

Dynamisk dødelighet i pensjonsforetak

av

Jimmy Paul

*Masteroppgave i studieprogrammet
Modellering og Dataanalyse
med studieretning Finans, Forsikring og Risiko
2008*



Veileder: Erik Bølviken

Desember 2008

*Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Universitetet i Oslo*

In loving memory of Late Yash Paul

Innhold

1	Innledning	9
1.1	Hvorfor dynamisk dødelighet?	9
1.2	Dødelighetstariffer i Norge	11
1.3	Dynamisk dødelighet utenfor Norge	12
2	Statistikk og livsforsikringsteori	13
2.1	Grunnleggende begreper	13
2.2	Livsforsikring	14
2.3	Engangspremieberegning	16
2.4	Pensjonsytelser	17
2.4.1	Alderspensjon	17
2.5	Stokastiske prosesser	17
2.6	Lee-Carter med basisår	18
3	Modeller og beregninger	21
3.1	Lee-Carter's modell	21
3.2	Lee-Carter's modell med basisår	21
3.3	Lee-Carter med autoregressiv modell	24
3.4	Lee-Carter med tilfeldig gang	29
3.5	Dynamisk dødelighetsmodellering	32
3.6	SSB's observerte 2007 dødeligheter	35
3.7	Solvency 2	38
4	Reserver under dynamisk dødelighet	41
4.1	Dynamisk engangspremie	44
4.2	Reserveøkning for alderspensjoner	47

5	Kredittilsynets stresstesting	53
5.1	Dødelighetsrisiko	54
5.1.1	Tilfeldige feil	54
5.1.2	Estimeringsfeil	55
5.1.3	Samlet tapspotensial	56
5.2	Tilsynets dødelighetsrisiko i foretaket	56
5.3	Monte-Carlo simuleringer på dødelighetsrisiko	60
5.3.1	Simuleringer på tilfeldige feil	60
5.3.2	Simuleringer på estimeringsfeil	64
5.4	Oppsummering av simuleringene i foretaket	67
6	Reassuranse	69
6.1	Reassuranse i pensjonsforetaket	70
6.2	Simuleringer av tapspotensial for reassurandør	70
6.3	Arbitrasjemuligheter ved dynamisk dødelighet	73
7	Konklusjon	77
8	Vedlegg A	79

Figurer

1.1	Dødelighetstariiffene for norske menn med GAP07 dødelighet fra år 2008	10
1.2	Dødelighetstariiffene for norske kvinner med GAP07 dødelighet fra år 2008	11
2.1	Markov-kjede for en enkel pensjonskasse	14
3.1	Forventet levealder for menn og kvinner historisk og fremskrevet	23
3.2	Tidseriene k_t for menn og kvinner	24
3.3	Simuleringer av tidsfunksjonen for noen utvalgte baner ved AR-tilpasning	25
3.4	Dynamisk dødelighet for menn ved utvalgte år ved en AR-tilpasning	26
3.5	Dynamisk dødelighet for kvinner ved utvalgte år ved en AR-tilpasning	27
3.6	Forventet levealder ved en AR-tilpasning	28
3.7	Simuleringer av tidsfunksjonen for noen utvalgte baner ved random-walk tilpasning	30
3.8	Dynamisk dødelighet for menn ved utvalgte år for en Random-walk tilpasning	31
3.9	Dynamisk dødelighet for kvinner ved utvalgte år ved en Random-walk tilpasning	32
3.10	Forventet Levealder ved en Random-walk tilpasning	33
3.11	Forholdsfaktoren for dødelighetsgrunnlagene for År 2020, 2035 og 2050 mot statisk dødelighet (År 2006) for menn	34
3.12	Forholdsfaktoren for dødelighetsgrunnlagene for År 2020, 2035 og 2050 mot statsisk dødelighet (År 2006) for kvinner	35
3.13	Dødelighetsobservasjoner i 2007 for kvinner	36

