For oppgavene på Del 2 til R1-eksamen vil dette være en mulig fremgangsmåte fordi lærebøkene er tilgjengelige. Ved analysen av eksamenene i 2MX vil kategorien ”guidet algoritmisk resonnement” være særlig aktuell for oppgaven som har forberedelsesdel. For øvrig vil det være svært begrenset skriftlig materiale tilgjengelig ved 2MX-eksamen.

Det kan også være at en større oppgave som består av flere deloppgaver, er bygd opp på en måte som gjør at en deloppgave mot slutten kan løses gjennom ”guiden” som i praksis er laget ved løsning av de første deloppgavene. Dette kan være en oppgave som ikke nødvendigvis er familiær for eleven hvis den vurderes med bakgrunn i lærebøkene, men hvor eleven lager en guide gjennom løsningen e ledes frem til skritt for skritt.

Begrenset algoritmisk resonnement (BAR)

I dette tilfellet velges en algoritme blant flere som for oppgaveløseren ser ut til å kunne brukes til å løse oppgaven. Dersom den ikke ser ut til å føre fram, prøves en annen av algoritmene som ser ut til å kunne brukes (Lithner, 2008, s. 262-263). Den undersøkelsen som gjøres av eksamensoppgavene, vil ikke kunne si noe om den enkelte elevs løsningsstrategi i eksamenssituasjonen, så denne kategorien vil ikke være i bruk.

4.2.2 Kreativt resonnement

Kreativt resonnement og teorien omkring det, er tett knyttet opp til problemløsning i matematikk. Denne formen for resonnement er matematisk velfundert. Kravet til at oppgaven skal klassifiseres i denne kategorien er også at resonnementet er nytt for eleven (Bergqvist, 2007, s.350). Også her kan det deles i to underkategorier; lokalt og globalt.

Lokalt kreativt resonnement krever kreativt resonnement i enkelte deler av oppgaven som for øvrig kan løses ved algoritmisk resonnement. Oppgaver som krever globalt kreativt resonnement krever i sin helhet at elevene baserer løsningen på et for dem nytt resonnement som begrunnes og forklares ut fra matematisk forståelse av oppgaven (Bergqvist, 2007, s. 354-356).

Fordi det bare er en begrenset del av det elevene har sett av oppgaver i løpet av undervisningen som er vurdert opp mot eksamensoppgavene, vil usikkerheten ved oppdelingen i lokalt og globalt kreativt resonnement bli for stor. Jeg har derfor valgt å beholde dette som én samlet kategori – kreativt resonnement (KR).

Det kan være at oppgaven kan løses ved å bruke en kombinasjon av algoritmer som hver for seg er kjent for eleven, men hvor situasjonen er ukjent for eleven og det derfor kreves kreativt resonnement basert på det matematiske innholdet for å komme frem til en løsningsmetode som gir riktig resultat.

4.2.3 Samme oppgave – ulik kategori

Den samme oppgaven vil kunne havne både i kategorien for algoritmisk resonnement og kreativt resonnement basert på hvilken lærebok som har vært i bruk. En elev som ikke har sett eller gjort tilsvarende oppgave må utvise større kreativitet i løsningen enn en elev som har møtt tilsvarende oppgave gjennom læreboken. Ved denne undersøkelsen vurderes eksamensoppgavene bare opp mot hoveddelen av læreboken med det som finnes av eksempler og oppgaver her. Jeg har antatt at hovedteksten i læreboken er et minimum av det en elev som skal opp til eksamen i faget har vært gjennom.

Lærebøkene er litt forskjellige og har prioritert litt ulikt i valg av eksempler og oppgaver som får plass i denne delen. Det vil derfor forekomme tilfeller av at en oppgave er familiær for noen elever mens den er ukjent for elever som har brukt en annen bok. I disse tilfellene har jeg gjort et valg med hensyn til kategorisering og begrunnet dette. Det er noen få eksempler på dette som behandles spesielt i oppgaveanalysen i avsnitt 6.

4.3 Alternativ metode

Metoden som er beskrevet ovenfor er selvfølgelig ikke den eneste som kunne vært brukt til å vurdere krav til problemløsning i eksamensoppgaver. Det er mulig å se også ut over matematikkens verden for å finne verktøy som kan være egnet. I arbeidet med utvikling av stadig mer avansert datateknologi, er det nedlagt mye arbeid i å identifisere menneskelig problemløsning.

4.3.1 Alternativt verktøy

Det følgende er basert på Hank Kahneys (1993) bok om problemløsning og er kun ment som en illustrasjon av hvordan et alternativt analyseverktøy kunne vært utviklet. Det er ikke å betrakte som en fullstendig utvikling av verktøy til klassifisering av eksamensoppgaver i matematikk, men en skisse.

1. Er problemet veldefinert?
   Dette avgjøres på bakgrunn av informasjon om;
   - innledende status for problemet
   - ønsket mål
   - hvilke operatorer er tillatt i løsningen
   - restriksjoner ved bruk av operatorer
2. Analyse av løsningsstruktur
   - skritt for skritt registrere hva som skal til for å komme fra innledende status til mål
3. Hvordan er løsningsstrukturen relatert til problemer man har løst tidligere?
   - er det en isomorfi, det vil si kan man følge nøyaktig samme løsningsstruktur som ved et tidligere tilfelle?
   - er det en homomorfi, det vil si ligner problemet et man har løst tidligere, men uten at man kan følge nøyaktig samme løsningsstruktur i løsningen av det?

Ved å se på oppgaver og eksempler i bøkene og sammenligne med løsning av eksamensoppgavene, vil det være mulig å avgjøre om problemene er veldefinerte og om de er isomorfiske eller homomorfiske i forhold til lærebøkene.

En eksamensoppgave som er veldefinert vil betraktes som isomorfisk med et eksempel eller en oppgave fra boken dersom den kan løses ved å gjenkalle en fullstendig løsning fra hukommelsen eller bruke en løsningsalgoritme som enten er kjent fra oppgaver og eksempler eller som kan følges direkte dersom skriftlige kilder er tilgjengelige. Dette er til en viss grad analogt med imiterende resonnement slik det er beskrevet i avsnitt 4.2.1. En mindre veldefinert oppgave som ikke kan løses ved å kopiere en kjent løsningsstruktur, kan sies å kreve kreativt resonnement hvis kriteriene i avsnitt 4.2.2 legges til grunn mens den kan sies å være homomorfisk hvis kriteriene over legges til grunn. Etter en slik analyse med kategorisering i ismorfiske og homorfiske oppgaver, ville det være mulig å foreta en opptelling og sammenligning av oppgavesettene for de ulike eksamenene.

Jeg har ikke gjort to analyser og vet derfor ikke om det ville føre til ulikheter i resultatene, men sammenligning av kriteriene for de to hovedkategoriene som er gjort i avsnittet over, gir grunn til å tro at resultatene ikke ville bli så forskjellige.

Fordelen med verktøyet jeg har valgt, er at det har vært brukt i lignende arbeid tidligere. Dersom for eksempel Kahneys (1993) teorier skulle vært brukt, ville det krevd en videreutvikling med utprøving som går utover rammen for denne masteroppgaven. Men det hadde klart vært interessant og kunne økt troverdigheten til undersøkelsen om det hadde vært brukt to ulike verktøy for angi graden av kravet til problemløsning i eksamensoppgavene.

4.4 Data

Dybdekunnskap ervervet gjennom studier av et lite antall tilfeller, krever at casene som velges er representative for fenomenet (Ragin, 1994, s. 86).

> Hvor stor del av eksamensoppgavene i matematikk 2MX og matematikk R1 krever evne til problemløsning og hvor stor del krever algoritmebruk?
> Har det skjedd endring i fordelingen med overgangen til ny eksamensform?

For å belyse dette forskningsspørsmålet, gjøres en kvalitativ analyse av eksamensoppgaver med utgangspunkt i analyseverktøyet beskrevet tidligere. Data vil først og fremst utgjøres av følgende eksamenssett;

- tre eksamenssettene til R1 som foreligger våren 2009 (det vil si eksamen gitt vår og høst 2008 og eksamen gitt våren 2009)
- tre eksamenssett fra 2MX forut for dette (eksamen gitt vår 2006 og høst 2006 og vår 2007).

Valget av data for R1-eksamen gir seg selv. Det lages fortsatt nye 2MX-eksamener, men jeg har likevel valgt data fra eksamener som er gitt før første R1-eksamen. Det er gjort i tilfelle det skulle være "smitteeffekt" mellom eksamener på samme nivå laget samme semester. Da ville eventuelle endringer som har skjedd som følge av læreplan og eksamensform bli vanskeligere å spore. Ved å velge oppgavesett fra før første R1-eksamen, er det sannsynlig at oppgavene bedre representerer 2MX-eksamenene enn det senere sett ville gjøre. Det er også forskjell på elevgruppene som går opp til eksamen ordinært, det vil si om våren, og de som går opp til eksamen om høsten. I den siste gruppen er det ofte én gruppe som har strøket til ordinær eksamen og én gruppe som ønsker å forbedre karakteren for å komme inn på studier med høye karakterkrav. Det er ikke grunnlag for å si at eksamenssettene om våren og høsten er forskjellige. Men siden dette ikke har vært undersøkt spesielt, har jeg valgt å ta med et høst-sett av 2MX også for at datamaterialet skulle være mest mulig sammenlignbart for de to kursene.

I tillegg til eksamenssettene vil det være nødvendig å trekke inn andre skriftlige kilder som data for en fullstendig analyse. For 2MX er det formelsamlingen og lærebøkene. For R1 er det formel- og regelarket fra Utdanningsdirektoratet og lærebøkene. Tre forlag er aktive i skolebokproduksjonen i matematikk for videregående skole, så det finnes tre parallelle læreverk til hvert fag.

Det vil føre for langt å analysere eksamensoppgavene i lys av alle oppgavene som tilbys gjennom disse læreverkene. Den enkelte elev vil sannsynligvis heller ikke ha vært gjennom samtlige oppgaver i sitt læreverk. Jeg har tatt utgangspunkt i en "minimumsvariant": eksemplene og oppgavene som finnes i selve hovedteksten og i tilknytningen til hvert delkapittel. Det vil si at jeg har utelatt oppgaver i slutten av hovedkapitlene, i egen oppgavesamling og på forlagenes nettsider. Eksamensoppgavene vurderes opp mot hver lærebok for seg, siden de fleste elevene kun har ett av de tre verkene. Ved å utelate oppgaver eleven kan ha vært borti under opplæringen, kan det føre til at flere oppgaveløsninger er familiære for elevene enn det som vises i denne undersøkelsen.

Resultatene fra analysen utgjør data for en kvantitativ sammenligning. Her vil jeg komme tilbake til det som ble nevnt i avsnitt 4.1. hvor eksamenssettene sees som case hver for seg og sammenlignes, og hvor de tre eksamenssettene i 2MX samlet sammenlignes med de tre eksamenssettene i R1.

> Er det likheter og forskjeller i eksamenssettene utover det som har med krav til problemløsning?

Data til å belyse dette forskningsspørsmålet vil også i stor grad genereres fra den kvalitative analysen av oppgavene. I tillegg vil data komme gjennom sammenligning av oppgavesettene ut fra flere kriterier enn krav til problemløsning. Til tross for endret eksamensform er det mange ytre likheter å spore i oppbygningen av eksamenssettene. Ved å legge de seks eksamenssettene ved siden av hverandre er det mulig å skape et bilde av likheter og forskjeller ved oppgavesettene. Antall hoved- og deloppgaver, tema for oppgavene, bruk av illustrasjoner, valgfrihet og forberedelser er momenter som må tas i betraktning. Denne gjennomgangen munner ut i en liste over likheter og forskjeller ved eksamenssettene for 2MX og for R1.

5. Klassifisering av oppgavene

Hver enkelt oppgave i de seks aktuelle eksamenssettene vil bli analysert for å kunne svare på om eksamensoppgavene krever evne til problemløsning. Oppgavene klassifiseres og resultatene samles i et regneark for videre analyse.

5.1 Analyseskjema

Klassifisering av hver enkelt deloppgave vil foregå etter følgende skjema:

1. Analyse av eksamensoppgaven.
   a) Løsning av oppgaven
   b) Er det en tekstoppgave eller en ferdig oppstilt oppgave?
   c) Gis det hint eller nøkkelord som setter eleven på sporet av algoritme?
   d) Finnes formlene/reglene som brukes i oppgaveløsningen i formelsamlingen?
2. Gjennomgang av lærebøkene.
   Forekommer lignende oppgave i teoritekst, eksempler og oppgaver i lærebøkene?
3. Argumentasjon og konklusjon
   Argumentasjon for hvilket resonnement som kreves for å løse oppgaven og til slutt en konklusjon.

Listen over er laget med utgangspunkt i Bergqvists (2007) analyse av eksamensoppgaver til lavere grad på universitetsnivå.

1. Analyse av eksamensoppgaven.
a) *Løsning av oppgaven* er første skritt i analysen.
b) *Er det en tekstoppgave eller en ferdig oppstilt oppgave?* Her skiller jeg mellom om oppgaven er ferdig oppstilt eller om det er en tekstbasert oppgave som eleven selv må finne matematisk representasjon for.
c) *Gis det hint eller nøkkelord som setter eleven på sporet av algoritme?* Dersom det er en tekstoppgave, inneholder oppgaveteksten nøkkelord som i praksis er hint eller direkte forklaring på hvordan man kan gå frem for å løse oppgaven? Kalkulatorens muligheter og begrensninger er spesielt aktuelt for noen oppgaver på 2MX-eksamen. I en del tilfeller kan elevene bruke kalkulatoren til å finne fasitsvaret og indirekte få et hint i situasjoner hvor de er usikre på om de har valgt riktig fremgangsmåte.

d) *Finnes formlene/reglene som brukes i oppgaveløsningen i formelsamlingen?* Noen oppgaver kan løses ved direkte bruk av algoritmer elevene kjenner. Det vil ikke alltid bety at oppgaven oppleves som enkel. Dersom det er nødvendig å kombinere flere regler for å komme frem til løsningen – for eksempel når kjerneregelen tas i bruk i derivasjon – kan mange elever oppleve den som vanskelig. Elevene som gikk opp til 2MX-eksamen hadde formelsamling tilgjengelig gjennom hele eksamen og kunne slå opp formlene de trengte der. For elevene som gikk opp til R1-eksamen var det utarbeidet en liste som en del av Vurderingsveiledningen (2008) fra Utdanningsdirektoratet hvor det fremgikk hvilke formler det var forutsatt at elevene behersket på delen uten hjelpemidler. Denne listen lå nært opp til det som fantes i formelsamlingen, men det er viktig å bemerke at den *ikke* var tilgjengelig for elevene under eksamen. Den er mer å betrakte som en liste over hva som bør læres utenat. For hele 2MX-eksamen registreres det om formlene finnes i formelsamlingen.

2. Gjennomgang av lærebøkene

For å kunne avgjøre om en oppgavetype kan karakteriseres som kjent for eleven, undersøkes eksempler/teorigjennomgang og oppgaver for de tre ulike lærebøkene. Det registreres om bøkene har eksempler og oppgaver som er tilsvarende eksamensoppgaven. Dersom det er store forskjeller mellom bøkene kommenteres dette spesielt.

3. Argumentasjon og konklusjon.

Ut fra analysen av oppgaven beskrevet i punkt 1 og gjennomgangen av lærebøkene beskrevet i punkt 2, argumenterer jeg under dette punktet for plassering av oppgaven i en kategori. Ewa Bergqvist har et punkt om kontekst i sin undersøkelse. Hun ser på dette som noe som kan hjelpe eleven til å velge riktig løsningsstrategi, for eksempel banksparing som et stikkord som kan lede eleven mot algoritmer som gjelder eksponentiell vekst (Bergqvist 2007, s. 356). Det dekkes i min undersøkelse av punkt 1c hvor det registreres om det gis hint. Jeg ser at språk i noen grad kan gi ekstra utfordringer hvis setningsoppbygningen er komplisert, hvis informasjonen er skjult i omfattende tekst, dersom teksten inneholder enkeltord som kan misforstås eller kontekstbeskrivelser som må antas lite kjent for eleven. Hvis det forekommer, vil jeg kommentere det spesielt. Det gjelder også dersom det er andre særskilte ting å bemerke ved oppgaven.

5.2 Kvantifisering av resultatene

Den endelige plasseringen av oppgavene i ulike kategorier, vil være basert på en helhetsvurdering. Når analysen av eksamensoppgavene i det følgende presenteres vil det skje i en kombinasjon av å gjengi en skjematisk gjennomgang og å trekke ut spesielle ting som kommenteres spesielt uten at hele skjemaet er med. Dette gjøres for å gi presentasjonen bedre flyt og for at ikke viktige observasjoner skal forsvinne i en repeterende skjematisk form. Resultatene av analysen som er beskrevet foran, vil samles i et regneark som danner grunnlaget for tabellene og diagrammene som presenteres i avsnitt 6 og 7.

Variabel	**Verdi**
Tekst	Tekstoppgave = 1 Ferdig oppstilt oppgave = 0
Hint	Hint til løsning eller metode = 1 Ingen hint = 0
Formlene i formelsamlingen?	Formlene finnes i formelsamlingen = 1 Formelsamlingen er ikke til hjelp = 0
Eksempler/oppgaver*	Bøkene inneholder tilsvarende eksempler eller oppgaver = 1 Ikke tilsvarende eksempler og oppgaver i bøkene = 0
Familiært algoritmisk resonnement (FAR)*	Ja = 1, Nei = 0
Guidet algoritmisk resonnement (GAR)*	Ja = 1, Nei = 0
Kreativt resonnement (KR)*	Ja = 1, Nei = 0

*Dersom bøkene skiller seg fra hverandre kommenteres dette spesielt

Tabell 5-1 Variabler og verdier i analysen av oppgavene

6. Undersøkelsen

For ikke å miste helheten når jeg går løs på den detaljerte gjennomgangen av deloppgavene, begynner jeg med en ytre sammenligning av oppgavesettene.

6.1 Likt og ulikt

Det er hjelpemiddelbruken som er den store forskjellen på eksamensoppgavene. På R1-eksamen er to femdeler av eksamen uten andre hjelpemidler enn skrivesaker. Til gjengjeld er både skriftlige kilder og dataverktøy tillatt på siste del av eksamen. 2MX-elevene hadde formelsamling med egne notater og grafisk kalkulator som hjelpemidler gjennom hele eksamen.

Hvert eksamenssett har fem oppgaver. Antallet deloppgaver i de seks eksamenssettene varierer fra 28 til 33, og antallet elevene skal løse varierer fra 22 til 28. Forberedelsesdelen er spesiell for 2MX-eksamen. Oppgave 5 på denne eksamenen er basert på en forberedelsesdel elevene har fått og arbeidet med i forkant av eksamen.