3.14	Dødelighetsobservasjoner i 2007 for menn	37
4.1	Lineært opptjeningsprinsipp som benyttes i kollektiv pensjons- forsikring	42
4.2	Dynamisk engangspremie for alderspensjoner for kvinner	43
4.3	Dynamisk engangspremie for alderspensjoner for menn	44
4.4	Gjenstående levealder for kvinner ved dynamisk tariff	45
4.5	Gjenstående levealder for menn ved dynamisk tariff	46
5.1	Risikosommene i foretaket	57
5.2	Estimeringsfeil ved bruk av dynamisk dødelighet	58
5.3	Simuleringer med samlet tapspotensial for tilfeldige feil og QQ- plot	61
5.4	Kvantiler og positivt tapspotensial i foretaket	62
5.5	Antall som dør per simulering	63
5.6	Samlet tapspotensial ved oppgang og nedgang i dødelighet . . .	64
5.7	Samlet positivt tapspotensial ved endring i dødelighet	65
5.8	Kvantilene for samlet tapspotensial og histogram over antall medlemmer som dør under endringer i dødelighet.	66
6.1	Positive risikosummer i foretaket	71
6.2	Tapspotensialet for reassurandøren	72
6.3	Figur over investeringsstrategi med arbitrasjemulighet for livsel- skap eller assurandør	74

Tabeller

4.1	Tabell over gjenstående levealder ved oppnådd pensjonsalder i det dynamiske tilfellet	47
4.2	Tabell over pensjonsbestanden etter kjønn og tilstand	48
4.3	Tabell over reserveendringer for tilstander og kjønn i kroner	49
4.4	Prosentvis endring for alderspensjoner med dynamisk dødelighet versus statisk dødelighet	49
4.5	Prosentvis endring jevnt over tid i fremskrivningen	50
5.1	Tabell over reserveendringer med dynamisk dødelighet ved stress av q_x med 10%	59
5.2	Value at Risk krav ved forskjellige valg av kvantiler	67
6.1	Value at Risk krav for reassurandør ved forskjellige valg av kvantiler	73
6.2	Reassuransepremie for ulike dødelighetstariffer	74

Forord

Dynamisk dødelighet er et nytt begrep innenfor livsforsikring og pensjon. Et veldig etterspurt tema blant forsikringsbransjen i prising av forsikringer og beregninger av pensjoner. I samarbeid med aktuarfirmaet Gabler & Partners, vil denne masteroppgaven være tilrettelagt mot en av pensjonskassene som firmaet per i dag er ansvarshavende aktuarer for.

Masteroppgaven vil gi innsikt i usikkerheten ved bruk av dynamisk dødelighet i engangspremien ved alderspensjonsytelser. Oppgaven vil bruke eksempler på en reell pensjonskasse, men grunnet personvern vil ikke sensitive opplysninger legges ut, kun resultater som vil være av interesse.

Anerkjennelse

Mens jeg har jobbet med masteravhandlingen min har jeg fått hjelp fra en rekke kolleger og medstudenter. Jeg vil takke alle som har bistått med støtte og veiledning under avhandlingen og under masterstudiet. Studiet har gitt meg et bredt spekter av kompetanse innefor en rekke spennende fagfelt. Jeg vil takke veileder Erik Bølviken for innsatsen som veileder og karriereveien han har gitt meg i næringslivet. Jeg vil også takke min tidligere studentkollega Stig Korsnes for hans kompetansedeling og ikke minst hans motivasjon og læreteknikker. Dette har gitt meg grunnstrukturen til det programmeringstekniske innenfor R som har vært et grunnleggende verktøy gjennom studiet.

Jeg vil takke Gabler & Partners AS for tilrettelegging av ressurser på min avhandling der jeg spesielt vil takke aktuar Morten Harbitz, administrerende direktør Christian Fotland og aktuar Arve Moe. Deres kompetanse har bragt oppgaven på et nytt nivå innenfor pensjonsforsikring og reassuransse som gjør temaet spennende og utfordrende i kommende tid.

Tilslutt vil jeg takke min søster Sonam Rani og min mor Asha Rani for deres motivasjon, kjærlighet og ikke minst støtte under studiene. Deres tilpasning har gitt studiene førsteprioritet og derfor tid til å arbeide med avhandlingen. Jeg vil ikke glemme min avdøde far Yash Paul som har vært en motiverende faktor til å velge matematikk og statistikk som studieretning.

Kapittel 1

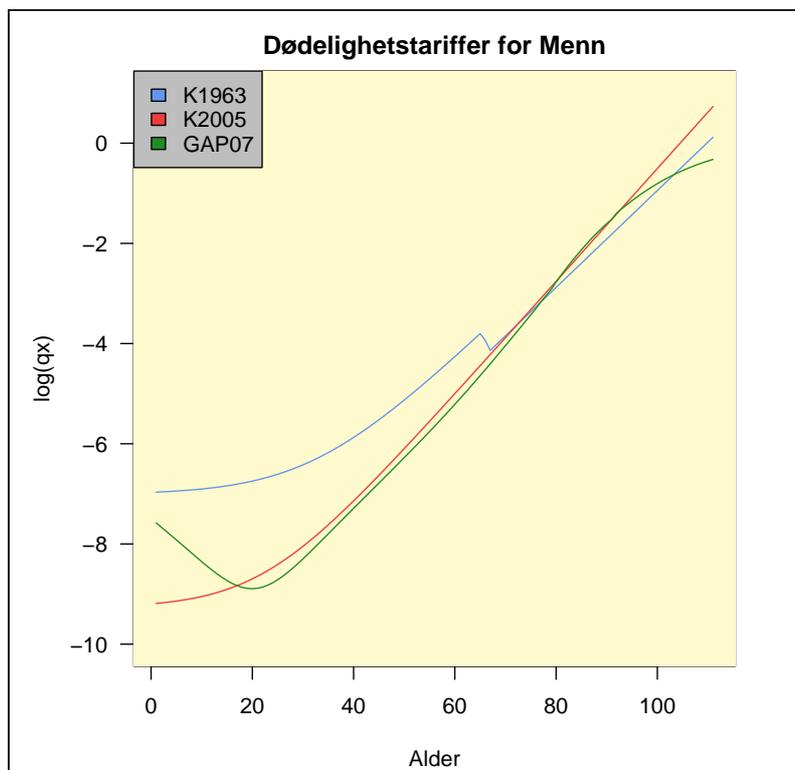
Innledning

I Norge er dynamisk dødelighet et relativt nytt begrep som interesserer mange innenfor livsforsikringsbransjen. Ordet dynamisk betyr endring eller bevegelse og vi ser da på endringer i dødeligheten med tiden som en faktor. I dag har vi kun en dødelighetstariiff i Norge som er dynamisk. Denne tariffen med navnet GAP07 er en 5-parametrisk modell som gjør den fleksibel og kan estimere dødelighet for forskjellige yrkesgrupper og kjønn. I dag er denne modellen med dynamisk dødelighet den eneste som er anvendt i Norge, som gjør Gabler & Partners til et ettertraktet selskap.