Både på 2MX og R1 eksamen består oppgave 1 av mange små deloppgaver fra helt ulike deler av pensum. Det er ingen sammenheng mellom de enkelte deloppgavene, men test av kunnskap i mange av læreplanmålene. Spesielt for 2MX-eksamen er at for hvert delspørsmål skal elevene velge mellom oppgaver med ulik vanskelighetsgrad. Alternativ II gir omtrent dobbelt så mye uttelling som alternativ I og dette er det opplyst om i oppgaveteksten. Til R1-eksamen tilhører denne oppgaven Del 1 som er uten hjelpemidler. Eksamen skal teste både dybde og bredde i elevenes kunnskap. Bredden kan testes gjennom flere mindre oppgaver med temaer spredt ut over kompetansemålene i læreplanen (Vurderingsveiledningen 2009).

R1-eksamen har to alternativer på oppgave 4. Elevene skal besvare enten alternativ I eller alternativ II. Her gir begge oppgavene samme uttelling, men på et av alternativene kan digitale verktøy utover grafisk kalkulator være en fordel (Grythe, 2008). Våren 2009 står det eksplisitt under alternativ II at det i deler av oppgaven er en fordel å bruke digitale verktøy (R1 våren 2009).

Oppgave 2 er uten hjelpemidler på R1-eksamen. På de eksamenssettene jeg har sett på i 2MX og R1 er dette i alle tilfellene en oppgave med vektorer og/eller geometri.

Fra og med oppgave 3 har elevene på R1-eksamen alle hjelpemidler bortsett fra kommunikasjon tilgjengelig. Denne oppgaven er på 4 av 6 eksamenssett en ren sannsynlighetsoppgave. Ved 2MX-eksamen våren 2006, har sannsynlighetsoppgaven forberedelsesdel og er derfor flyttet til oppgave 5. Ved R1-eksamen våren 2009 er sannsynlighet bare en del av oppgave 3.

Hvis man ser bort fra hjelpemidlene, er ytre sett likhetene større enn forskjellene for eksamen i 2MX og R1.

	2MX (vår 2006, høst 2006, vår 2007)	**R1** (vår 2008, høst 2008, vår 2009)
Antall hovedoppgaver	Fem	Fem
Antall deloppgaver	29 – 28 – 28 (netto 23 – 22 – 23)	28 – 30 – 33 (netto 24 – 26 – 28)
Oppgave med forberedelsesdel	Ja	Nei
Figurer i oppgaveteksten	2 – 0 – 2	4 – 4 – 2
Oppgave 1	Mange deloppgaver To alternativer – ulik uttelling	Mange deloppgaver
Oppgave 2	Vektorer/geometri	Vektorer/geometri
Oppgave 3	Sannsynlighet i to av tre tilfeller	Sannsynlighet i to av tre tilfeller – i det siste delvis sannsynlighet
Oppgave 4		To sidestilte alternativer
Oppgave 5	Basert på forberedelsesdel	
Hjelpemidler	Formelsamling med egne notater + grafisk kalkulator	2t kun skrivesaker 3t alle (bortsett fra kommunikasjon)

Tabell 6-1 Sammenligning av 2MX og R1

6.2 Oppgave 1 – litt av hvert

Til eksamen i 2MX (vår 2006, høst 2006, vår 2007) gis det to alternativer til hver av disse oppgavene. I innledningen til oppgaven opplyses det om at alternativ II gir dobbelt så stor uttelling som alternativ I. Elevene har samme hjelpemidler på denne oppgaven som på resten av eksamen; grafisk kalkulator og formelsamling med egne notater.

Til eksamen i R1 (vår 2008, høst 2008, vår 2009) gis det ikke alternativer under oppgave 1 og den er gitt på den delen av eksamen hvor elevene ikke har andre hjelpemidler enn skrivesaker.

Det er store likheter fra det ene settet til det andre i oppgavetyper og klassifisering. Alle enkeltanalysene er derfor ikke tatt med her, men noen eksempler som viser hvordan klassifiseringen har foregått.

6.2.1 Oppgave 1 i 2MX:

Jeg var litt i tvil om elevene skal vise den såkalte abc-formelen, det vil si foreta manuell utregning av røttene i andregradsligningene som forekommer i oppgave 1. Det har også noen sensorer vært, så i sensorveiledningen (Forhåndssensur i realfag våren 2007) er det bemerket at løsning på lommeregner godtas. Jeg har antatt at det samme gjelder for alle eksamenene i 2MX.

2MX, vår 2006: Oppgave 1a – alternativ I)

Løs ligningen ved regning: $\sqrt{x-1} = x-3$

1. Analyse av eksamensoppgaven

a) *En løsning:*

$$\sqrt{x-1} = x-3$$
$$x-1 = (x-3)^2$$
$$x-1 = x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 9$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$x_1 = 5$, $x_2 = 2$

Sjekker hvilken løsning som kan brukes: For $x_1 = 5$ har vi venstre side $\sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$ og høyre side lik $5-3=2$

For $x_2 = 2$ har vi venstre side $\sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$ og høyre side lik $2 - 3 = -1 \neq 1$

$x = 5$

b) *Tekstoppgave?* Oppgaven er ferdig oppstilt

c) *Hint?* Det gis ikke hint, men oppgaven er av en type der fasitsvaret kan finnes direkte på kalkulator.

d) *Formelsamlingen?* Andre kvadratsetning (og formel for løsning av andregradsligning) står i formelsamlingen.

2. Lærebøkene

Tilsvarende eksempler i lærebøkene: I alle bøkene finnes forklarende eksempler og oppgaver.

3. Argumentasjon og konklusjon

Oppgavetypen er kjent. Familiært algoritmisk resonnement (FAR).

I oppgaven over og i flere andre av deloppgavene til oppgave 1 på 2MX-eksamen kan fasitsvaret helt eller delvis finnes ved hjelp av kalkulator. Kahney (1993) beskriver en ”minske forskjellen”-teknikk som kan utvikles i problemløsning der inngangsstatus og mål er klart definert. Da går strategien ut på å analysere forskjellen mellom der man er og dit man skal. Det er ikke utenkelig at elever utvikler slike strategier i forhold til oppgaver der svaret er gitt – enten fordi de har funnet det ved hjelp av kalkulatoren eller de har fått det oppgitt i oppgaver med formuleringen ”vis at”.

2MX, vår 2006, Oppgave 1a – alternativ II)

Løs ligningen ved regning: $(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$

1. Analyse av eksamensoppgaven

a) *En løsning*: Substituerer: u = ln x og får ligningen $u^2 - 5u + 6 = 0$ som har løsningene u = 2 eller u = 3.

Får løsningene ln x = 2 eller ln x = 3

Bruker definisjonen av den naturlige logaritmen og får $x = e^2$ eller $x = e^3$

b) *Tekst?* Oppgaven er ferdig oppstilt

c) *Hint?* Det gis ikke hint, men svaret kan delvis finnes direkte på kalkulator.

d) *Formelsamlingen?* Definisjon av logaritme (og formel for løsning av andregradsligning) står i formelsamlingen.

2. Lærebøkene

Bøkene har eksempler og oppgaver hvor substitusjon brukes i lignende tilfelle.

3. Argumentasjon og konklusjon

Alternativ II er vanskeligere enn alternativ I, men ikke i den forstand at det kreves ulikt resonnement for de to alternativene. Elevene må se likheten med annengradsligningen, men dette vil de ha møtt i eksempler og oppgaver. Konklusjonen er derfor at oppgaven kan løses ved familiært algoritmisk resonnement (FAR).

Det finnes som tidligere nevnt, noen tilfeller som blir tvilstilfeller på grunn av forskjellen på lærebøkene. Et eksempel på det følger.

2MX, vår 2006: Oppgave 1b – alternativ II)

Løs ligningen ved regning: 4cos x – 3sin x = 0, x ∈ [0°, 360°⟩

1. Analyse av eksamensoppgaven

a) *En løsning*: Deler med cos x for å få tan x som ukjent og løser deretter ligningen på vanlig måte.

$$\frac{4\cos x}{\cos x} - \frac{3\sin x}{\cos x} = 0$$

$$\tan x = 4$$

$$\tan^{-1} x \approx 80°$$

Finner løsningen i tredje kvadrant; $80° + 180° = 260°$

b) *Tekst?* Oppgaven er ferdig oppstilt

c) *Hint?* Det gis ikke hint, men oppgaven er av en type der fasitsvaret delvis kan finnes på kalkulator.

d) *Formelsamlingen?* Formelsamlingen er ikke til hjelp

2. Lærebøkene

Det er bare én av lærebøkene som har tilsvarende eksempler og oppgaver – de andre har bare eksempler på enkle trigonometriske ligninger, ingen sammensatte som i denne oppgaven.

3. Argumentasjon og konklusjon

Dette er et eksempel på en oppgave som i utgangspunktet havner i to kategorier fordi lærebøkene gir elevene ulike forutsetninger for å løse oppgavene. For elevene som har hatt læreboken med eksempel og oppgave, er dette en oppgave som kan løses med familiært algoritmisk resonnement, mens elevene som har hatt de andre bøkene i dette tilfellet selv må resonnere seg frem til at de ved å dele med *cos x* vil ende opp med én ukjent og en løsbar ligning. Når de har kommet så langt, er resten algoritmebruk og eksempler som viser at det finnes to løsninger i intervallet, har de fått på lik linje med elever som bruker andre bøker. For disse elevene vil denne oppgaven være av en type som krever kreativt resonnement. Det ligger en viss grad av usikkerhet i denne konklusjonen fordi det bare er teorieksemplene og oppgavene som er i selve teksten som er tatt med i gjennomgangen av oppgavene opp mot lærebøkene. Dette er en vanlig eksamensoppgave så det er ikke usannsynlig at elevene har løst tilsvarende oppgaver i eksamensforberedelsene. Den endelige konklusjonen er derfor å klassifisere oppgaven til å være av typen som kan løses med familiært algoritmisk resonnement (FAR).

Når det gjelder resten av oppgave 1 i eksamenssettet 2MX for våren 2006, finnes det ikke oppgaver som krever kreativt resonnement og heller ikke flere oppgaver der det er ulikhet i vurdering basert på hvilken lærebok som er brukt. Det som først og fremst preger alternativ II er enten at det er mer arbeid enn med alternativ I eller at det må brukes formler og regler som det er litt færre eksempler på i bøkene og som derfor kan oppfattes som litt vanskeligere. Et eksempel på hvert av disse tilfellene følger – først én oppgave med samme vanskelighetsgrad, men mer arbeid på alternativ II:

2MX, vår 2006: Oppgave 1e – alternativ I)

Bruk derivasjon til å bestemme koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til funksjonen gitt ved: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

1. Analyse av eksamensoppgaven

a) *En løsning*: Deriverer funksjonen; $f'(x) = 4x + 4 = 4(x + 1)$

Og setter den deriverte lik 0; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'(x) < 0$ når $x < -1$ og $f'(x) > 0$ når $x > -1$ så grafen har et bunnpunkt når $x = -1$

Finner $f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -3$. Bunnpunktet til grafen er i $(-1,-3)$

b) *Tekst?* Det er en tekstoppgave

c) *Hint?* Det gis en kombinasjon av hint og krav til løsningsmetode; "bruk derivasjon"
d) *Formelsamlingen?* Regel for derivasjon av polynom finnes i formelsamlingen.

2. Lærebøkene
   I alle bøkene finnes forklarende eksempler og oppgaver.

3. Argumentasjon og konklusjon
   Fasitsvaret finnes enkelt ved å tegne grafen på kalkulator og finne minimumspunktet.
   Familiært algoritmisk resonnement (FAR).

2MX, vår 2006: Oppgave 1e – alternativ II)

Bruk derivasjon til å bestemme koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til funksjonen gitt ved: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Fremgangsmåten er helt tilsvarende som for alternativ I, men fordi funksjonen har både et topp- og et bunnpunkt er det litt mer arbeid enn for alternativ I. Ut over det ligger det ingen utfordringer, oppgavetypen er kjent for elevene så kategori blir familiært algoritmisk resonnement (FAR).

2MX, vår 2006: Oppgave 1f – alternativ II)

Bestem integralet ved regning: $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} (2e^x - e^{-x})dx$

1. Analyse av eksamensoppgaven
   a) *En løsning:*

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} (2e^x - e^{-x})dx = \left[2e^x - (-e^{-x})\right]_{-\ln 2}^{\ln 2} = 2e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} - 2e^{-\ln 2} - e^{-(-\ln 2)} = e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

   b) *Tekst?* Det er en ferdig oppstilt oppgave.
   c) *Hint?* Det gis ikke hint
   d) *Formelsamlingen?* Alle nødvendige formler og regler finnes i formelsamlingen.

2. Lærebøkene
   Ingen av bøkene har integraler som evalueres mellom grenser bestemt av logaritmer. En av bøkene har en oppgave hvor elevene skal regne et bestemt integral med logaritme som grense.

3. Argumentasjon og konklusjon

   Det å løse et bestemt integral må anses som en oppgave av familiær type og svaret lar seg sjekke på kalkulator. Det som er nytt for elevene er grensene, og siden elevene skal vise løsningen ved regning, karakteriseres oppgaven derfor under tvil i kategorien kreativt resonnement (KR).

2MX, vår 2006: Oppgave 1f – alternativ I)

Bestem integralet ved regning: $\int_1^3 (2x^2 - 3x)dx$

Analysen av denne oppgaven blir helt tilsvarende analysen for den vanskeligere oppgaven – forskjellen ligger i at det er enklere og færre formler og regler som trengs for å løse den og grensene er slik elevene er vant til å se dem, så her kreves familiært algoritmisk resonnement.

Oppgave 1 er svært lik fra det ene eksamenssettet til det neste, men likevel ikke forutsigbart. Noen eksempler på variasjonene i oppgave 1 følger.

2MX, høst 2006: Oppgave 1d – alternativ II)

Deriver funksjonen $k(x) = 2x \cdot (\ln x)^2$

1. Analyse av eksamensoppgaven

   a) *En løsning*: Substituerer u = ln x og deriverer $[(\ln x)^2]$ ved bruk av kjerneregelen:
   $[(\ln x)^2]' = [u^2]' \cdot (\ln x)' = 2 \ln x \cdot 1/x$

   $$k'(x) = 2x \cdot (\ln x)^2 = 2 \cdot (\ln x)^2 + 2x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = 2(\ln x)^2 + 4\ln x = 2\ln x(\ln x + 2)$$

b) *Tekst?* Det er en ferdig oppstilt oppgave.

c) *Hint?* Det gis ikke hint

d) *Formelsamlingen?* Derivasjonsreglene finnes i formelsamlingen, men ikke produkt med flere faktorer.

2. Lærebøkene

   Bøkene har ikke tilsvarende eksempler

3. Argumentasjon og konklusjon

   Selv om løsningen bygger på kjente regler, er kombinasjonen ukjent og derfor vurderes oppgaven til å kreve kreativt resonnement (KR).

2MX, høst 2006: Oppgave 1e – alternativ II)

Deriver funksjonen $f(x)=\sqrt{3x+1}$. Bruk dette til å bestemme $\int_1^5 \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx$ ved regning. Gi en grafisk tolkning av svaret.

1. Analyse av eksamensoppgaven

a) *En løsning*:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

$$\int_1^5 \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx=\left[\sqrt{3x+1}\right]_1^5=\sqrt{3\cdot 5+1}-\sqrt{3\cdot 1+1}=4-2=2$$

$f(x)\geq 0$ i hele definisjonsområdet. Verdien tilsvarer arealet avgrenset av x-aksen, $x=1$, $x=5$ og grafen til $f(x)$.

b) *Tekst?* Det er i hovedsak en ferdig oppstilt oppgave.

c) *Hint?* Det gis hint fordi løsningen av integralet gis gjennom første del av oppgaven.

d) Alle nødvendige formler og definisjoner finnes i formelsamlingen.

2. Lærebøkene

   Lærebøkene er ulike – noen har tilsvarende eksempler og oppgaver – andre ikke

3. Argumentasjon og konklusjon

   Fasitsvaret for det bestemte integralet får man ved hjelp av kalkulator. Dette er en oppgave som egentlig fordrer familiært algoritmisk resonnement eller lokalt kreativt resonnement avhengig av hvilken lærebok som er brukt. For mange er den litt uvant i formuleringen og den krever en forståelse av sammenhengen mellom integrasjon og derivasjon. Under tvil karakteriseres den som en oppgave som krever kreativt resonnement (KR).

2MX, høst 2006: Oppgave 1e – alternativ I)

Bestem integralet ved regning. Tolk svaret grafisk. $\int_2^4 (4x^3 - x^2 - 1)dx$

Dette er det enklere alternativet til oppgaven som er analysert foran. Her er det kun integrasjon av et polynom og evaluering innenfor grensene. Det er litt mindre arbeid med denne oppgaven og litt færre regler og definisjoner involvert så derfor blir den enklere. Den er typisk for eksempler og oppgaver i bøkene og ender derfor i kategorien (FAR).

Akkurat som for våren 2006, har eksamenssettet høsten samme år og våren 2007 en trigonometrisk ligning som nok vil oppleves forskjellig for elevene avhengig av hvilken lærebok de har brukt. Det gjelder oppgave 1b – alternativ II) begge årene. Høsten 2006 var oppgaven; Løs ligningen $2\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$, x ∈ [0°, 360°⟩. Dette er en familiær oppgave for elevene som har brukt én av lærebøkene, men vil være en større utfordring for de andre. Det samme gjelder oppgaven våren 2007 som lød: Løs ligningen ved regning $6\cos^2 x = 5\cos x - 1$, x ∈ [0°, 360°⟩. Noen elever har brukt substitusjon i denne sammenhengen mens det ikke nødvendigvis er kjent for elever med andre lærebøker. Med samme argumentasjon som for tilsvarende oppgave våren 2006, er disse plassert i kategorien familiært algoritmisk resonnement (FAR).

Det er få tekstoppgaver på oppgave 1 i de eksamenssettene som er mitt datagrunnlag. I oppgave 1 våren 2006 var bare én av deloppgavene for begge vanskelighetskategorier en tekstoppgave. Høsten 2006 var det i tillegg til oppgave 1e, en ren tekstoppgave i sannsynlighet. Fordelingen av tekstoppgaver i de ulike eksamenssettene kommer jeg tilbake til i drøftingen, men jeg tar med den siste deloppgave våren 2007 siden den skiller seg litt ut.

2MX, vår 2007: Oppgave 1e) **Vi skal undersøke sammenhengen mellom *x* og *y*:**

X	0	2	4	6	8
Y	10	11	12	13,5	15

Alternativ I er ”kalkulatormat”, mens alternativ II gir større utfordringer;

1) Lag en tabell med *x* og ln *y*, og marker punktene i et koordinatsystem. Bruk dette til

å finne en formel for ln *y* som funksjon av *x*.

2) Skriv om uttrykket fra 1) til formen y = A· e^{kx}

1. Analyse av eksamensoppgaven

   a) *En løsning (delvis):*

x	0	2	4	6	8
$\ln y$	2,30	2,4	2,48	2,60	2,71

   Ser både av tabellen og når man setter punktene inn i et koordinatsystem at de ligger tilnærmet på en rett linje. Finner stigningstall og konstantledd.