1.1 Hvorfor dynamisk dødelighet?

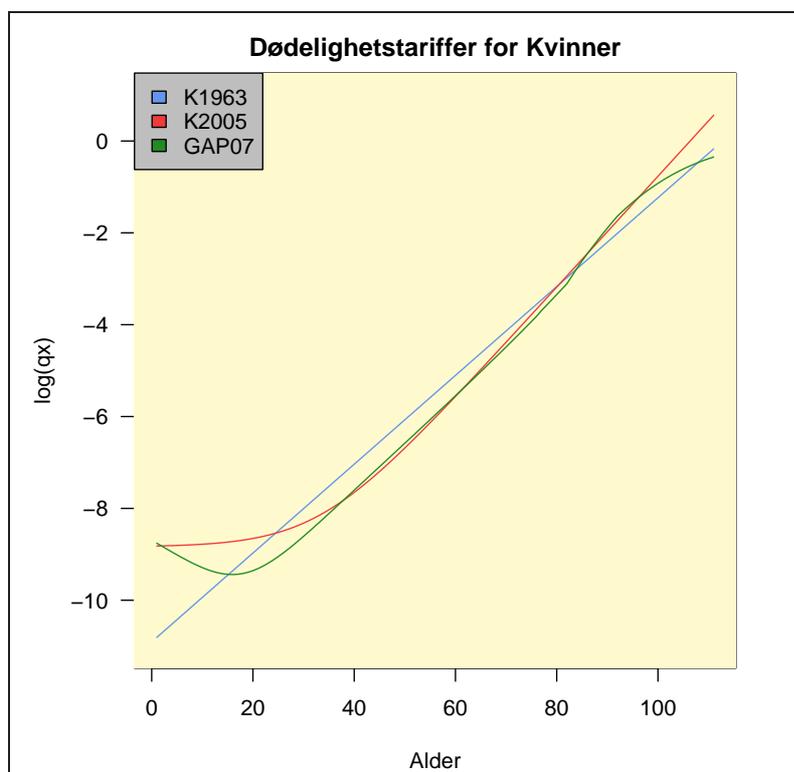
Historisk sett ser vi fra 1950 at levealderen i Skandinavia og andre vestlige land har vært jevnt økende. Vi har blitt en nasjon som de siste årene har ligget på første plass på HDI¹ rangeringen. For pensjonskasser i Norge er den slags analyse av dødelighet grunnleggende. Deres analyse må gi et pre-sist bilde på dødelighetsutviklingen fordi pensjonsordningene har et særdeles langt tidsperspektiv. Ved å se på tidsperioden fra 1950 til 2006 ser vi at norske menn og kvinner har fått en økt gjennomsnittlig levetid på 4-5 år. I dag ligger forventet levealder for kvinner og menn på rundt 82 og 77 år henholdsvis. Dette vil føre til økende pensjonskostnader enn det som er forventet. Pensjonskassene vil måtte benytte mer av sin reserve for å dekke forpliktelsene sine overfor kassens medlemmer. Inntil nylig er den mest anvendte dødelighetstar-

¹HDI (Human Development Index) er et mål som måler velstand, levevilkår, forventet levealder samt flere faktorer.



Figur 1.1: Dødelighetstariffene for norske menn med GAP07 dødelighet fra år 2008

iffen K1963 benyttet på norske pensjonskasser. Denne dødelighetstariffen ble utviklet av Livforsikringsselskapenes Statistiske kontor i 1963 og bygger på den velkjente dødelighetsmodellen Gompertz-Makeham. Denne modellen er basert på en matematisk funksjon og er demografisk og tidsuavhengig. Dette betyr at den ikke tar hensyn til dødelighetsendringer og er derfor ikke en god modell å anvende hvis vi skal ha en realistisk dødelighetstariff. I tillegg er denne dødelighetstariffen pålagt en streng sikkerhetsmargin for å dekke nedgangen i dødeligheten. Denne sikkerhetsmarginen kan i dag diskuteres om er korrekt, ettersom analyse kan vise at sikkerhetsmarginen er altfor lav. Det betyr at pensjonskassene må benytte seg av en dødelighet med mye usikkerhet som er høyst uakseptabelt.



Figur 1.2: Dødelighetstariffene for norske kvinner med GAP07 dødelighet fra år 2008

1.2 Dødelighetstariffer i Norge

Tidlig i 2001 kom Kredittilsynet med et brev til alle forsikringsselskap om at konsesjonen til K1963 ikke ville videreføres og derfor utarbeidet FNH² i 2005 en dødelighetstariff med navnet K2005 som skulle overta etter K1963. Kredittilsynet mente at dette var en god statistisk dødelighetstariff, men et høyt sikkerhetstillegg måtte likevel tilføyes. Minstekravet ble på henholdsvis 15% og 10% på norske menn og kvinner. Forskjellen mellom disse tariffene ble en nedjustering i dødeligheten. Den statistiske modellen vil igjen møte på tilsvarende problem som for K1963 om et tiår eller to, så det er et problem som velges å forskyves frem i tid.

²Finansnæringens Hovedorganisasjon (FNH) er næringsorganisasjon for finansnæringen

Den dynamiske dødelighetstariffen derimot vil ta for seg den økende forventede levealderen og vil derfor ha mye mindre sikkerhetstillegg. Sikkerhetsmarginen på GAP07 ligger i dag på 3% for aldere under 75 år og 1.5% over 75 år. Dette er da en modell som i følge Kredittilsynet dekker den stigende levealderen og med et så lavt sikkerhetstillegg, ser vi at denne modellen dekker tidsendringene i dødeligheten. Det at sikkerhetsmarginene halveres etter 75 år, betyr bare at vi er enda mer sikrere på dødeligheten i høye aldre som er de mest kritiske årene ved beregninger av alderspensjoner. Dette betyr at innbetalinger vil stå godt overens med pensjonskostnadene og vi kan si at ekvivalensprinsippet vil bli mer korrekt.