   $stigningstall = \frac{2{,}71 - 2{,}30}{8 - 0} \approx 0{,}05$. Konstantleddet leser vi rett av tabellen eller grafen.

   ln y = 0,05x + 2,30. Omformer uttrykket til formen y = A· e^{kx};

   $e^{\ln y} = e^{0{,}05x + 2{,}30}$

   $y = e^{2{,}30} \cdot e^{0{,}05x}$

   $y = 9{,}97 \cdot e^{0{,}05x}$

b) *Tekst?* Dette er en tekstoppgave.

c) *Hint?* Det gis hint til løsning av oppgave 2) gjennom oppgave 1)

d) *Formelsamlingen?* Formelsamlingen gir ligningen for en rett linje og viser metoden for å finne stigningstall. Definisjon av naturlig logaritme og potensreglene finnes også i formelsamlingen.

2. Lærebøkene

   Lærebøkene behandler temaet litt forskjellig. Noen elever er ikke vant til uttrykket på den formen som er i oppgaven fordi boken gir det som y = A· k^{x}.

3. Argumentasjon og konklusjon

   Selv om det meste av formlene står i formelsamlingen og svaret kan sjekkes med kalkulator, gjør krav til kombinasjon av formler og regler og bøkenes ulike behandling av temaet, at jeg vurderer andre del av oppgaven til å trenge kreativt resonnement (KR).

En opptelling for oppgave 1 på de tre 2MX-eksamenene som har vært vurdert, er at 5 av totalt 36 deloppgaver krever kreativt resonnement. De øvrige krever algoritmisk resonnement.

2MX	Antall deloppg.	Tekst	Hint	Formel-samling	Lære-bok*	Konklusjon FAR	GAR	KR
Vår '06	12	2	2	8	1	11		1
Høst '06	12	4	0	10	4	10		2
Vår '07	12	2	0	7	3	10		2

Tabell 6-2 Samlet oversikt oppgave 1 - 2MX

* *Antall oppgaver der lærebøkene er forskjellige når det gjelder eksempler og oppgaver.*

6.2.2 Oppgave 1 på R1 eksamen

Også i den nye eksamensformen består oppgave 1 av mange deloppgaver som er hentet fra ulike deler av pensum. Det er to viktige endringer; oppgave 1 på R1-eksamen tilhører delen uten andre hjelpemidler enn skrivesaker og det er ikke alternativer som elevene skal velge mellom. Siden formelsamling eller notater ikke er tilgjengelig, blir denne oppgaven i stor grad en test av pugget eller automatisert kunnskap.

Noen av oppgavene er svært like oppgavene fra 2MX-settene. Det gjelder for eksempel derivasjonsoppgavene. Her er utfordringen for elevene at de ikke har formelsamlingen tilgjengelig, men må blant annet huske hva den deriverte av ln x er. Det er også enkelte oppgaver på Del 1 som ville vært meningsløse på en 2MX-eksamen hvor elevene har formelsamlingen tilgjengelig;
R1, vår 2008, oppgave 1d)

Skriv så enkelt som mulig $\lg(x \cdot y^2) - 2\lg y + \lg\left(\frac{x}{y^2}\right)$

1. Analyse av eksamensoppgaven

   a) *En løsning*:

$$\lg(x \cdot y^2) - 2\lg y + \lg\left(\frac{x}{y^2}\right) = \lg x + \lg y^2 - 2\lg y + \lg x - \lg y^2 = 2(\lg x - \lg y) = 2\lg\left(\frac{x}{y}\right)$$

b) *Tekst?* Det er en ferdig oppstilt oppgave.

c) *Hint?* Det gis ikke hint.

2. Lærebøkene

   Tilsvarende eksempler og oppgaver finnes.

3. Argumentasjon og konklusjon

   Her blir elevene testet i logaritmereglene – men i en form de kjenner fra eksempler og oppgaver i læreboken så oppgaven krever familiært algoritmisk resonnement (FAR).

Jeg tar med et eksempel til fra oppgave 1 våren 2008 fordi jeg undres litt over tilleggsopplysningen gitt i denne oppgaven.

R1, vår '08, Oppgave 1e)

Vi har funksjonen $f(x) = x \cdot e^{-x}$

1) Vis at $f'(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$**. Bruk dette til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til** ***f.***

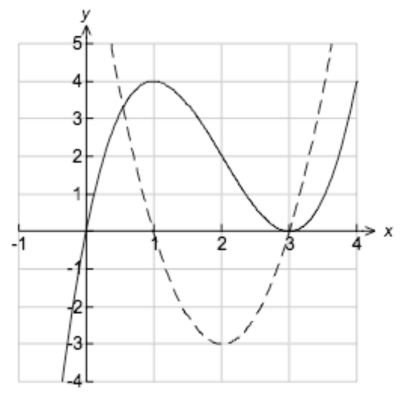
2) Bruk ***f''(x)*** **til å finne eventuelle vendepunkter på grafen til** ***f.***

(I denne oppgaven kan du få bruk for at $e^{-1} \approx 0,37$**,** $e^{-2} \approx 0,14$ **og** $e^{-3} \approx 0,05$**)**

Oppgaven kan løses ved bruk av algoritmer elevene kjenner. (Derivasjon av kjente uttrykk, faktorisering, tegning av fortegnslinje og innsetting av x-verdien der den deriverte er lik null i funksjonsuttrykket.) Det gir toppunktet (1, e^{-1}) = $\left(1, \frac{1}{e}\right)$ og vendepunkt (2, $2e^{-2}$) = $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

Bøkene opererer i stor grad med løsningen på den formen som er vist her, så det virker nesten som en kilde til forvirring med tilleggsopplysningen. Uansett er dette altså en oppgave som krever familiært algoritmisk resonnement (FAR). Utfordringene blir litt større i en oppgave gitt til R1, høst 2008:

e)



Figuren viser grafen til en funksjon f og grafen til den deriverte av funksjonen.

1) Forklar hvilken graf som er grafen til funksjonen f og hvilken som er grafen til den deriverte.

2) Bruk figuren til å tegne fortegnslinjene for $f(x)$, den førstederiverte og den andrederiverte.

Figur 6-1 Faksimile av oppgaveteksten

Når bøkene gjør funksjonsdrøftinger, tegner de fortegnslinjer for den deriverte på grunnlag av funksjonsuttrykket og de tegner grafer til funksjoner, men det er ingen som har tilsvarende eksempel som det vi ser i denne oppgaven. Eleven kan ikke bruke algoritmer, men må argumentere på grunnlag av kunnskap om derivasjon og funksjoner. Hvert enkelt element er kjent gjennom lærebøkene, men uten dem tilgjengelig vil det krever noe kreativitet i den aktuelle situasjonen så oppgaven krever kreativt resonnement.

Våren 2009 lignet oppgave 1 mer på 2MX-eksamener enn på de to foregående R1-eksamnene. Av ni deloppgaver var fem ferdig oppstilt. Noen av oppgavene var det en del jobb med, men alle var av kjent type og krever familiært algoritmisk resonnement.

De fire læreplanmålene for R1 har overskriftene geometri, algebra, funksjoner og kombinatorikk og sannsynlighet. Det er bare det siste som ikke er berørt i det hele tatt i oppgave 1 våren 2009, men hovedvekten ligger på algebra. Der må elevene vise at de behersker både det de har lært det siste året og tidligere kunnskap som abc-formelen for å finne røttene i et andregradsuttrykk.

En opptelling for oppgave 1 på de tre R1-eksamenene som har vært vurdert, er at kun 2 av totalt 25 deloppgaver krever kreativt resonnement. De øvrige krever algoritmisk resonnement. Det var ingen forskjell på bøkene i disse tilfellene. Tabellen gir en oversikt.

	Antall			Konklusjon		
R1	**deloppg**	**Tekst**	**Hint**	**FAR**	**GAR**	**KR**
vår '08	6	2	2	6		
høst '08	10	8	0	8		2
vår '09	9	4	1	9		

Tabell 6-3 Samlet oversikt oppgave 1 - R1

6.2.3 Oppsummering oppgave 1

Noen forskjeller mellom eksamenssettene for 2MX og R1 er relatert til læreplanen. For eksempel var integrasjon et læreplanmål i 2MX, men er ikke det i R1. I tillegg preges R1 av å kunne teste kunnskaper som det ville vært meningsløst å teste med formelsamlingen tilgjengelig, som for eksempel logaritmereglene.

Både når det gjelder 2MX og R1, må oppgave 1 kunne sies å teste basisferdigheter i matematikk. Det betyr ikke at oppgavene nødvendigvis er enkle – vanskelighetsgraden varierer. På 2MX-eksamen tydeliggjøres dette gjennom mulighet for å velge alternativ vanskelighetsgrad. Men også R1-eksamen har mer og mindre vanskelige deloppgaver, men her kan ikke elevene velge bort noen. Lektorlaget har lenge argumentert for at man ikke skal ha oppgaver med to alternativer som har ulik vanskelighetsgrad (NLLs syn på matematikkeksamen i vg. skole, 2003). Men om det er de eller andre som har påvirket denne endringen i eksamen, er ukjent.

Hvor mye formelsamlingen var til hjelp for elevene som hadde 2MX-eksamen, er det umulig å si noe om ut fra denne undersøkelsen. Kjerneregelen finnes i Formelsamlingen (2001) i følgende form; y = g (u), y' = g'(u) · u'. Jeg tviler på at en elev som ikke kan denne regelen før de kommer på eksamen, har stort utbytte av formelsamlingen på dette punktet. Fordi elevene til R1-eksamen visste at de ikke ville ha hjelpemidler tilgjengelig, har de muligens lagt mer innsats i formel- og regelpugg. Og elevene som var oppe til 2MX-eksamen kan ha forberedt seg gjennom egne tilleggsnotater i formelsamlingen. For eksempel kunne nok et konkret eksempel på bruk av kjerneregelen ved siden av den generelle regelen være til hjelp.

Kategoriseringen av oppgavene gir liten forskjell mellom 2MX og R1 når det gjelder oppgave 1.

Andel i %	**Tekst**	**Hint**	**Konklusjon**		
			FAR	**GAR**	**KR**
2MX	22	6	86		14
R1	56	12	92		8

Tabell 6-4 viser andel i prosent av alle deloppgavene på oppgave 1

Det som er tydelig, er at det er færre ferdig oppstilte oppgaver på R1-eksamen enn på 2MX-eksamen. Dette krever en større evne til å omforme et problem til matematisk form hos elevene på R1-eksamen, men det er viktig å bemerke at andelen tekstoppgaver på den siste R1-eksamenene var lavere.

R1-elevene får noen flere hint til oppgaveløsning – enten i form av hvilken metode som skal benyttes eller ved at svaret de skal frem til er oppgitt i oppgaven.

Flere av oppgavene på 2MX-eksamen krever kreativt resonnement. Dette bidraget kommer fra alternativ II på disse oppgavene. Det er mulig å løse alle alternativ I-oppgavene ved å bruke algoritmisk resonnement.

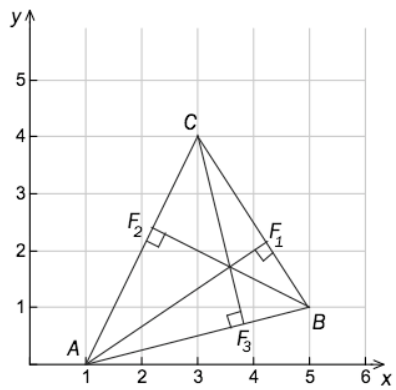
6.3 Del 1 – R1 eksamen

Det er to oppgaver på Del 1 av R1-eksamen. I tillegg til oppgave 1 som er behandlet over, har det ved de tre første eksamenene av denne typen vært en vektor/geometrioppgave.

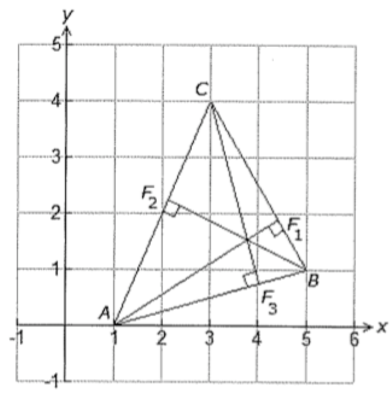
6.3.1 Oppgave 2

På den første eksamenen var det feil på tegningen som ledsaget denne oppgaven (R1, vår 2008). I teksten er trekanten det skal regnes på beskrevet i form av koordinatene til hjørnene og navn på fotpunktene til høydene. Og det står riktignok "Se skissen nedenfor". For å få glede av figuren som visuelt hjelpemiddel, er det nødvendig å lage en nøyaktig tegning med samme avstand mellom enhetene på begge aksene, men det er fullt mulig å gjennomføre en løsning uten å ha en figur. Figuren viser (A) skissen slik den skulle ha vært (og nå er på eksamenssettet som ligger på nettet) og (B) skissen slik den var til eksamen.

A



B



Figur 6-2 A: Figur slik den skulle vært, B: Figur slik den var til eksamen

R1, vår 2008: Oppgave 2a)

Vi har gitt vektorene $\vec{u} = [a,b]$ og $\vec{v} = [-b,a]$. Vis at vektorene står vinkelrett på hverandre.

Dette er en kjent oppgave fra alle bøkene og løsningen tas ikke med her, men den er vesentlig for analysen av resten av oppgaven.

Oppgave 2b)

Forklar at $l: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 4t \end{cases}$ **er en parameterframstilling for linja gjennom C og F_3.**

a) *En løsning*:

Den mest elegante løsningen er å bruke resultatet fra a). $\overrightarrow{AB} = [5-1, 1-0] = [4,1]$ og retningsvektor for linja gjennom C og F_3 blir da $\vec{r} = [-1,4]$. Punktet C og retningsvektoren gir parameterfremstillingen direkte.

b) *Tekst?* Tekstoppgave.

c) *Hint?* Det gis hint gjennom deloppgave a) og at parameterfremstillingen er gitt.

2. Lærebøkene

Hvis eleven ikke ser sammenhengen med oppgave a), er det likevel mulig å komme frem til samme parameterfremstilling gjennom å bruke andre metoder de har lært. Sinus R1 (Oldervoll et al., 2007, s. 201) har et lignende eksempel, men mer tungvint. Sigma R1 (Sandvold et al., 2007, s. 243) har også lignende eksempel, men også dette noe mer tungvint selv om metoden er ganske lik. Matematikk R1 (Heir et al., 2007, s. 48) har metoden i oppgave a) uthevet i avsnittet om ortogonale vektorer. Meningen med opplistingen av lærebokeksempler er å vise at bøkene gir kjennskap til metoder som kan brukes i løsning av oppgaven.

3. Argumentasjon og konklusjon

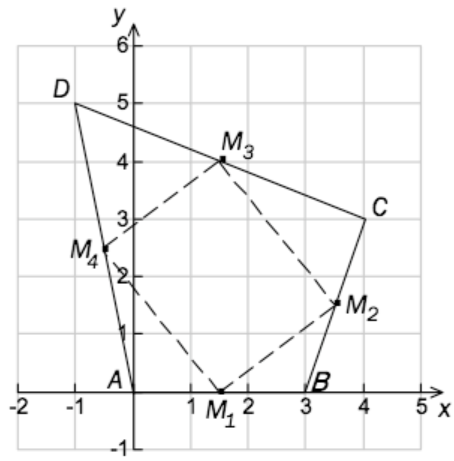
I tillegg til at figuren elevene ble presentert for var en skisse, var layouten slik at oppgave a) var skilt fra resten av delspørsmålene av figuren. Det bidro muligens til at dette hintet ikke ble oppdaget av mange elever. Med bakgrunnen i analysen av lærebøkene og hintet som gis gjennom deloppgave a), burde oppgaven være å betrakte som en oppgave som krever familiært algoritmisk resonnement. Men på grunn av omstendighetene, vil det være riktig med kreativt resonnement i dette tilfellet (KR).

I neste deloppgave skal det bestemmes en parameterframstilling for en av de andre høydene. Her er ikke fasitsvaret gitt, men dersom eleven har funnet en metode i den forrige deloppgaven som har ført fram (det vil si man har kommet fram til svaret som er oppgitt i oppgaven), kan denne være ”guide” for neste løsning. Oppgaven kategoriseres som guidet algoritmisk resonnement (GAR). Oppgave 2d) hvor skjæringspunktet mellom de to linjene skal finnes, er en oppgave av familiær type for elevene. I den siste deloppgaven skal det vises at skjæringspunktet fra d) også ligger på linja mellom B og F_2. Her pekes det ikke mot fremgangsmåte, så oppgaven vil kreve kreativt resonnement (KR).

R1 – høst 2008: Oppgave 2)

Denne gangen er figuren nøyaktig og oppgaven går ut på å studere en firkant og vise først spesielt, deretter generelt at firkanten med hjørner i midtpunktene på den opprinnelige firkantens sider er et parallellogram. Siden figuren er nøyaktig, kan fasitsvaret for midtpunktenes koordinater leses ut av figuren.

Vi skal studere en firkant som er vist på figuren nedenfor.



Hjørnene i firkanten $ABCD$ er gitt ved $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(4,3)$ og $D(-1,5)$.

a) Regn ut koordinatene til midtpunktene M_1, M_2, M_3 og M_4 i sidekantene i firkanten. Se figuren.

b) Vis at firkanten $M_1M_2M_3M_4$ er et parallellogram.

Figur 6-3 Deler av teksten til oppgave 2

I avsnitt 3.2.2 brukte jeg en oppgave fra Sinus R1 (Oldervoll et al., 2007) som eksempel på invitasjon til problemløsning hos elevene. Denne oppgaven gikk nettopp ut på å utforske denne egenskapen. Sigma R1 (Sandvold et al., 2007, s.81) har et eksempel som viser dette, og Matematikk R1 (Heir et al,. 2007, s. 26) har en oppgave hvor resultatet skal vises. Det er ikke brukt vektorer i koordinatsystem i noen av disse tilfellene, så det nye for elevene her vil være å vise det i en sammenheng med koordinater.

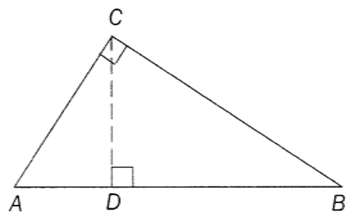
Hjørnene i en vilkårlig firkant er gitt ved $E(0,0)$, $F(a,0)$, $G(b,c)$ og $H(d,e)$. Midtpunktene i sidekantene i firkanten er N_1, N_2, N_3 og N_4.

c) Vis at firkanten $N_1N_2N_3N_4$ er et parallellogram.

Figur 6-4 Siste del av oppgaveteksten til oppgave 2

Dersom dette hadde vært en oppgave hvor elevene kun skulle regne på et generelt tilfelle, ville overføringen til koordinatsystem kreve kreativt resonnement. Men her er det først et spesielt tilfelle hvor elvene kan bruke familiær fremgangsmåte for å besvare oppgaven. I siste oppgave er det en viktig likhet mellom det spesielle og det generelle tilfellet; begge har et hjørne i origo og en side langs x-aksen. Det generelle tilfellet kan derfor i praksis løses ved å bytte ut tallene fra det spesielle med bokstavene som er oppgitt for det generelle tilfellet. De to første deloppgavene plasseres derfor i kategorien familiært algoritmisk resonnement, mens den tredje plasseres i guidet algoritmisk resonnement selv om guiden i dette tilfellet er laget av eleven selv gjennom løsningen av de to første deloppgavene.

R1 – vår 2009: Oppgave



I denne oppgaven skal du bevise Pytagoras' setning. På figuren ovenfor har vi tegnet en trekant ABC der $\angle C = 90^\circ$. Fotpunktet for høyden fra hjørnet C til siden AB kalles D.

a) Forklar at ΔABC, ΔACD og ΔCBD er formlike.

b) Bruk a) til å vise at $AC^2 = AB \cdot AD$ og at $BC^2 = AB \cdot DB$.

c) Bruk b) til å bevise Pytagoras' setning.

Figur 6-5 Illustrasjon oppgave 2 våren 2009

Matematikk R1 har et eksempel som er helt tilsvarende denne oppgaven (Heir et al, 2007, s. 273). Sinus R1 har en oppgave som er svært lik, men uten identiske betegnelser på siden i trekanten (Oldervoll et al, 2007, s. 148). I Sigma R1 (Sandvold et al, 2007) behandles ikke formlikhet og Pytagoras' setning helt på denne måten. Bøkene er ikke tilgjengelige på denne delen, så jeg anser at de to siste deloppgavene krever kreativt resonnement. Hintet som gis, gjør først og fremst at det er mulig å bruke resultatene som oppgis til å løse oppgave c selv om man ikke har klart den foregående.

6.3.2 Samlet oversikt Del 1 – R1-eksamen

De to første oppgavesettene er ganske like når det gjelder krav til løsningene. Det er én oppgave i hvert av settene som kan løses ved guidet algoritmisk resonnement hvor "guiden" lages av eleven gjennom løsning av forutgående deloppgaver. I alle tre eksamenssettene er det to deloppgaver som krever kreativt resonnement. Resten krever familiært resonnement.

R1 - Del 1	Antall deloppg.	Tekst	Hint	Konklusjon FAR	GAR	KR
vår '08	11	7	4	8	1	2
høst '08	13	11	2	10	1	2
vår '09	12	7	3	10		2

Tabell 6-5 Samlet oversikt R1 - Del 1

Alle oppgavesettene har med mange av læreplanmålene, men det er såpass stor variasjon at selv med en viss ytre likhet, er ikke denne delen av eksamen forutsigbar.

6.4 Sannsynlighet

Et viktig samtaletema for elever som skal opp til eksamen er hvor sannsynlig det er at de får oppgaver innen et gitt tema. Med begrensingen som ligger i antallet eksamensoppgaver som er vurdert i denne sammenhengen, må jeg kunne si at sannsynligheten for å få en oppgave i sannsynlighet er tilnærmet lik 1. En overfladisk betraktning av oppgavene, viser at det er store forskjeller på disse oppgavene. Og denne oppgavetypen kan også by på språklige utfordringer.

6.4.1 En utfordring til 2MX-eksamen

Våren 2007 innledes sannsynlighetsoppgaven (2MX, vår 2007) med følgende tekst;

> Begrepet *fertilitet* brukes om den evnen en kvinne og en mann har til å få barn sammen. Vi antar at hvis et fertilt par ikke bruker prevensjon, så er sannsynligheten 20% hver måned for at kvinnen skal bli gravid.
> Vi ser først på et fertilt par som planlegger å få sitt første barn.

I den første deloppgaven skal eleven forklare at sannsynligheten for at kvinnen blir gravid den tredje måneden, er $0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2$. Her gis det ikke bare løsning, men et viktig hint for videre oppgaveløsning. Og i neste deloppgave skal eleven finne sannsynligheten for at kvinnen ikke blir gravid i løpet av de første 12 månedene. Dette er oppgaver som kan løses med familiært algoritmisk resonnement (FAR) og i stor grad uten å forholde seg så mye til informasjonen i den innledende teksten. Før neste deloppgave kommer mer forklarende tekst:

> Noen par er infertile, det betyr at de ikke kan få barn sammen. Vi antar at det gjelder 10 % av alle par. I resten av oppgaven skal vi se på et vilkårlig par valgt ut tilfeldig blant både de fertile og de infertile.
> c) Vis at sannsynligheten for at kvinnen i dette paret ikke blir gravid i løpet av 12 måneder er 0,162.

Oppgaven har mange likhetstrekk med bøkenes eksempler. Likevel syns elever jeg har diskutert oppgaven med at den begynner å bli vanskelig med oppgave c) og riktig ille i de to siste deloppgavene:

> Anta at paret har forsøkt å få barn i ett år uten at kvinnen er blitt gravid.
> d) Hva er sannsynligheten for at paret er infertilt?
> e) Hvor mange måneder må de har prøvd uten at kvinnen er blitt gravid, for at det skal være 99 % sannsynlig at paret er infertilt?

Her ”lukter” det Bayes’ og det er nødvendig å definere de ulike hendelsene som skal inn i formelen $P(A \mid B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)}$

Fertil og *infertil, gravid* og *ikke gravid.* Her er det fort gjort å ende opp med tre symboler F, I og G. Det må velges mellom F og ikke-F *eller* I og ikke-I. Ender du med F og I får du problemer. Når man fyller inn i formelen, må man også forstå innholdet i teksten; at P($\overline{G} \mid \overline{F}$) betyr sannsynligheten for at kvinnen ikke blir gravid hvis paret er infertilt – og at denne er lik 1. I den siste deloppgaven er det avgjørende å forstå både Bayes’ og total sannsynlighet.

I Forhåndssensur i realfag (våren 2007) ved 2MX-eksamen heter det;

> Sensorene nevner at oppgave c, d og e har falt vanskelig for svært mange elever. Det synes som om elevene ikke har klart å lese teksten og oversette den til matematikk.

Fertilitet og infertilitet kan være ukjente begreper. Dessuten er det flere steder snakk om at paret er fertilt eller infertilt mens kvinnen blir eller ikke blir gravid. Det er helt sikkert medisinsk korrekt å si det på denne måten, men nå går også menn rundt og sier ”vi er gravide" når de skal bli fedre. Og i oppgaven blir på en måte kvinnen og paret det samme. Man må virkelig forstå hva teksten betyr for å løse oppgaven og det kan her like godt dreie som at elevene ikke har forstått innholdet i teksten – noe som er nødvendig før den kan oversettes til matematikk. Oppgaven byr nok derfor på minst like store språklige og begrepsmessige utfordringer som rent matematiske. Disse siste deloppgavene krever kreativt resonnement (KR).

Høsten 2006 var det to sannsynlighetsoppgaver til eksamen (2MX, høst 2006). Den ene var siste delspørsmål på oppgave 1 med to alternative oppgaver som krever familiært algoritmisk resonnement. I tillegg kom oppgave 3 som i motsetning til oppgaven våren 2007, hadde et kjent tema. Det dreide seg om røykende og ikke-røykende jenter og gutter på en skole. Hendelsene var klart definert i oppgaveteksten og de første to deloppgavene krever familiært algoritmisk resonnement. Siste delspørsmål ga en litt større utfordring; Av de fem elevene som er trukket tilfeldig, får man vite at akkurat 4 er gutter og skal svare på hva sannsynligheten er for at minst én av de fem røyker. For å svare på dette, måtte nok elevene ta kreativt resonnement i bruk.

6.4.2 Tre varianter sannsynlighet til R1-eksamen

Det er ikke så dramatisk forskjell på sannsynlighetsoppgavene gitt til R1-eksamen våren og høsten 2008, men høstens oppgave kan karakteriseres som vanskeligere selv om det ikke får konsekvenser for kategorien.

Våren 2008 innledes oppgaven med en detaljert beskrivelse av en ordinær kortstokk med bilder av kortene (R1, vår 2008) mens i oppgaven høsten 2008 skal man regne på en kortstokk med 30 kort – 16 svarte og 14 røde (R1, høst 2008) . Her er i hvert fall situasjonen mer familiær i det første tilfellet. I tillegg blir i dette tilfellet hendelsene definert:
A: Korthånden består av 5 spar B: Korthånden består av 5 svarte kort
R1, vår 2008, oppgave 3)

a) Hvor mange mulig korthender er det?

b) Bestem P(A) og P(B).

c) Finn P(A| B). Er hendelsene A og B uavhengige?

1. Analyse av eksamensoppgaven

a) *En løsning:*

Tallet på korthender er $\binom{52}{5} = 2598960$ (Løses ved hjelp av grafisk kalkulator; 52 nCr 5)

Antall hender som består av 5 spar er $\binom{13}{5} = 1287$ $P(A) = \frac{gunstige}{mulige} = \frac{1287}{2598960} \approx \underline{\underline{0{,}000495}}$

Antall hender med svarte kort er $\binom{26}{5} = 65780$

$P(B) = \frac{gunstige}{mulige} = \frac{65780}{2598960} \approx \underline{\underline{0{,}00253}}$

Og det siste spørsmålet; sannsynligheten for å få 5 spar når vi trekker blant de svarte kortene;

$P(\mathrm{A}|\,\mathrm{B}) = \frac{gunstige}{mulige} = \frac{1287}{65780} \approx \underline{\underline{0{,}0196}}$

Siden $P(\mathrm{A}|\,\mathrm{B}) \neq P(\mathrm{A})$ er ikke A og B uavhengige hendelser.

b) *Tekst?* Det er en tekstoppgave

c) *Hint?* Det gis ikke hint.

2. Lærebøkene

   Alle lærebøkene har aktuelle oppgaver og eksempler. Sigma R1 (Sandvold et al., 2007, s. 153) har faktisk et eksempel som langt på vei kan følges direkte.

3. Argumentasjon og konklusjon

   Siden det er mulig å finne lignende eksempler i alle lærebøkene og disse er tilgjengelige under eksamen, blir kategorien guidet algoritmisk resonnement (GAR).

Høsten 2008 innledes altså med en litt mindre familiær kortoppgave enn det som ble gitt om våren. Det er 16 svarte og 14 røde kort i kortstokken.

R1, høst 2008, oppgave 3)

a) Gunhild trekker tilfeldig ut to kort. Hva er sannsynlighetene for at de to kortene er svarte?

b) Ali trekker tilfeldig ut 10 kort. Hva er sannsynligheten for at han trekker ut 7 svarte og 3 røde kort?

1. Analyse av eksamensoppgaven

a) *En løsning*:

Definerer hendelsen A: to svarte kort og regner ut: $P(A) = \frac{16}{30} \cdot \frac{15}{29} = \frac{8}{29} \approx \underline{\underline{0,276}}$

Definerer hendelsen B: 7 svarte og 3 røde kort. Bruker formelen for hypergeometrisk sannsynlighet og regner ut: $\frac{\binom{16}{7} \cdot \binom{14}{3}}{\binom{30}{10}} \approx \underline{\underline{0,139}}$

b) *Tekst?* Det er en tekstoppgave

c) *Hint?* Det gis ikke hint.

2. Lærebøkene

Alle lærebøkene har aktuelle oppgaver og eksempler hvor likhet med oppgaven lett kan identifiseres.

3. Argumentasjon og konklusjon

Siden det er mulig å finne lignende eksempler i alle lærebøkene og disse er tilgjengelige under eksamen, blir kategorien guidet algoritmisk resonnement (GAR).

De to siste delspørsmålene høsten 2008 dreier seg om kobber- og sølvmynter laget før og etter 1940. Her ligger det en utfordring i å omforme teksten til matematisk form, men alle bøkene har oppgaver som er minst like kompliserte i så måte. Dessuten har de eksempler med så stor likhet at de kan brukes som guide, så oppgaven krever guidet algoritmisk resonnement (GAR).

Det kan se ut til at det er en utfordring å lage sannsynlighetsoppgaver som krever problemløsning særlig når alle hjelpemidler er tilgjengelig. Jeg vet ikke om det er årsaken, men våren 2009 var temaet sannsynlighet redusert til én deloppgave med to underpunkter.

R1, vår 2009, oppgave 3c)

En bedrift produserer mobiltelefoner. Avdeling A står for 70% av produksjonen, og avdeling B står for de resterende 30%. Det har vist seg at 5% av produksjonen fra avdeling A har feil, mens 10% av produksjonen fra B har feil.

1) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt telefon har feil.

2. Hva er sannsynligheten for at en telefon som har feil, er produsert i avdeling A?

To av bøkene har eksempler som er slik at eleven kan fylle direkte inn og løse oppgaven. Det er Sigma R1 (Sandvold et al., 2007, s. 23) og Matematikk R1 (Heir et al., 2007, s. 128 og s. 130). Selv om eksemplene i Sinus R1 (Oldervoll et al., 2007) ikke er så like eksamensoppgaven, er de godt egnet som guide til en løsning. Utfordringen for disse elevene kan ligge i å velge riktig metode. Konklusjonen er likevel at oppgaven krever guidet algoritmisk resonnement (GAR).

Til sammen er de tre lærebøkene med sine eksempler og oppgaver gjennom nesten alle tenkelige (og utenkelige) situasjoner det er mulig å bruke som utgangspunkt for å regne sannsynlighet. Det vil derfor være en utfordring å få testet noe annet enn evne til å velge eksempel og å fylle inn riktige tall så lenge sannsynlighet tilhører delen med hjelpemidler.

6.4.3 Sannsynlighet som forberedelsesoppgave

Til 2MX-eksamen var som nevnt en av oppgavene en forberedelsesoppgave. Våren 2006 var tema for forberedelsesoppgaven sannsynlighet (2MX, vår 2006). På forberedelsesarket er det en detaljert gjennomgang av hvordan man regner ut sannsynligheten for de ulike gevinstene i Lotto. Oppgaven som ble gitt til eksamen var en forenklet versjon – Minilotto – hvor antall tall som skulle krysses av og trekkes var redusert fra sju til fire og det var bare tallene fra 1 til 9 som var med. Antall tilleggstall var redusert fra tre til to og det var fire ulike premier.

I tillegg til at hele oppgaven kunne løses ved å fylle inn i eksempelet på forberedelsesarket og bare bytte ut tallene, var oppgave a) formulert slik: Vis at sannsynligheten for å vinne 1. premie i Minilotto er 0,00794. En elev som ikke har vært oppmerksom nok og kanskje glemt å bytte ut et tall i utgangspunktet, får da hjelp av fasiten til å komme riktig videre.

Lotto er et vanlig eksempel å bruke og det ligger et viktig aspekt i å vise hvor liten sannsynlighet det er for å vinne en av premiene i Lotto. Men slik oppgaven til eksamen er, blir sannsynligheten for en gevinst over 56%. En flink elev som har regnet riktig, vil kanskje trekke egne resultater i tvil?

6.4.4 Oppsummering sannsynlighet

Sannsynlighetsoppgavene ser ut til å kunne gi større språklige utfordringer enn andre oppgaver. Det skyldes nok at dette er en type oppgaver hvor det faktisk er mulig å hente eksempler fra det virkelige liv. Hvis det skal beskrives korrekt, som i tilfellet med fertilitet, kan det bli komplisert å trenge inn i teksten. Så fort skriftlige hjelpemidler utover formelsamling er tilgjengelig, kan det være vanskelig å lage oppgaver som ikke blir rene utfyllingsoppgaver som løses ved å bytte ut tall og bokstaver i et eksempel eller en kombinasjon av eksempler fra læreboken. Flere av formlene for sannsynlighet er med på listen over hva det er forventet at elevene skal kunne uten hjelpemidler (Vurderingsveiledningen 2009, s.18). Det er kanskje ikke utenkelig at sannsynlighet etter hvert flyttes til Del 1.

6.5 Forberedelsesoppgavene i 2MX

Til 2MX-eksamen var det som tidligere nevnt én oppgave i hvert sett som var basert på en forberedelsesdel. Sannsynlighetsoppgaven våren 2006 er behandlet i kapittelet foran. Våren 2007 bestod forberedelsen i å undersøke en egenskap ved tredjegradsfunksjoner (2MX, vår 2007):

> Dersom vi har en tredjegradsfunksjon med tre nullpunkter, vil tangenten til det punktet på grafen som har en x-verdi som ligger midt mellom to av nullpunktene, alltid skjære x-aksen i det tredje nullpunktet.

Det blir gitt en tredjegradsfunksjon som er egnet til å undersøke dette. I kommentaren etter forhåndssensur (Forhåndssensur i realfag våren 2007) heter det:

> Sensorene synes denne oppgaven var for lite utfordrende. Den fulgte bare akkurat det som stod i forberedelsesdelen, og hadde ingen progresjon.

Det stemmer med analysen jeg har gjort. Dersom en elev hadde gjort oppgaven på forberedelsesarket og tatt den med til eksamen, var det bare å kopiere fremgangsmåten direkte når eksamensoppgaven skulle løses.

Høsten 2006 bød forberedelsesoppgaven i hvert fall på én liten utfordring (2MX, høst 2006). Tema var logaritmisk derivasjon. I løsningen av de tre første deloppgavene kunne forberedelsesarket brukes som guide, mens siste deloppgave lød; Bruk logaritmisk derivasjon til å finne en formel for den deriverte av a^x der $a > 0$. Selv om fasitsvaret står i formelsamlingen, gikk den et skritt videre enn forberedelsene og krevde kreativt resonnement.

6.6 Del 2 – R1-eksamen

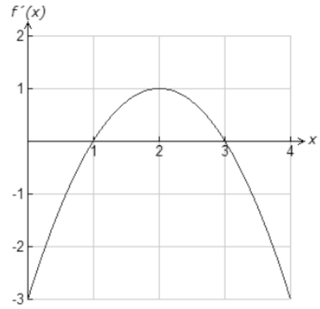
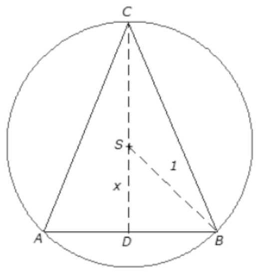
Det har vært totalt tre oppgaver på Del 2 av hvert sett av R1-eksamen. De to første hadde sannsynlighet som tema i oppgave 3 og disse er behandlet i avsnittet foran. Våren 2009 var denne oppgaven ikke ulik oppgave 1 ved at det var flere deloppgaver uten tematisk sammenheng. Strengt tatt kunne også disse oppgavene vært på Del 1. Det var tre deloppgaver hvorav den med sannsynlighet er beskrevet i avsnittet foran. Det var i tillegg en konstruksjonsoppgave hvor eleven kunne velge mellom passer og linjal eller dynamisk programvare i konstruksjonen av en trekant med innskrevet sirkel. "Oppskrift" til passer- og linjalmetoden finnes i alle bøkene. Og det var en enkelt ferdig oppstilt likning, $(\ln x)^2 + \ln x^2 = 3$, som det også finnes tilsvarende eksempler på i alle bøkene. Så akkurat som for deloppgaven i sannsynlighet, krever disse guidet algoritmisk resonnement (GAR).