1.3 Dynamisk dødelighet utenfor Norge

Dette temaet har vært gammelt nytt for mange aktuarer i land rundt om i verden. Den internasjonale aktuarforeningen har blant annet diskutert dette i kollokvier under en seksjon som heter LIFE. Her diskuteres alt som har med dødelighet og hvilke slags modeller som bør benyttes i de forskjellige nasjonene som er med i denne foreningen. Spesielt har amerikanere og britene utmerket seg med dynamisk dødelighet og affine modeller. Dette er modeller som tar for seg en klasse Markov-prosesser som inneholder stokastiske ledd.

En av de første til å se på tidsvarierende dødelighet var Lee og Carter i 1992 som utviklet en dødelighetsmodell som brukte historiske data til å tilpasse modellen. Ved å bruke den grunnleggende Lee-Carter metoden har en rekke land benyttet seg av denne modellen til å gjøre analyse over dødeligheten. Det finnes en rekke videreutviklede modeller som også kan benyttes.

Kapittel 2

Statistikk og livsforsikringsteori

I dette kapitlet vil vi definere en del ord og uttrykk som vil gå igjennom oppgaven. Dessuten vil vi utlede en del formler som blir benyttet løpende i avhandlingen. Dersom leser er kjent med livsforsikringsmatematikk, stokastiske prosesser og ikke minst pensjonsformler, kan en fint hoppe over dette kapitlet. Den siste seksjonen i kapittel 2 anbefales å gå igjennom ettersom vi i kapittel 3 bruker en videreutviklet Lee-Carter modell.

2.1 Grunnleggende begreper

Studiene bygger på statistikk og livsforsikringsmodeller der vi ser på dødelighetssannsynligheter definert generelt som q_x . Vi bruker ettårige dødssannsynligheter som gir oss sannsynligheten for å dø når medlemmet er i alder x . Vi har også overlevelsessannsynligheten p_x med følgende relasjon

$$q_x + p_x = 1$$

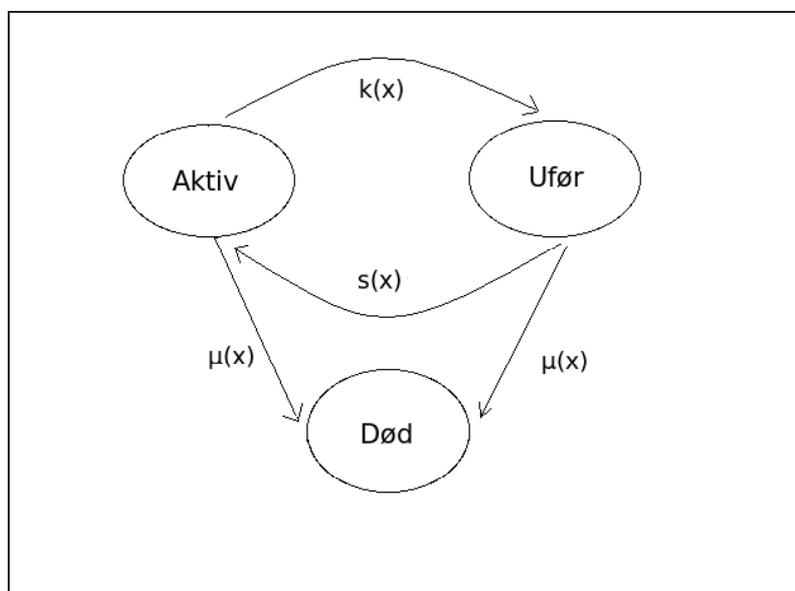
Dette er standardsannsynlighetene som benyttes i Gompertz-Makeham og mange andre statiske dødelighetsmodeller. For dynamisk dødelighet må vi utvide den ettårige dødssannsynligheten til $q_{x,t}$ som forteller oss sannsynligheten for at et medlem dør i alder x ved år T . Vi har også for dynamisk dødelighet at

$$q_{x,T} + p_{x,T} = 1$$

Ved å sette $T = 0$ ser vi på den statiske dødeligheten, men ved å la $T > 0$ vil vi få dynamisk dødelighet. Videre i denne korte sammenfatningen ser vi kun

på statiske dødelighetsbegreper, men formlene blir like gyldige for dynamiske engangspremier og livsforsikringsteori.