6.6.1 Oppgave 4 – to sidestilte alternativer

Selv om alle hjelpemidler er tillatt på Del 2, er det en forutsetning at oppgavene skal kunne løses ved hjelp av grafisk lommeregner, slik som før (Vurderingsveiledning 2009). Denne formuleringen tolker jeg dit hen at det skal være mulig å løse R1-eksamen til karakteren 6 uten andre hjelpemidler enn grafisk kalkulator. Samtidig er det uttrykt at den ene varianten på oppgaven med to alternativer skulle være for de med god kompetanse i IKT-bruk i matematikk (Grythe, 2009, s.45). Alternativene er sidestilt i den forstand at de er likeverdige ved vurderingen (R1 vår 2008, R1 høst 2008, R1 vår 2009). Ved de to første eksamenene stod det ingen ting om anbefalt verktøy i eksamenssettene. Våren 2009 er det tatt inn en setning i forbindelse med oppgave 4, alternativ II: "I deler av denne oppgaven er det en fordel å bruke digitalt verktøy." (R1, vår 2009)

Jeg har først løst begge alternativene for eksamen vår og høst 2008 med kun grafisk kalkulator og sammenligner hvilke resonnementer som kreves i oppgaveløsningen.

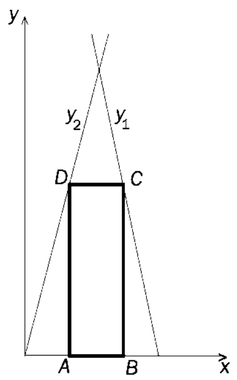
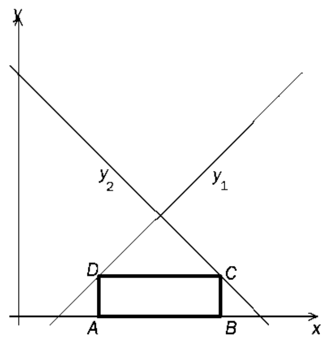
R1, vår 2008, Oppgave 4:

Alternativ I	**Alternativ II**
I denne oppgaven skal du drøfte en polynomfunksjon *f* av tredje grad. På figuren har vi tegnet grafen til den *deriverte* av funksjonen.  a) Bruk grafen til *f'* til å avgjøre hvor funksjonen *f* vokser og hvor den avtar. b) Bruken grafen til *f'* til å finne førstekoordinaten til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til *f*. c) Bruk grafen til *f'* til å finne et funksjonsuttrykk for *f'*. d) Grafen til *f* går gjennom origo. Forklar at $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$ Tegn grafen til *f* når $x \in \langle 0,4 \rangle$	Figuren nedenfor viser en likebeint trekant *ABC* innskrevet i en sirkel med sentrum S og radius 1. Linjestykket *CD* er en høyde i trekanten. Vi setter *SD* = x.  a) Forklar at arealet F av trekanten ABC er gitt ved $F(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$ b) Tegn grafen til F. Bruk grafen til å finne det største arealet av trekanten *ABC.* c) Vis at $x = \frac{1}{2}$ er en løsning av likningen *F'*(*x*) = 0. Kommenter svaret. d) Regn ut lengden av sidene i trekanten *ABC* når $x = \frac{1}{2}$. Kommenter svaret.

Jeg har vurdert det slik at for alternativ I, krever oppgave a) og b) algoritmisk resonnement, mens oppgave c) og d) krever kreativt resonnement. Selv om det å drøfte en funksjon på bakgrunn av grafen til den deriverte ikke er familiært sett i forhold til bøkene, er funksjonsdrøfting så sentralt og står så inngående beskrevet i bøkene at det er mulig å bruke bøkene som guide til løsningene av disse deloppgavene likevel. Det er det at bøkene er tilgjengelig som gir disse oppgavene en annen kategorisering enn R1, høst 2008, oppgave 1e) som hadde visse likhetstrekk.

Selv om fasiten til oppgave c) er gitt gjennom deloppgave d), har jeg vurdert at begge de to siste deloppgavene krever kreativitet i kombinasjon av kunnskap for å komme frem til en løsning. Alternativ II er til dels regneteknisk krevende uten mer avanserte digitale hjelpemidler enn kalkulator. I denne oppgaven har jeg vurdert det slik at deloppgave a) og d) krever kreativt resonnement mens oppgave b) og c) krever algoritmisk resonnement.

R1, høst 2008, Oppgave 4 hadde to alternativer som lignet mer på hverandre.

<table>
<tr>
<th>Alternativ I</th>
<th>Alternativ II</th>
</tr>
<tr>
<td>Firkanten ABCD er et rektangel. Hjørnene A og B ligger på den positive førsteaksen. Hjørnet C ligger på linja $y_1 = -5x + 6$. Hjørnet D ligger på linja $y_2 = 4x$. Se figuren.
Vi vil undersøke hvor stort arealet av rektangelet kan bli.

</td>
<td>Firkanten ABCD er et rektangel. Hjørnene A og B ligger på den positive førsteaksen. Hjørnet C ligger på linja $y_2 = -x + 6$. Hjørnet D ligger på linja $y_1 = x - 1$. Se figuren.
Vi vil undersøke hvor stort arealet av rektangelet kan bli.

</td>
</tr>
<tr>
<td>a) Sett førstekoordinaten til punktet A lik u. Forklar at D(u,4u), og at andrekoordinaten til C er 4u.
b) Sett førstekoordinaten til C lik x. Forklar at $x = \frac{6-4u}{5}$
c) Vis at arealet av rektangelet er gitt ved $F(u) = -\frac{36}{5}u^2 + \frac{24}{5}u$
d) Finn ved regning hvor stort arealet av rektangelet ABCD kan bli.</td>
<td>Vi ser først på tilfellet A(2,0)
a) Vis at da er D(2,1) og C(5,1).
b) Vis at arealet av rektangelet er lik 3.
Sett førstekoordinaten til punktet A lik x. Arealet av rektangelet er da F(x).

c) Skriv av tabellen i besvarelsen din. Fyll ut tabellen.
<table><tr><td>X</td><td>1,5</td><td>2,0</td><td>2,5</td><td>3,0</td></tr><tr><td>F(x)</td><td></td><td>3,0</td><td></td><td></td></tr></table>d) Arealet er en funksjon på formen $F(x) = ax^2+bx+c$. Bestem konstantene a, b og c. Finn det største arealet til rektangelet og den tilhørende verdien av x. Bestem koordinatene til alle hjørnene for den x-verdien som gir størst areal.</td>
</tr>
</table>

Også noen elever som ikke behersker eller ikke har mer avanserte digitale verktøy, kan komme til å velge alternativ II på denne oppgaven fordi regning med tall kan oppfattes som enklere enn manipulering av bokstavuttrykk. Mange vil nok klare å besvare de to første delspørsmålene på alternativ II selv om de ikke klarer å fullføre oppgaven. Disse oppgavene kan løses ved algoritmisk resonnement. De siste to deloppgavene vurderer jeg til å trenge kreativt resonnement. På grunn av bokstavregningen i alternativ I, vil jeg si at denne oppgaven krever noe mer kreativitet og plassere tre av fire deloppgaver i kategorien for kreativt resonnement.

Dette er det eneste tilfellet hvor de to alternativene på oppgave 4 ikke får samme kategorisering.

Våren 2009 var oppgave 4, begge alternativer, rene tekstoppgaver uten noen illustrasjoner. Tema for begge er funksjonsdrøfting, og i tillegg til at det er presisert i oppgaveteksten, er det tydelig at det nå er en klarere fordel med mer avanserte hjelpemidler enn kalkulator i løsningen av alternativ II.

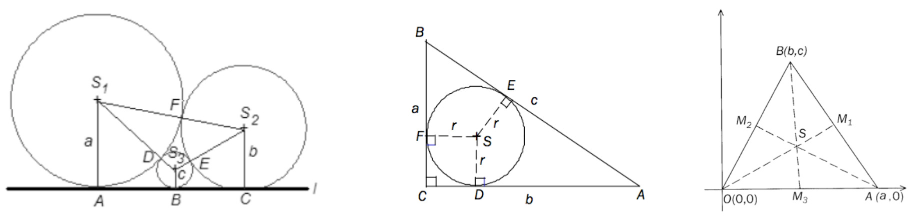
Alternativ I	**Alternativ II**
Funksjonen f er gitt ved $f(x) = -x^3+ax^2+bx-11$ Grafen til f har et bunnpunkt i (-1,-16) a) Vis at a = 3 og b = 9 b) Finn f'(x), og bruk denne til å tegne fortegnslinja for f'(x). Bruk fortegnslinja til å finne ut hvor grafen stiger og hvor den synker. Hva blir koordinatene til eventuelle toppunkter på grafen til f? c) Finn f''(x), og bruk denne til å tegne fortegnslinja for f''(x). Bruk fortegnslinja til å finne eventuelle vendepunkter på grafen til f. d) Finn likningen for tangenten med stigningstall 9. e) Tegn grafen til f. Bruk grafen og resultatene i d) til å avgjøre for hvilke verdier av b likningen f(x) = 9x + b har tre forskjellige løsninger.	Funksjonen f er gitt ved $f(x) = (1/12)(x^4-2x^3-12x^2)$. La S og T være de to vendepunktene med S lengst til venstre på grafen. a) Tegn grafen til f. b) Finn f''(x) og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S og T. c) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S og T. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til f og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy. d) Vi lar Q være skjæringspunktet til høyre. Regn ut ST/TQ. En annen fjerdegradsfunksjon er gitt ved $g(x) = x^4-6x^2$. La S_1 og T_1 være de to vendepunktene med S_1 lengst til venstre på grafen. e) Denne oppgaven går ut på å gjennomføre punkt a – d for g(x) og kommentere resultatet til slutt.

For alternativ I vurderer jeg at deloppgave b, c og d tilhører det grunnleggende alle elevene har gjennomgått uavhengig av lærebok. Deloppgave a og e krever derimot bruk av kunnskapen i ny situasjon og uten at løsningen kan kopieres direkte fra noen av bøkene. Disse to deloppgavene anses derfor å kreve kreativt resonnement. Selv om den første deloppgaven krever kreativt resonnement, stopper ikke løsningen opp for de som ikke mestrer det siden løsningen er gitt og denne kan brukes videre i løsningen av deloppgavene som kommer etterpå.

På alternativ II vurderer jeg at oppgave a, b og c krever algoritmisk resonnement mens oppgave d og siste del av oppgave e krever kreativt resonnement. Det er særlig denne oppgavetypen hvor man skal gjennomføre tilsvarende operasjoner på flere ulike funksjoner at mer avansert programvare enn grafisk kalkulator kommer til sin rett. (Selv om det også i dette tilfellet er mulig å komme i mål med grafisk kalkulator på alternativ II.)

6.6.2 Kreativitet på oppgave 5

I stedet for å vise en detaljert gjennomgang av deloppgavene på oppgave 5 i de ulike eksamenssettene, peker jeg på noen av likhetene mellom oppgavene litt mer overfladisk. Oppgavene tar utgangspunkt i geometriske figurer (se faksimilene under). Og det er knapt et tall involvert før de aller siste deloppgavene.



Figur 6-6 Illustrasjon til oppgave 5, R1 vår 2008, høst 2008 og vår 2009.

En detaljert oppgaveanalyse gir som resultat at kreativt resonnement er nødvendig i tre av seks deloppgaver ved R1, vår 2008 og ved R1, vår 2009.

Til R1, høst 2008 var det mulig å følge boka som guide i to av fem deloppgaver, to deloppgaver må kunne anses å kunne løses med algoritmisk resonnement og det var først konstruksjonen i siste deloppgave som kunne kreve kreativt resonnement.

Ved disse oppgavene er det litt forskjellig hvor god hjelp elevene kan ha av lærebøkene, men det er ingen av bøkene som gir mulighet til å bare fylle nye tall inn i eksemplene.

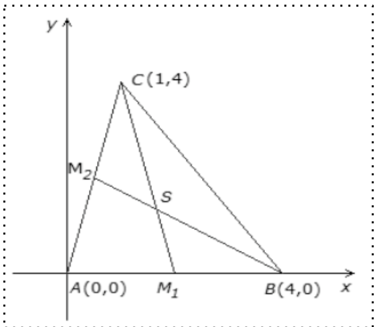
6.6.3 Oppsummering Del 2 R1-eksamen

Selv med ganske store ytre likheter mellom oppgavesettene, kan de ikke sies å være forutsigbare i den forstand at elevene kan være sikker på akkurat hvilke læreplanmål de blir prøvet i. Men dersom oppgave 5 fortsetter å være en oppgave som tar utgangspunkt i en geometrisk figur, vil nok elevene bruke en del tid til trening i å se sammenhenger i slike figurer og å løse oppgaver rundt dem.

6.7 Flere kreative 2MX-oppgaver

Ikke alle oppgavene er trukket frem i teksten, men alle oppgavene er analysert. De oppgavene som er kategorisert med kreativt resonnement, men ikke behandlet tidligere, omtales i det følgende uten å gjengi den fullstendige analysen. Dette gjelder ingen oppgaver fra R1-eksamen, men noen få oppgaver i hvert sett av 2MX.

Våren 2006 ble totalt fire oppgaver klassifisert under kreativt resonnement. Kun den fra oppgave 1 er behandlet tidligere i teksten. *Oppgave 2 (2MX, vår 2006)* var ledsaget av en figur og siste delspørsmål i denne oppgaven var: M_3 er midtpunktet på *BC*. Undersøk om AM_3 går gjennom punktet *S*. Med samme begrunnelse som for siste deloppgave på oppgave 2 på R1, vår 2008, krever denne oppgaven kreativt resonnement. (Se avsnitt 6.3.1.)



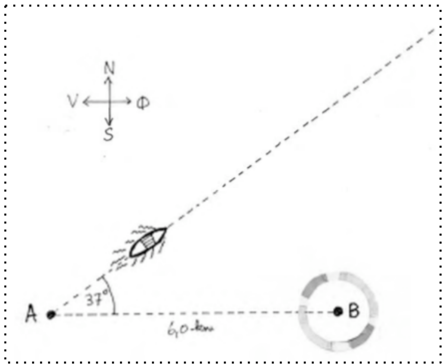
Figur 6-7 Illustrasjon til oppgave 2

I *oppgave 4, 2MX, vår 2006,* er det en båts fart og bevegelse som studeres nærmere. Båten bruker 25 minutter fra den er 5,0 km fra fyret første gang, til den er 5,0 km fra fyret andre gang.

c) Hva er båtens fart målt i km/h?

En annen båt starter også i A. Den holder nordøstlig kurs som danner vinkelen v med linjen gjennom A og B.

d) Hvor stor må vinkelen være for at båten skal være 7,0 km fra fyret når den har kjørt 10,0 km?



Figur 6-8 Illustrasjon oppgave 4

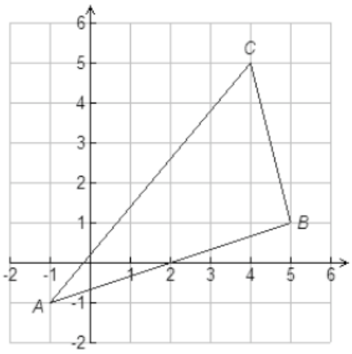
Etter å ha løst oppgaven og gjennomgått eksempler og oppgaver i bøkene, har jeg vurdert at dette er deloppgaver som krever kreativt resonnement fordi de krever kombinasjon av algoritmer og valg av løsningsstrategi utover å etterligne lignende løsninger fra boka.

Høsten 2006 ble åtte oppgaver vurdert til å kreve kreativt resonnement. Fire av disse er omtalt tidligere. De øvrige beskrives i det følgende.
2MX, høst 2006, Oppgave 2. I denne oppgaven gis tre vektorer ved sine koordinater. Først følger to delspørsmål som krever familiært resonnement. De to siste delspørsmålene er:
c) Finn ved regning to tall k og t, slik at $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$.
d) Gi en geometrisk forklaring på det du fant i c)
Bøkene behandler vektorligninger litt ulikt, så jeg har vurdert at kreativt resonnement er nødvendig for å løse disse oppgavene.

2MX, høst 2006, Oppgave 4. Dette er en regresjonsoppgave med tabell som gir sammenheng mellom pris x i kroner og antall solgte enheter $f(x)$. De innledende punktene er familiære, mens de to siste delspørsmålene er:
d) Bruk logaritmisk skala til å gi en begrunnelse for at potensfunksjonen er en god modell for dataene i tabellen.
e) Bruk potensfunksjonen fra b) til å finne den prosentvise nedgangen i antall solgte enheter når prisen x øker med 10 %.

Her gis det ingen hint, så i enda større grad enn regresjonsoppgaven gitt som en del av oppgave 1 våren 2007 (se avsnitt 6.2.1) krever deloppgave d) her kreativt resonnement. Det siste spørsmålet krever forståelse av det man har funnet ut så langt, og kreativitet i å finne hvilken algoritme som kan brukes til å løse problemet.

Til slutt er det to av de seks kreative oppgavene fra våren 2007 som ikke har vært omtalt.



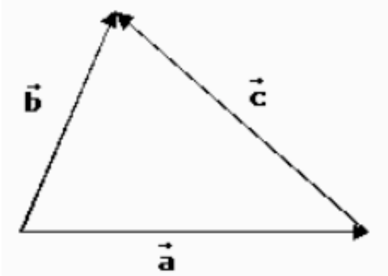
2MX, vår 2007, Oppgave 2.
Etter å ha funnet parameterfremstilling for linjen gjennom (0,4) som er parallell med AC, er siste deloppgave å finne koordinatene til et punkt D på denne linjen slik at $\angle ADC = 90°$. Dette krever kreativt resonnement.

Figur 6-9 Illustrasjon til oppgave 2, 2MX, vår 2007

2MX, vår 2006: Oppgave 4

Denne oppgaven ble omtalt i Forhåndssensur i realfag (våren 2007).

> Sensorene nevner at oppgave b har falt svært vanskelig for elevene. De er tydeligvis ikke lenger vant til denne typen vektorregning uten koordinater.



Vi har gitt trekanten på figuren ovenfor.

a) Finn $\vec{c}$ uttrykt ved $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Regn ut $\vec{c}^{\,2}$, og bruk definisjonen av skalarproduktet til å utlede cosinussetningen.

c) Finn vinklene i en trekant der lengdene av de tre sidene er 7, 9 og 11.

Figur 6-10 Faksimile av oppgave 4, 2MX, vår 2007

Det stemmer med min gjennomgang av bøkene og oppgave b) er derfor i kategorien som krever kreativt resonnement. Siden cosinussetningen står i formelsamlingen og har vært mye brukt i eksempler og oppgaver, krever oppgave c) algoritmisk resonnement.

7. Algoritmer kontra kreativitet – tallenes tale

Et viktig grunnlag for den avsluttende drøftingen er tallfestingen av de funnene som er gjort gjennom den kvalitative analysen. I dette avsnittet henter jeg ut tallmaterialet etter oppgaveanalysen for å kunne svare på forskningsspørsmålene.

> *Hvor stor del av eksamensoppgavene i matematikk 2MX og matematikk R1 krever evne til problemløsning og hvor stor del krever algoritmebruk?*
> *Har det skjedd endring i fordelingen med overgangen til ny eksamensform?*

7.1 2MX og R1 hver for seg

Det er litt variasjon i antall deloppgaver fra det ene eksamenssettet til det andre. Derfor er observasjonene regnet om til prosent for hvert enkelt eksamenssett. Når flere eksamenssett er samlet for å sammenligne eksamenssettene for de to kursene, er det også her regnet prosent av antall deloppgaver.

7.1.1 Eksamen i 2MX

Slik er forholdet mellom de tre resonnementstypene, familiært og guidet algoritmisk resonnement og kreativt resonnement for 2MX-eksamenene. Her har jeg tatt med alle deloppgavene – det vil si både alternativ I og alternativ II på oppgave 1.

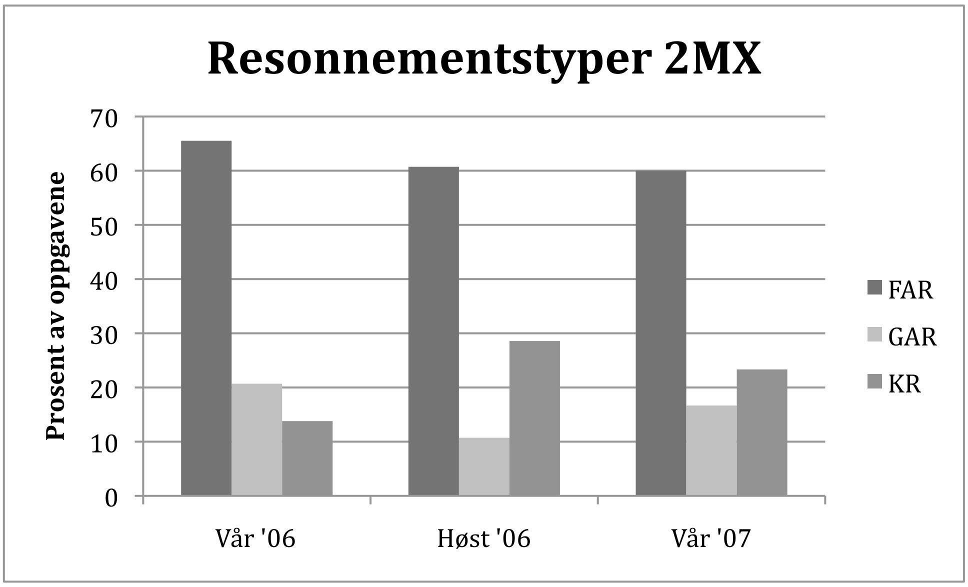


Diagram 7-1 Forholdet mellom resonnementstyper 2MX – alle deloppgaver

Det er noe variasjon i fordelingen fra år til år. Hvis krav til kreativt resonnement sier noe om hvor vanskelig eksamen er, vil våren 2006 fremstå som den enkleste og høsten samme år som den vanskeligste. Elevene skal ikke løse alle deloppgavene. Til 2MX-eksamen var det mer og mindre krevende alternativer elevene kunne velge mellom på fem til seks deloppgaver på den første oppgaven. Det totale oppgavesettet våren 2006 bestod av 29 deloppgaver, men hver elev skulle besvare 23 av dem. En ”vanskelig” versjon av 2MX-eksamen vil man få ved bare å velge alternativ II-oppgaver på oppgave 1, mens det tilsvarende vil bli en ”lett” versjon ved bare å velge alternativ I-oppgaver.

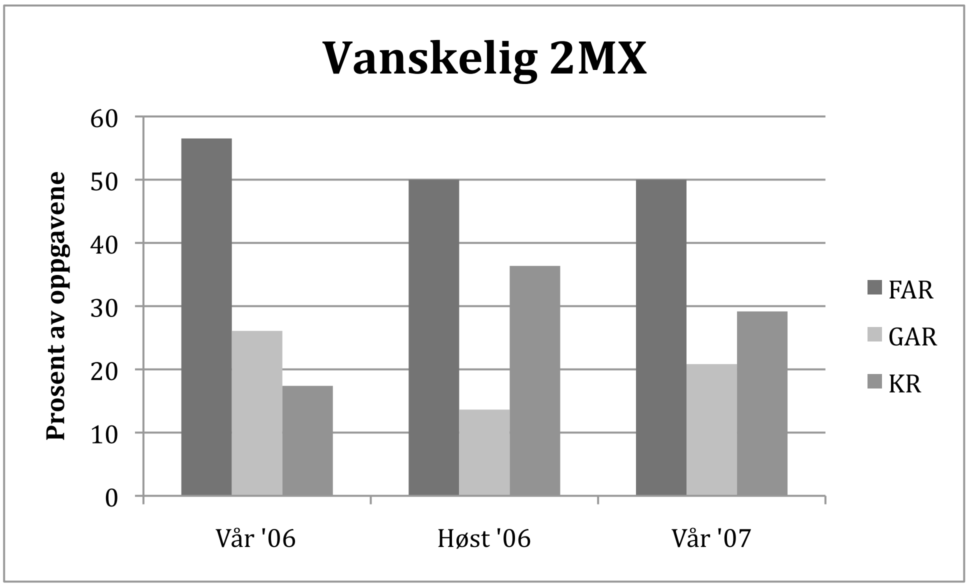


Diagram 7-2 Forholdet mellom resonnementstyper for "vanskelig" 2MX

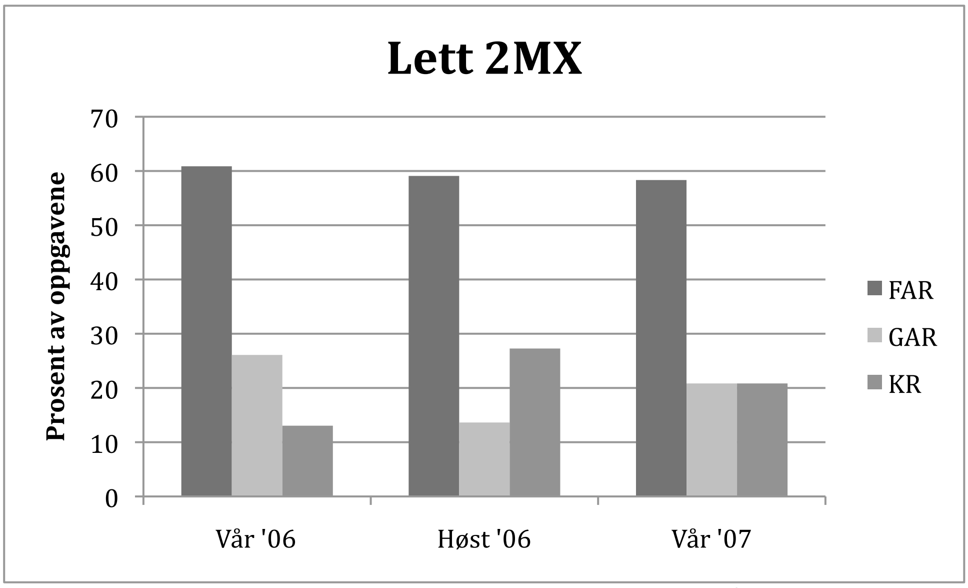


Diagram 7-3 Forholdet mellom resonnementstyper for "lett" 2MX

Det er litt større krav til kreativt resonnement i den vanskeligste versjonen av 2MX når en samler alle de tre eksamenssettene.

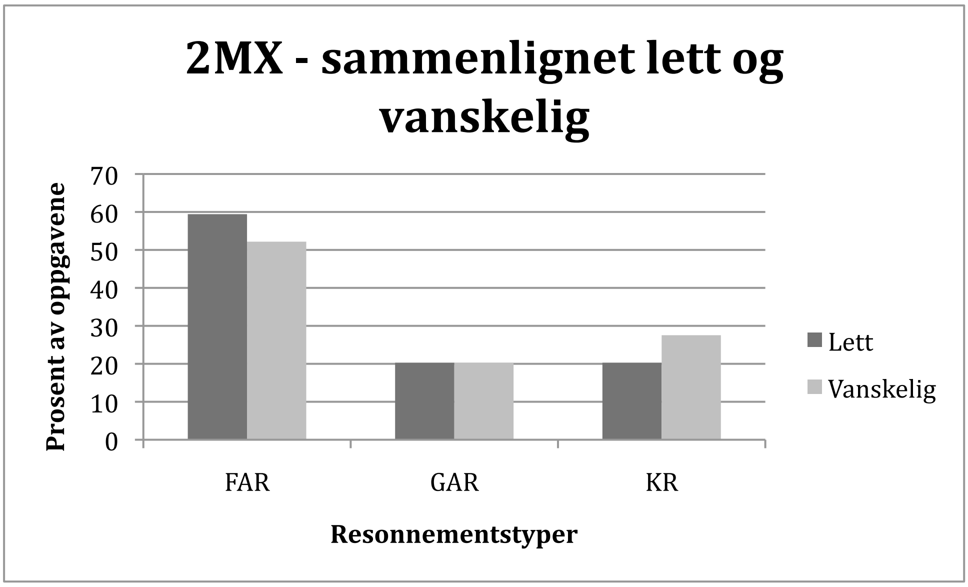


Diagram 7-4 Forholdet mellom resonnementstyper - lett og vanskelig 2MX

Hvor stor del av eksamensoppgavene i matematikk 2MX krever evne til problemløsning og hvor stor del krever algoritmebruk? En elev som valgte de enkleste alternativene på alle oppgavene våren 2006, trengte kreativt resonnement på 13 % av oppgavene. En elev som var oppe til eksamen høsten 2006 og valgte de vanskeligste alternativene på alle oppgavene høsten 2006, trengte kreativt resonnement på 36 % av oppgavene. Det gir variasjonsbredde på 13 prosentpoeng når vi sammenligner de to versjonene på alle tre eksamenssettene.

Gjennomsnittet for den vanskelige versjonen i de tre settene kontra den lette versjonen i de tre settene er illustrert i diagram 7-4. Dette viser at i gjennomsnitt krever 27,5 % av oppgavene kreativt resonnement på den vanskeligste versjonen og at tilsvarende gjennomsnitt er 20 % på den letteste versjonen.

7.1.2 Eksamen i R1

På R1-eksamen var det to sidestilte, alternative oppgaver å velge mellom på oppgave 4. For R1-eksamen med alle deloppgavene (det vil si at de to alternativene på oppgave 4 er med) blir bildet slik som vist i diagram 7-5. Det kan se ut som om den første R1-eksamen var den vanskeligste hvis andel oppgaver som krever kreativt resonnement legges til grunn.

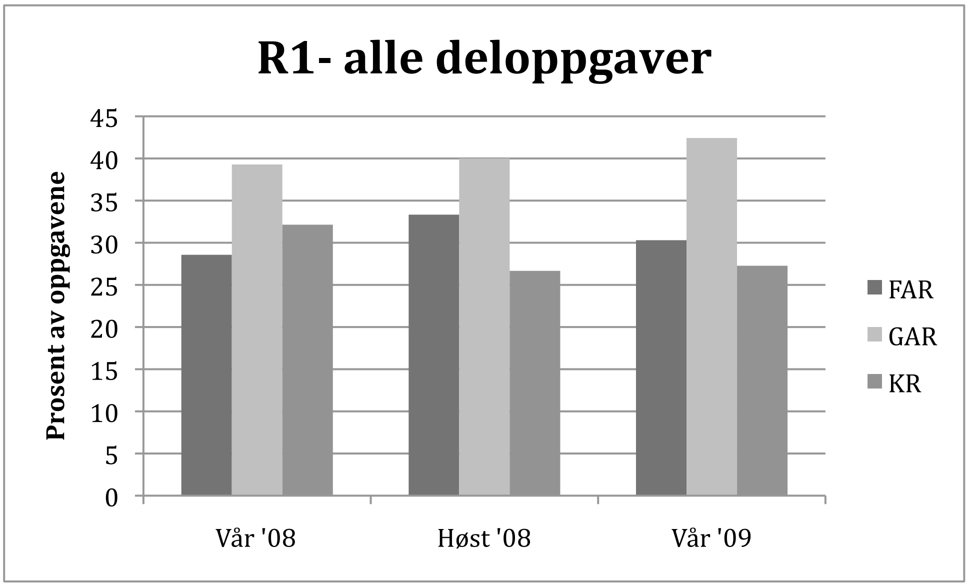


Diagram 7-5 Forholdet mellom resonnementstyper R1 - alle deloppgaver

Det var for eksempel 28 deloppgaver totalt på eksamenssettet våren 2008, men eleven skulle besvare 24 deloppgaver. Bildet blir derfor riktigere ved bare å ta med et av alternativene på oppgave 4 (diagram 7-6). I min analyse har R1-eksamenen høsten 2008 kommet ut med ulikt krav til problemløsning. Det skiller på én deloppgave på oppgave 4 og jeg har brukt gjennomsnittet i den videre sammenligningen. For de to andre eksamenssettene er det ingen forskjell mellom de to alternativene.

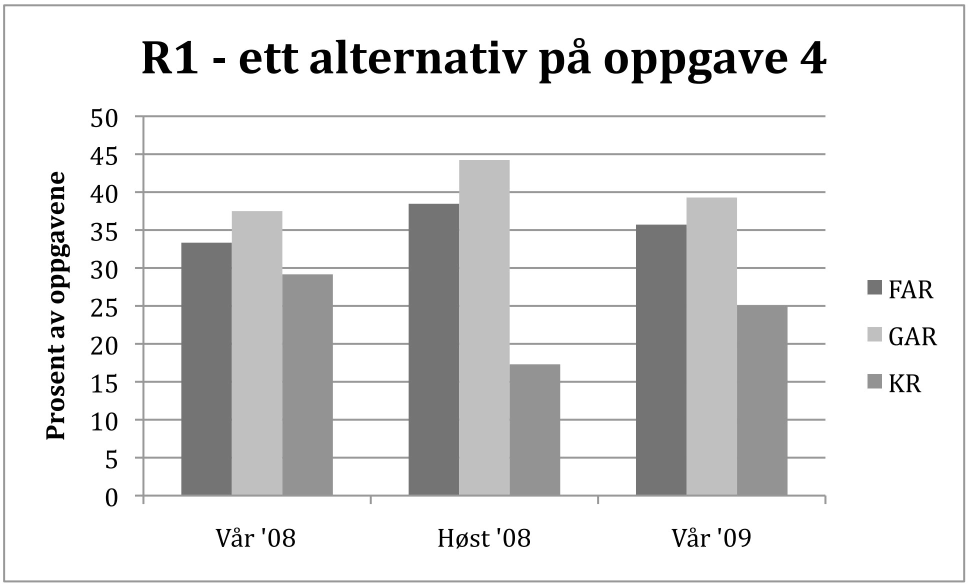


Diagram 7-6 Forholdet mellom resonnementstyper, ett alternativ på oppg.4

Krav til kreativt resonnement i oppgavesettene varierer fra 29 % våren 2008 til 17 % høsten 2008. Våren 2009 ligger andelen i mellom, på 25 %. Det gir en variasjonsbredde på 12 prosentpoeng og et gjennomsnitt på 24 %.

For R1-eksamen er det også interessant å se på fordelingen innen hver av de to delene. På Del 1 er det overveiende oppgaver som krever algoritmisk resonnement. Det er ikke unaturlig når det på denne delen er uttalt at det er ferdigheter og grunnleggende matematikkforståelse som prøves (Vurderingsveiledning 2009). Siden ingen hjelpemidler er tillatt utover skrivesaker, er andelen guidet algoritmisk resonnement et resultat av "guide" elevene lager selv gjennom løsning av innledende deloppgaver. Det er i den litt større og mer sammenhengende oppgaven på Del 1 at det på noen oppgaver vil være behov for kreativt resonnement.

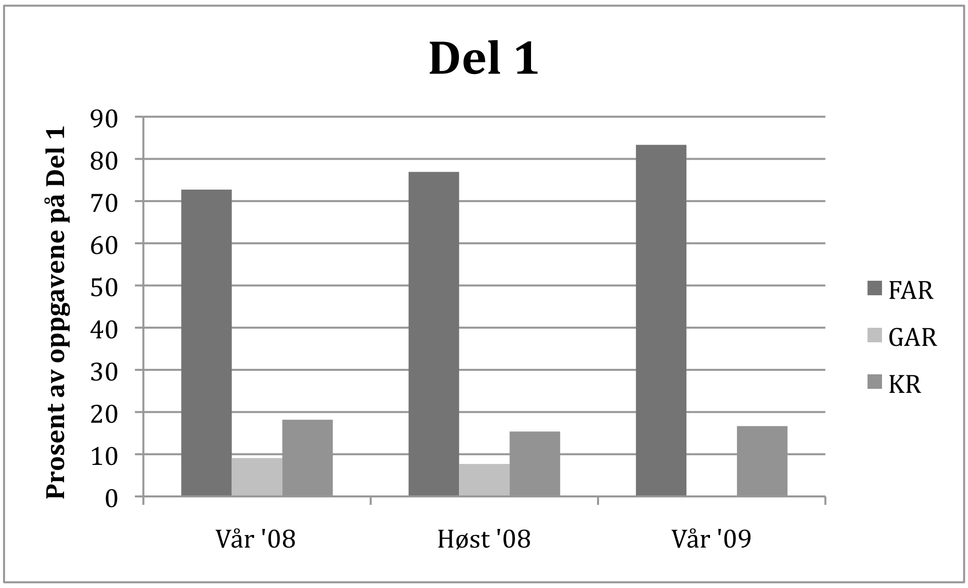


Diagram 7-7 R1, Del 1

Det er liten variasjon i hvor stor del som krever kreativt resonnement på Del 1 av oppgavesettene. Den variasjonen som er for oppgavesettene som helhet, skyldes i hovedsak ulikheter på Del 2. Siden alle skriftlige hjelpemidler er tilgjengelig, vil de familiære oppgavene finnes igjen i bøkene og kan derfor løses med guidet algoritmisk resonnement. Kategorien FAR er dermed ikke i bruk.

På Del 2 varierer kravet til kreativt resonnement mellom 27 % og 38 % som er 11 prosentpoeng og det største bidraget til utslagene for R1-eksamen som helhet.