2.2 Livsforsikring



Figur 2.1: Markov-kjede for en enkel pensjonskasse

Ved å se på en generell dødsintensitet $\mu(x)$ vil vi vise hvordan vi kommer fram til denne. Ved å sette opp mulige tilstander, ser vi fra figur 2.1 at dette kan ses på som en kontinuerlig Markov-kjede der tilstanden død er absorberende. Vi bruker så Markov-kjedeteori som sier at sannsynligheten for at en x -åring skal overleve i $t + \Delta t$, gitt at vi står i tidspunkt t er gitt

som følger

$$\begin{aligned}
 P^{AA}(t + \Delta t) &= P(t)^{AA}[1 - (\mu(x + t) - k(x + t))]\Delta t \\
 \frac{P^{AA}(t + \Delta t)}{\Delta t} &= P^{AA}(t) - \mu(x + t)P^{AA}(t) - k(x + t)P^{AA}(t) \\
 \frac{P^{AA}(t + \Delta t) - P^{AA}(t)}{\Delta t} &= -[\mu(x + t) + k(x + t)]P^{AA}(t) \\
 \int_0^t \frac{P^{AA}(t)}{P^{AA}(t)} dt &= - \int_0^t \mu(x + s) + k(x + s) ds \\
 \ln P^{AA}(t) &= - \int_0^t \mu(x + s) + k(x + s) ds \\
 P^{AA}(t) &= e^{-\int_0^t \mu(x+s)+k(x+s)ds} = {}_t P_x
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vi har nå utledet "sannsynligheten for at en x-åring er i live om t år". Med dette generelle verktøyet kan vi finne denne sannsynligheten for ulike dødsintensiteter. Flere pensjonskasser bruker slike markovkjeder. Vi er ikke interessert i å se på uførhet i denne oppgaven, så derfor setter vi $k(x) = 0$. Dermed vil vår overlevelsessannsynlighet være gitt som

$$P^{AA}(t) = e^{-\int_0^t \mu(x+s)ds} = {}_t P_x$$

Dette gjelder for alle typer dødelighetsmodeller og ikke bare Gompertz-Makeham som nevnt foran. Selv om Lee-Carter modellen ikke er i samsvar med Gompertz-Makeham, vil livsforsikringsutledningene gjelde uavhengig av modellvalg. Vi finner så ettårige dødsannsynligheter og overlevelsessannsynligheter gitt som

$$q_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu(x+s)ds} \tag{2.2}$$

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu(x+s)ds} \tag{2.3}$$

Den ettårige døds og overlevelsessannsynligheten finner vi ved å bruke ${}_t P_x$ som i grunnformel, men integralgrensene endrer seg og vi får derfor q_x og p_x uttrykt som over i (2.2) og (2.3). Dette er generelle formler som vil ligge til grunn for all teori fremover. Med dette som basis kan vi finne forventet levealder for en nyfødt som blir

$$E_o = \int_0^\infty {}_t P_o dt \tag{2.4}$$

Dette virker naturlig fordi en nyfødt vil få mindre og mindre sjanse for å overleve over lengre tid når vi tar produktet over tall som er mindre enn 1. Innledningsvis nevnte vi hva forventet levealder var for både menn og kvinner og dette har sitt opphav fra formel 2.4.

Vi observerer at vi nå kan finne forventet gjenstående levealder for en x -åring. Vi veit at personen er x år og derfor vil forventet gjenstående tid være integralet fra alderen x og opp til maksalder.

$$E_x = \int_x^\infty {}_tP_x dt \quad (2.5)$$

Her ser vi at forventet gjenstående levealder har sine likhetstrekk med forventet levealder for en nyfødt, fordi ved å sette $x = 0$, ender vi opp med formel 2.4.