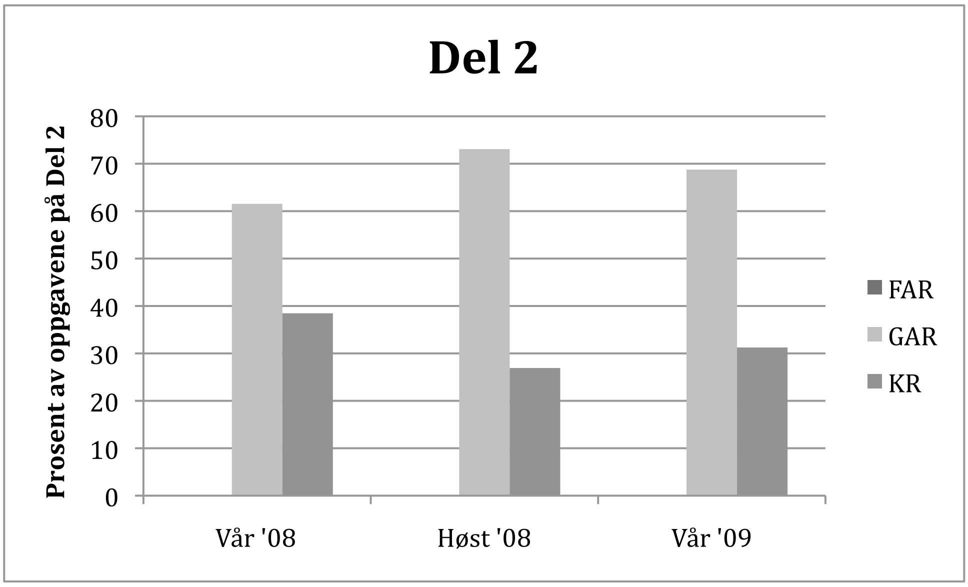


Diagram 7-8 R1, Del 2

7.2 Sammenligning 2MX – R1

Har det skjedd en endring i fordelingen av oppgaver som krever evne til problemløsning og oppgaver som krever algoritmebruk ved overgangen til ny eksamensform? Endringene som er gjort med å ta bort muligheten for å velge alternativer med ulik vanskelighetsgrad og å innføre valg mellom to sidestilte alternativer i overgangen fra 2MX til R1, gjør at det må legges inn noen forutsetninger før sammenligningen av eksamenene.

Jeg har tatt et gjennomsnitt av vanskelig og lett 2MX for hvert av de tre eksamenssettene. Det har jeg gjort fordi det i Vurderingsveiledningen (2009, s.3) heter at:

> Begge delene av prøven skal utformes slik at de kan løses på ulike nivå, dvs. at alle elever skal utfordres til å vise hva de kan.

Når det ikke lenger er mulig å velge vanskelighetsgrad, må det forutsettes at de ulike nivåene er representert gjennom oppgavene og at det da blir mest riktig å sammenligne med gjennomsnittet for 2MX. Disse sammenligner jeg med R1-eksamenssett hvor det antall deloppgaver som skal besvares er med (det vil si at det bare er det ene alternativet på oppgave 4 som er med, men her er det ikke ulik vanskelighetsgrad). For det ene tilfellet av ulik kategorisering, har jeg regnet et gjennomsnitt.

Forhold mellom resonnementstyper i oppgavesettene

Det er en klar økning i antallet oppgaver som krever guidet algoritmisk resonnement fra 2MX til R1. Det skyldes ikke endringer i oppgavene, men at bøkene er tilgjengelig på Del 2 av R1-eksamen og at det da er mulig å bruke eksempler derfra som guide i løsningen av oppgavene. Dette er den mest markante endringen fra 2MX til R1.

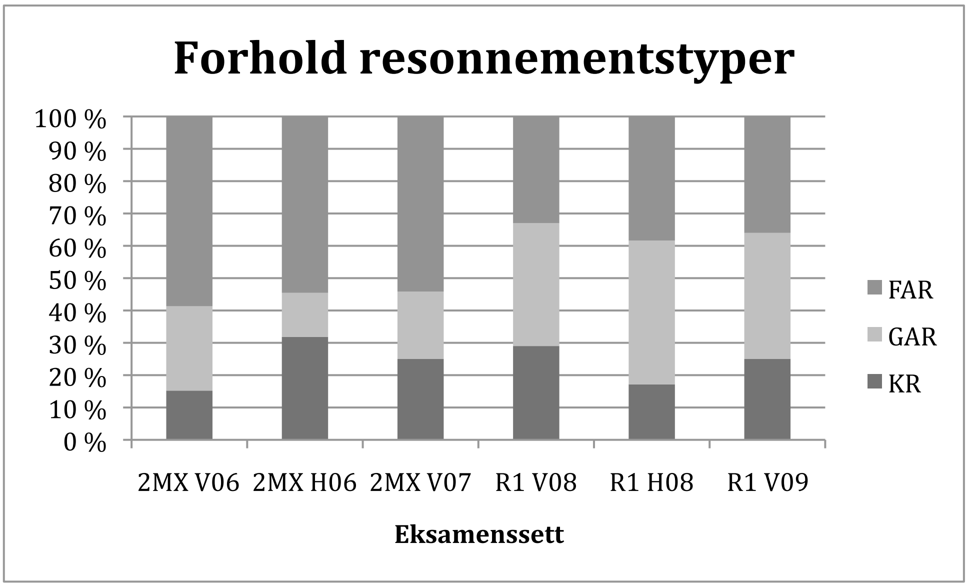


Diagram 7-9 Variasjon i resonnementstyper mellom oppgavesettene

For å begrense sammenligningen til krav til kreativt og algoritmisk resonnement, har jeg samlet familiært og guidet algoritmisk resonnement i én kategori i diagrammet under.

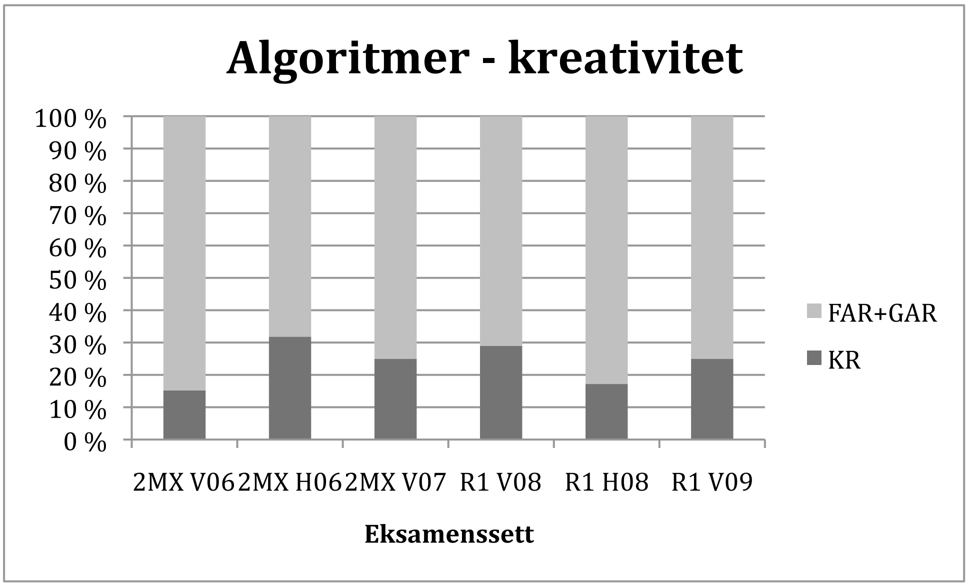


Diagram 7-10 Algoritmiske resonnementstyper samlet i én kategori

Denne sammenligningen viser ganske stor variasjon mellom oppgavesettene. Variasjonsbredden for 2MX er 17 prosentpoeng mens den er 12 prosentpoeng for R1.

Gjennomsnittet for *alle* oppgavesettene under ett, er at 24 % av oppgavene krever kreativt resonnement. Og det samme resultatet får vi for 2MX og R1 hver for seg.

Arbeidsmengde

Det kunne tenkes at vanskelighetsgrad i betydningen krav til kreativt resonnement var omvendt proporsjonal med antall oppgaver som skal løses. For 2MX-eksamen høsten 2006 kan dette se ut til å ha vært tilfelle i en viss grad fordi det er 22 oppgaver i stedet for 23 eller 24 som det var på henholdsvis settet før og settet etter. Men det er ellers ingen slik sammenheng å se for øvrige oppgavesett.

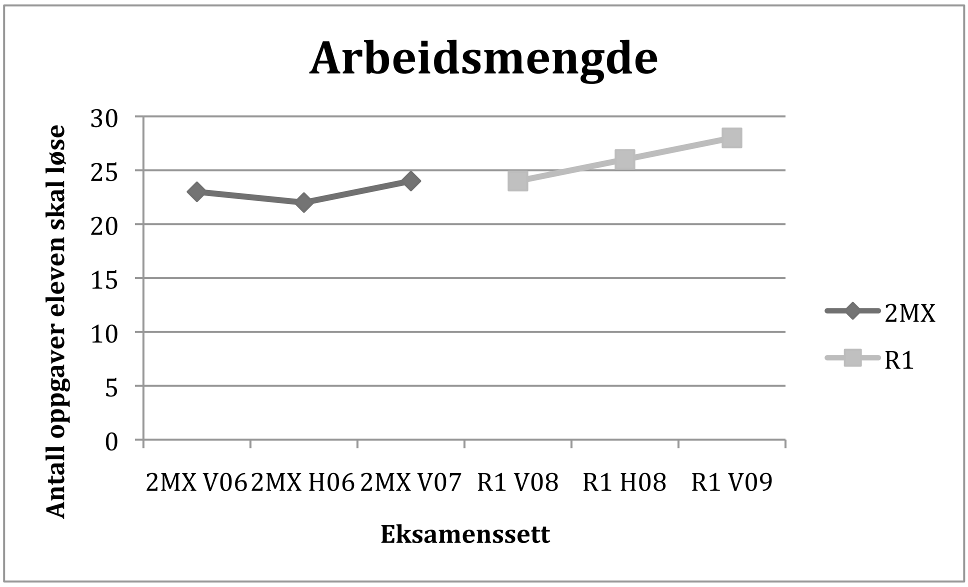


Diagram 7-11 Antall deloppgaver eleven skal løse

Det ser ut til arbeidsmengden er økende. Kommentarene fra sensorene tyder på at arbeidsmengden har vært i største laget (Sensorveiledning etter forhåndssensur våren 2009, s. 4) ved eksamen våren 2009.

Det bør tas i betraktning at da elevene skulle velge mellom alternative deloppgaver på oppgave 1 slik det var til 2MX-eksamen, brukte de kanskje litt tid på å prøve de to alternativene og å gjøre valget. Et tilsvarende valg må elevene gjøre på oppgave 4 på R1-eksamen, men det er muligens mindre tidkrevende fordi det er snakk om ett valg og ikke flere. Samtidig er oppgaven mer omfattende enn de enkeltspørsmålene der det var valg til 2MX-eksamen.

Å øke arbeidsmengden når alle hjelpemidler er tillatt, kan også være en måte å øke kravene til elevenes kunnskap. Med stor arbeidsmengde, blir det begrenset tid til å lete etter hjelp i bøker eller egne notater. Datagrunnlaget jeg har, gir ikke mulighet til noen videre analyse av spørsmålet om arbeidsmengde ut over å tallfeste økningen i antall deloppgaver som skal løses.

Forholdet mellom gjennomsnitt for 2MX og R1

I diagrammet under har jeg sammenlignet gjennomsnittet for de tre eksamenssettene til hvert kurs med alle resonnementstypene hver for seg.

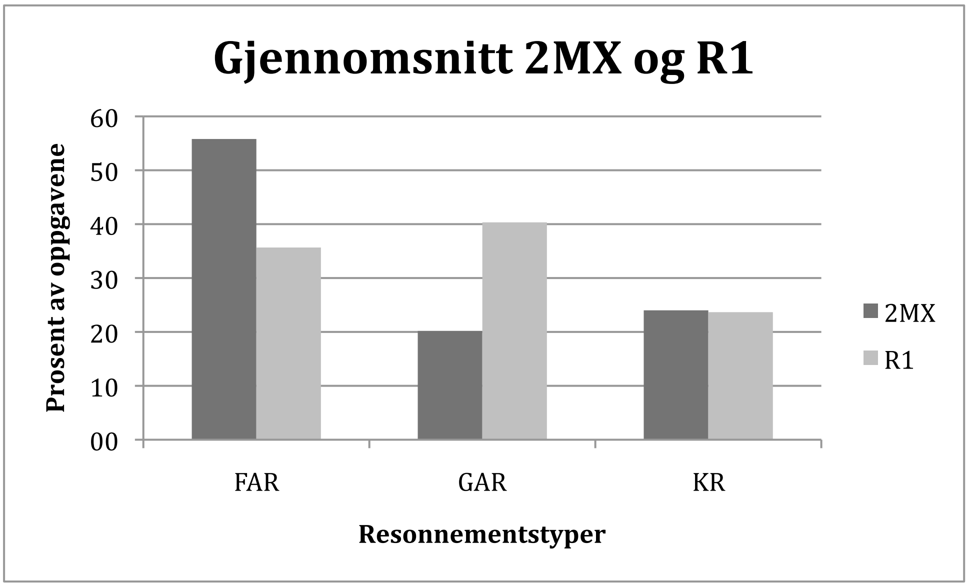


Diagram 7-12 Sammenligning resonnementstyper i 2MX og R1

På grunnlag av dette diagrammet ville svaret på forskningsspørsmålene være at omtrent en fjerdedel av eksamensoppgavene krever kreativt resonnement og dette har ikke endret seg fra 2MX til R1. Denne konklusjonene må trekkes med store forbehold fordi variasjonen mellom oppgavesettene innen hvert av kursene er stor og datagrunnlaget er lite.

Som det kommer frem av diagrammet har det skjedd en omfordeling mellom typene algoritmisk resonnement, men ingen endring i andel oppgaver som krever kreativt resonnement. Det er i dette skillet mellom algoritmer og kreativitet jeg har hatt fokus. Økningen i oppgaver som krever guidet algoritmisk resonnement, er så betydelig at den vekker interesse selv om noe økning måtte forventes når alle skriftlige hjelpemidler er tillatt. Jeg har ikke datagrunnlag for analyse av denne økningen ut over å registrere den.

7.3 Språk, tekst og layout

Dersom det ikke er gjort endringer i forbindelse med at oppgavene ble gjort tilgjengelig på nettet, er det noen mindre endringer i layout fra 2MX til R1. Skriftstørrelsen er økt litt og oppgavesettet ser litt mer luftig og oversiktlig ut for R1 enn for 2MX. Det var også noe mer bruk av illustrerende figurer i de to første R1-eksamen enn det var i 2MX, men dette gikk tilbake igjen våren 2009. Se diagram 7-13 (kun matematisk relevante illustrasjoner er med).

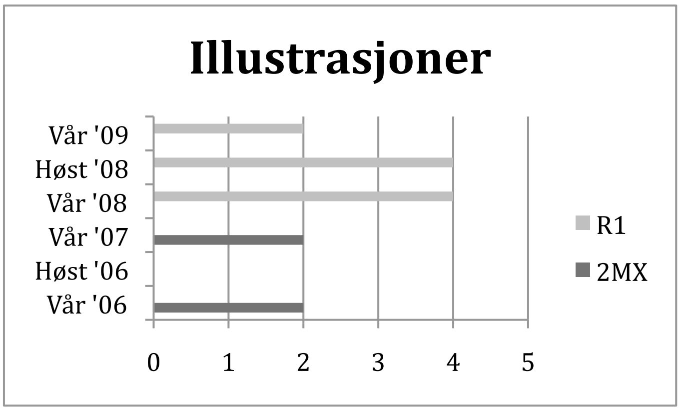


Diagram 7-13 Matematisk relevante illustrasjoner i oppgavesettene

Bortsett fra den ene sannsynlighetsoppgaven som er grundig kommentert i avsnitt 6.4.1, finner jeg ikke andre oppgaver med spesielt vanskelig bruk av språk eller kontekst.

Diagram 7-13 viser utviklingen fra oppgavesett til oppgavesett i bruk av tekstoppgaver kontra ferdig oppstilte oppgaver. Som det fremgår av denne, er det en økning i bruk av tekstoppgaver i overgangen fra 2MX til R1. Ytterligere økning i andelen tekstoppgaver ble det ved eksamen høsten 2008, mens andelen tekstoppgaver igjen gikk tilbake ved eksamen våren 2009.

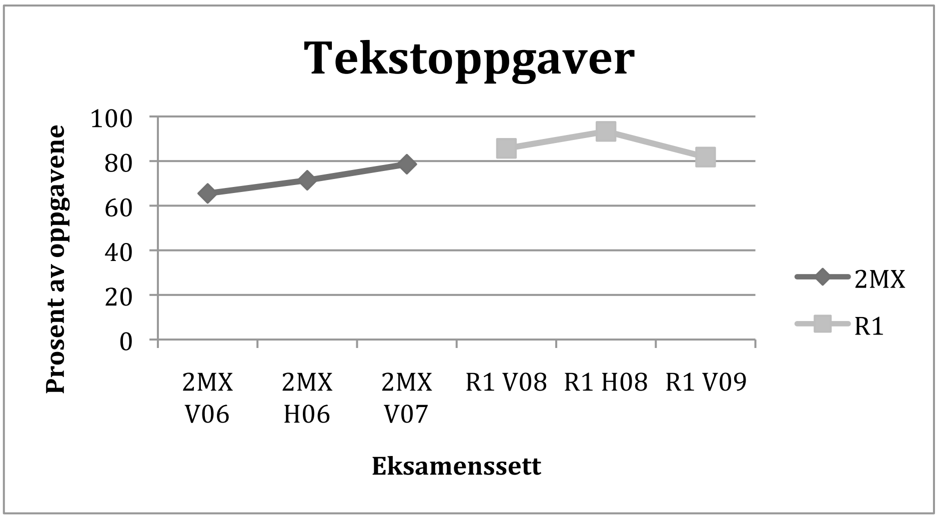


Diagram 7-14 Utvikling i andel tekstoppgaver

I vurderingsveiledningen (2008, s. 5) defineres kompetanse med henvisning til Stortingsmeldingen *Kultur for læring* (nr 30, 2003-2004) som "evnen til å møte komplekse utfordringer". I Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram står det under grunnleggene ferdigheter;

> Å kunne lese i matematikk for realfag innebærer å trekke matematisk relevant informasjon ut av en tekst. Det betyr å forstå matematiske symboluttrykk og logiske resonnementer. Det vil også si å forstå og tolke organisert visuell informasjon, som tabeller, diagrammer, grafer og geometriske figurer.

Tendensen i de to første settene av R1-eksamen tilsa at alle oppgavene til slutt ville innebære å trekke matematisk relevant informasjon ut av en tekst. Det ville føre til at en elev som kanskje ikke behersker dette så godt, men likevel har ferdigheter i å forstå matematiske symboluttrykk ikke får vise måloppnåelse i dette. Den trenden er snudd med eksamen våren 2009 hvor andelen tekstoppgaver er mindre enn ved de to første eksamenene selv om den fortsatt ligger over andelen ved 2MX-eksamen.

8. Oppsummering

I det foregående har jeg gjort en detaljert analyse av de tre eksamenssettene som er laget til R1 og tilsvarende analyse av tre eksamenssett for kurset 2MX som var forløperen til R1 for elever med full fordypning i matematikk på andre trinn i videregående skole. Analysen er gjort med tanke på å finne ut i hvilken grad eksamensoppgavene krever algoritmisk eller kreativt resonnement og for å besvare forskningsspørsmålet:

a. **Hvor stor del av eksamensoppgavene i matematikk 2MX og matematikk R1 krever evne til problemløsning og hvor stor del krever algoritmebruk? Har det skjedd endring i fordelingen med overgangen til ny eksamensform?**

I tillegg har jeg beskrevet og sammenlignet andre sider ved oppgavesettene som struktur, språk, layout og arbeidsmengde for å besvare forskningsspørsmålet:

b. **Er det likheter og forskjeller i eksamenssettene utover det som har med krav til problemløsning?**

Bakgrunnen for å reise disse spørsmålene er at vi har fått en todelt eksamen i matematikk med én del der ingen andre hjelpemidler enn skrivesaker er tillatt og én del der alle hjelpemidler bortsett fra kommunikasjon er tillatt. Hensikten har vært å bidra til debatten om eksamensformen blant annet ved å gi et grunnlag for å vurdere om det er sannsynlig at eksamen kan bidra til nivåheving hos elevene.

Gjennom sammenstilling av oppgavesett, oppgaveanalyse og den påfølgende sammenligningen er det vist at det er liten forskjell i eksamenssettene fra 2MX til R1. Dette gjelder både i form og i krav til resonnement i oppgaveløsningen. Det er ingen forskjell mellom krav til algoritmisk og kreativt resonnement, men en betydelig forskyvning fra familiært til guidet algoritmisk resonnement ved overgangen fra 2MX til R1.

Det kan være ulik oppfatning av hvilke oppgaver som krever algoritmisk og kreativt resonnement. Selv om analyseverktøyet som er brukt gir føringer for dette, ville noen kanskje legge lista lavere og andre høyere enn det jeg har gjort i definisjonen av hvilke oppgaver som krever kreativt resonnement. Det har liten betydning for konklusjonene for så sant man er konsekvent og lar lista ligge på samme sted hele veien, vil en endring i vurderingen bare føre til at søylen for algoritmisk og kreativt resonnement øker eller minsker, men ikke at forholdet mellom fagene endres.

Det er også et lite datamateriale som ligger til grunn for konklusjonene, og det er derfor viktig å ikke trekke forhastede slutninger, men se på tendenser som kan gi grunnlag for videre undersøkelser og forskning.

Jeg har kun sett på *om* eksamensoppgavene har endret seg og har ikke i mitt datamateriale funnet noe som kan fortelle *hvorfor* endringene ikke er større enn de er. Tanker rundt dette blir derfor kun spekulasjoner og ideer. Det kan ha sammenheng med at det ikke har skjedd store utskiftninger i oppgavenemndene i forbindelse med innføring av nye læreplaner og ny eksamensform. Eller det kan være at Utdanningsdirektoratet har sett på R1 som en videreføring av 2MX, og det er ikke tradisjon for å gjøre brå og store forandringer i eksamenssettene fra gang til gang.

Oppgavene til eksamen i videregående skole er ikke pilotert, det vil si at de ikke har vært prøvd på elever før de brukes til eksamen. Ved å bruke piloter er det mulig å luke ut oppgaver med feil, vanskelige formuleringer eller der det ser ut til at elevene oppfatter oppgavene annerledes enn det som er tenkt fra oppgavenemnden. Det er derfor gjort andre tiltak som skal bidra til å minske effekten av slike feil. Sensorene lager sin egen fasit og gjennom det arbeidet kan de avsløre noen uklarheter. De sender også inn resultater og kommentarer etter å ha rettet noen få oppgaver i bunken. På grunnlag av disse tilbakemeldingene lager Utdanningsdirektoratet en sensorveiledning som gir kommentarer og veiledning i forhold til det som har kommet opp, som for eksempel anbefalinger til vurderingen der det var feil i figur (Sensorveiledning etter forhåndssensur våren 2008. REA3022 Matematikk R1). Dersom oppgavene hadde vært pilotert, ville det kanskje kunne føre til større dristighet i utviklingen fordi man på forhånd kunne fått et inntrykk av effekten av endringene.

Det at det har kommet en eksamensdel uten hjelpemidler generelt og kalkulator spesielt, vil sannsynligvis få betydning for undervisningen og i noen grad føre til økt fokus på automatisering av ferdigheter. Det kan få både positive og negative effekter. Faren med listen over formler og regler som skal kunnes til eksamen (Vurderingsveiledning, 2009), er at elevene ender opp med mye kunnskap i form av pugg som forsvinner ut like fort som det kom inn. Pugg forekommer også ofte i løsrevet form; det er en eller annen pugget formel eller regel som ikke lar seg anvende på annet enn oppgaver som er nesten identisk like som i innlæringssituasjonen. Det ligger ingen grunnleggende matematisk forståelse i bunnen og innlæringen er ikke koblet opp mot annen kunnskap. Da vil denne kunnskapen i liten grad kunne brukes til å løse annet enn oppgaver som er nesten identiske med dem man har trent på (Imsen, 2005).

På del to av R1-eksamen har elevene alle skriftlige hjelpemidler tillatt i tillegg til at de kan ha med sin egen datamaskin. Det eneste som ikke er tillatt er kommunikasjon. Inge Grythe er leder av oppgavenemnda i matematikk som lager oppgavene til sentralt gitt eksamen i S1, R1, S2 og R2. I artikkelen ”Mot et kunnskapsløft” (Grythe, 2009) reflekterer han blant annet over utfordringene ved å lage oppgaver til Del 2 av eksamen. Han beskriver to mulig fallgruber; den ene er at elevene med sine medbrakte datamaskiner kan klippe og lime fra tidligere oppgaveløsninger når de gjør eksamensbesvarelsen. Den andre er at man for å unngå ”klipp og lim” lager så originale oppgaver at elevene ikke klarer å følge tankegangen og ikke får vist hva de kan (Grythe, 2009, s. 45).

Akkurat som oppgavenemnden tenker seg å fase inn bruk av mer avanserte digitale hjelpemidler på en forsiktig måte (Grythe, 2009), kunne det kanskje være mulig å tenke seg en tilsvarende forsiktig innfasing av flere deloppgaver som stiller større krav til problemløsningsevne. Dersom det er riktig at eksamen er viktig for å bestemme undervisningen i matematikk, er det nødvendig at det er et element av problemløsning og kreativitet i eksamensoppgavene. Problemløsningsstrategier kan overføres mellom veldefinerte isomorfe problemer hvis forholdene ligger til rette for det, og med mye trening er det også mulig å overføre problemløsningsstrategier til mindre veldefinerte problemer som ikke er så sterkt relaterte (Kahney, 1993, s. 96). Lærere kan tendere til å gi enklere oppgaver på prøver for at flest mulig elever skal komme gjennom med best mulig resultat (Boesen, 2008). Men lærerne ønsker også at elevene skal lykkes til eksamen, så økt krav til problemløsning i eksamensoppgavene kan bidra til større fokus på dette i undervisningen.

8.1 Konklusjon

Analysen av de til sammen seks oppgavesettene i 2MX og R1 med hensyn på krav til problemløsning, viser at det har skjedd svært lite endring fra den ene eksamenen til den andre. Variasjonen er større mellom eksamenssettene innen hvert av kursene enn den er mellom kursene som helhet. Det er derfor ikke grunnlag for å si at det har skjedd noen endring i kravet til problemløsning fra 2MX til R1.

Det er også stor likhet mellom oppgavesettene på andre måter. I struktur er det større likheter enn forskjeller. Én forskjell er at det ikke lenger er mulig å velge mellom ”lett” og ”vanskelig” oppgave på oppgave 1 av eksamen. Ellers er det en økningen i andelen tekstoppgaver. Her er det en jevn økning også fra det ene 2MX-settet til det neste med en markant økning i overgangen til R1. Om denne tendensen er varig snudd med R1-eksamen våren 2009 der andelen tekstoppgaver gikk noe ned, er det for tidlig å si.

Den største endringen ligger i hvilken type algoritmisk resonnement som kreves til eksamen. Dette funnet gir grunn til å stille spørsmål om hvordan elever på ulike nivåer klarer å bruke hjelpemidler til eksamen. Fokuset har i stor grad vært på de digitale hjelpemidlene, men det kan se ut til at evne til å bruke bøker og andre trykte og skrevne hjelpemidler på en effektiv måte kan få stor betydning for elevenes eksamensresultat.

Det som først og fremst er endret er selve eksamensformen. ”Vi håper og tror at todelingen av eksamen vil gi et rekyl tilbake i klasserommet når det gjelder valg av metodikk og praksis” (Grythe, 2009, s.46). Ut fra den gjennomgangen jeg har gjort av eksamenssettene, er det ingen annen skuddsalve å observere enn eksamens*formen.* Det kan være at endringen i denne fører til at undervisningen legges opp med trening i basisferdigheter uten hjelpemidler for å møte kravene til Del 1 og med mer aktiv bruk av lærebokteksten og av teknologisk verktøy for å møte kravene til Del 2. Men hvis det er evne til problemløsning som bidrar til å øke elevenes kompetanse og forståelse, har jeg ikke funnet signaler i den retning.

Eksamensoppgavene vil fortsette å utvikle seg etter hvert som man får erfaring med formen. Samtidig er det viktig at elevene vet hva som møter dem på eksamen – ikke slik at de vet hvilke oppgaver de får, men de må vite nok om form og forventet innhold til at de kan forberede seg på en fornuftig måte. Når muligheten til en stor formmessig og innholdsmessig endring ikke ble gjort i forbindelse med ny læreplan og ny eksamensform, vil fremtidige endringer måtte skje i små skritt fra år til år.

8.2 Videre forskning

Det er mange interessante spørsmål som kan reises i videre forskning. Både de som argumenterer for at store deler av eksamen skal være hjelpemiddelfri og de som ønsker mer bruk av dataverktøy både i undervisningen og til eksamen, ønsker at elevene skal bli flinke i matematikk. Eksamen er en av flere faktorer som påvirker undervisningen og elevenes kunnskapsutvikling. Hvordan dette påvirkes av den nye eksamensformen og innholdet i den vil det være interessante å få belyst ytterligere. Sensorene vil også oppleve nye utfordringer i vurderingsarbeidet etter hvert som elevene tar flere dataprogrammer i bruk i oppgaveløsningen.

Denne undersøkelsen har fokusert på hvilket krav til løsningsstrategi som ligger i eksamensoppgavene i seg selv. For å undersøke nærmere hvilke strategier elevene tar i bruk, vil det være ønskelig med observasjon av elever under eksamen. Hvordan klarer elever på ulike nivåer å bruke hjelpemidlene til eksamen? Det gjelder digitale verktøy, men også lærebøker og annet skriftlig materiale siden disse har fått større betydning med den nye eksamensformen.

Kildeliste

2MX (vår 2006). *Eksamen AA6514 Matematikk 2MX*. I Matematikk_AA_V06. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 14.09.2008: http://www.udir.no/ Eksamens oppgaver/Eksamen-R94/Almenne-ok-og-adm-fag/Matematikk-AA-V06/

2MX (høst 2006). *Eksamen AA6514 Matematikk 2MX*. I Matematikk_AA_H06. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 14.09.2008: http://www.udir.no/Eksamens oppgaver/Eksamen-R94/Almenne-ok-og-adm-fag/Matematikk-AA-H06/

2MX (vår 2007). *Eksamen AA6514 Matematikk 2MX*. I Matematikk_AA_V07. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 14.09.2008: http://www.udir.no/Eksamens oppgaver/Eksamen-R94/Almenne-ok-og-adm-fag/Matematikk-AA-V07/

2P (vår 2008). *MAT1003 Matematikk 2P V08*. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 25.09.2008: http://www.udir.no/Eksamensoppgaver/Eksamen-Kunnskaps loftet/Fellesfag-videregaende/Matematikk-Vg2P-V08/

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsing. I B. Grevholm (red.), *Matematikk for skolen.* (s. 51-70). Bergen: Fagbokforlaget (Oversatt fra svensk av Hilde Strømsnes, *Matematikdidaktikk – ett nordiskt perspektiv* Lund, Sverige: Författarna och Studentlitteratur. 2001)

Bergqvist, E. (2007). Types of reasoning required in university exams in mathematics [online]. *Journal of Mathematical Behavior*, nr. 26, s. 348-370

Boesen, J. (2008). Assessing Mathematical Creativity. A short resume of my thesis. Tilgjengelig 01.01.2009 fra: http://www.ped.gu.se/personal/johan.haggstrom/guma/ boesen%20assessing%201.pdf

Bø, I. & Helle, L. (2002). *Pedagogisk ordbok. Praktisk oppslagsverk i pedagogikk, psykologi og sosiologi.* Oslo: Universitetsforlaget.

Drijvers, P. H. M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter [online]. *Proefschrift Universiteit Utrecht.* Tilgjengelig 18.05.2009 fra: http://igitur-archive.library. uu.nl/ dissertations/2003-0925-101838/inhoud.htm

Forhåndssensur i realfag våren 2007. Matematikk 2MX. Utdanningsdirektoratet. (Tilgjengelig ved henvendelse til Utdanningsdirektoratet.)

Formelsamling (2001). Utdanningsdirektoratet (3. utg.) Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example [online]. *Educational Studies in Mathematics,* nr. 39, s.111-129.

Grythe, I. (2009). Mot et kunnskapsløft. *Tangenten*, nr. 1/2009, s. 43-51

Heir, O., Erstad, G., Borgan, Ø., Moe, H. & Skrede, P.A. (2007). *Matematikk R1,* Oslo: H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard).

Imsen, G. (1999). *Lærerens verden: Innføring i generell didaktikk*. (2. utg.). Oslo: Tano Aschehoug.

Imsen, G. (2005). *Elevens verden: Innføring i pedagogisk psykologi*. (4. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Johannessen, A., Tufte, P.A. & Kristoffersen, L. (2005). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode*, (3. utg.). Oslo: Abstrakt forlag.

Kahney, H. (1993). *Problem solving. Current issues.* (2. utg.). Buckingham and Bristol, USA: Open University Press.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R.V. & Roe, A. (2007). *Tid for tunge løft. Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006.* Oslo: Universitetsforlaget.

Lauritsen, B.T. (2007). *Elevbok i matematikk. Utfordringer og strategibruk*. Masteroppgave i matematikkdidaktikk. Trondheim: Høgskolen i Sør-Trøndelag

Leiulfsrud, H. og Hvinden, B. (1996). Analyse av kvalitative data: Fiksérbilde eller puslespill? I H. Holter & R. Kalleberg (red.), *Kvalitative metoder i samfunnsforskningen*. (s. 220-239). Oslo: Universitetsforlaget.

Lithner, J. (2003). Students' Mathematical reasoning in University Textbook exercises [online]. *Educational Studies in Mathematics*, nr 52, s. 29-55

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises [online]. *Journal of Mathematical Behavior*, nr. 23, s. 405-427

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitativ reasoning [online]. *Educational Studies in Mathematics*, nr. 67, s. 255-276

Læreplan i matematikk. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 25.12.2008: http://www.udir.no/templates/udir/TM_L%C3%A6replan.aspx?id=2100&laereplanid=212147

Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 25.12.2008: http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=168732

Milne, A.A. (2001). *Brumm går på besøk*. London: Methuen Children's Books.

Norsk matematikkråds arbeidsplan for perioden 2008-2013. Hentet 18.05.2009 fra Norsk matematikkråds webside: http://matematikkradet.no/

NNLs syn på matematikkeksamen i vg skole (2003). Hentet 30.04.2009 fra Norsk lektorlags webside: http://www.norsklektorlag.no/viewarticle.php?id=142

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F. & Hals, S. (2007). *Sinus matematikk R1. Grunnbok.* Oslo: Cappelen Forlag AS.

Polya, G. (1973). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. (4. utg.). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

R1 (vår 2008). *REA3022 Matematikk R1 V08*. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 29.09.2008: http://www.udir.no/Eksamensoppgaver/Eksamen-Kunnskaps loftet/Programfag-studieforberedende-/Matematikk-R1-/

R1 (høst 2008). *REA3022 Matematikk R1 H08*. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 09.01.2009: http://www.udir.no/Eksamensoppgaver/Eksamen-Kunnskaps loftet/Programfag-studieforberedende-/Matematikk-R1-/

R1 (vår 2009). *REA3022 Matematikk R1 V09*. Utdanningsdirektoratet.

Ragin, C.C. (1994). *Constructing Social Research*. Thousand Oaks, California: Pine Forge Press.

Ranestad, K. (2007). *Nye læreplaner (faglig pedagogisk dag 3.1.2007).* Tilgjengelig 22.05.2009 fra: http://www.math.uio.no/~ranestad/

S1 (vår 2008). *REA3026 Matematikk S1 V08*. Tilgjengelig fra: Utdanningsdirektoratets webside 29.09.2009: http://www.udir.no/Eksamensoppgaver/Eksamen-Kunnskaps loftet/Programfag-studieforberedende-/Matematikk-S1-/

Sandvold, K.E., Øgrim, S., Bakken, T., Pettersen, B., Skrindo, K., Dypbukt, W., Mustaparta, S., Thorstensen, A. & Thorstensen, R. (2007). *Sigma R1 matematikk.* Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Sensorveiledning etter forhåndssensur våren 2008. REA3026 Matematikk S1. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 28.08.2008: http://www.udir.no/Artikler/_ Eksamen/Sensorveiledninger-2005--Host-2008/

Sensorveiledning etter forhåndssensur våren 2008. REA3022 Matematikk R1. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 28.08.2008: http://www.udir.no/Artikler/_ Eksamen/Sensorveiledninger-2005--Host-2008/

Sensorveiledning etter forhåndssensur våren 2009. REA3022 Matematikk R1. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 27.05.2009. http://www.udir.no/Artikler/_ Eksamen/Vurderings--og-sensorveiledninger-VGO/

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin [online]. *Educational Studies in Mathematics,* nr. 22: s. 1-36.

Skoleporten, Utdanningsdirektoratet, tilgjengelig 21.12.2008 fra: http://skoleporten.utdanningsdirektoratet.no/default.aspx

Solvang, R. (1996). *Matematikkdidaktikk*. (2. utg.). Bekkestua: NKI.

T3 – Teachers Teaching with Technology*, CAS Authors*, *Tor Jan Aarstad,* tilgjengelig 28.09.2008 fra: http://www.t3ww.org/tii/index.html#tja

Vurderingsveiledning 2007. Matematikk – sentralt gitt eksamen. Studieforberedende og yrkesfaglig utdanningsprogram. Kunnskapsløftet LK06. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 27.09.2008: http://www.udir.no/templates/udir/TM_Artikkel.aspx?id=3442

Vurderingsveiledning 2008. Matematikk – sentralt gitt eksamen. Studieforberedende og yrkesfaglig utdanningsprogram. Kunnskapsløftet LK06. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 04.01.2009: http://www.udir.no/templates/udir/TM_Artikkel.aspx?id=3442

Vurderingsveiledning 2009. Matematikk – sentralt gitt eksamen. Studieforberedende og yrkesfaglig utdanningsprogram. Kunnskapsløftet LK06. Tilgjengelig fra Utdanningsdirektoratets webside 14.04.2009: http://www.udir.no/templates/udir/TM_Artikkel.aspx?id=3442

Aarstad, T. J. (2005). *Bidrar tekniske hjelpemidler til å høyne kunnskapsnivået i matematikk?* Fagmateriell, tilgjengelig 02.10.2008 fra: http://www.fagmateriell.no/Matematikk/Filsidene/TJAA-laring-m-IKT-mars2005.pdf

Vedlegg

Liste over tabeller

Liste over figurer

Liste over diagrammer