2.3 Engangspremieberegning

Nå som vi har litt livsforsikringsteori bruker vi dette til blant annet å finne engangspremie. Begrepet engangspremie er aktuarens lommekniv og benyttes i alle typer premie- og reserveberegninger. Vi ser nå at statistisk teori kobles opp mot livselskapenes metoder på beregninger og analyse i næringslivet.

En engangspremie brukes som en skaleringsfaktor eller en sikringsfaktor på de ytelsene enhver medlem i en pensjonskasse har rett til. Denne engangspremien avhenger av alderen, kjønn, dødelighetstariffen og en diskonteringsrente. Som regel er denne renten enten 3% eller 4%, men ved bruk av en lavere neddiskontering vil engangspremien bli høyere. Beregning av dynamisk engangspremie for alderspensjon for en x -åring der utbetalingen starter etter n år er gitt som følger

$$\int_n^\infty v^t {}_tP_x dt \quad (2.6)$$

eller i det diskret tilfelle at

$$\sum_{t=n}^{110} v^t {}_tP_x - 0.5v^n {}_nP_x \quad (2.7)$$

der $v = \frac{1}{1+i}$ og i er en valgt diskonteringsrente som overnevnt. Engangspremien vil øke i små aldre og opp til pensjonsalder og derfra avta. Den vil ligge fra 2 og opp til 14-15 på det høyeste. Engangspremiene vil endre seg hvis vi bruker ulike dødelighetstariffer, og vi skal senere i oppgaven vise at den vil også endre seg dynamisk med tida.

2.4 Pensjonsytelser

2.4.1 Alderspensjon

En alderspensjon er noe som alle og enhver har rett til etter oppnådd pensjonsalder. Dette er noe alle norske arbeidstakere opparbeider seg gjennom de årsverkene de legger bak seg for den norske stat eller de bedriftene de er arbeidstakere for. Som en sikring er arbeidsgiver pålagt å ha en pensjonsordning for alle sine tilsatte. Selv om mange bedrifter har innskuddsordninger, vil vi her kun se på ytelsesordninger. En ytelsesbasert alderspensjon skal tilsvare minst 60% av pensjonsgrunnlaget ved full opptjening. Som regel ligger denne satsen mellom 60% og 70% og avhenger av kontrakten i pensjonskassen. Pensjonsopptjeningen skal skje lineært, dvs at man skal opptjene like store deler av full pensjon for hvert år man er medlem i pensjonskassen. Krav til full opptjening er gitt ved 30 år og en alderspensjon kan f.eks beregnes etter følgende formel.

$$AP = 0.60 * \left(\frac{Pg}{Deltid} \right) - \left(\frac{3}{4}G + folketrygd \right) * Arbfaktor * \frac{Avkort}{30} \quad (2.8)$$

der PG er pensjonsgrunnlaget og deltid/arbeidsfaktoren er stillingssituasjonen til medlemmet i foretaket. Folketrygd er enten en beregnet folketrygd eller den faktiske folketrygden. Dette kommer an på om pensjonskassen er offentlig eller privat. Avkort er avkortningsfaktoren som regnes utifra innmeldningstidspunktet og pensjonstidspunktet.

Dette er den ytelsen ethvert medlem har krav på og det finnes igjen regler og restriksjoner på formelen i spesialtilfeller som kan forekomme. Medlemmet vil få utbetalt denne ytelsen årlig fra 67 år til medlemmet sovner stille inn. Det finnes også begrenset alderspensjon som ikke er livsvarig, men dette er veldig lite brukt.

2.5 Stokastiske prosesser

En stokastisk prosess er en prosess som ser på tilfeldigheter og ikke bestemte deterministiske baner. Det betyr at vi må se på historiske data for å bestemme en drift (μ) og usikkerhetsparameter(σ) for å modellere slike stokastiske prosesser. De mest anvendte er

$$\begin{aligned} &\text{Random-Walk modell} \\ &k_t = k_{t-1} + \mu + \sigma\epsilon \end{aligned} \quad (2.9)$$

som er en tilfeldig gang og en AR(1) modell er gitt som følger

$$\begin{aligned} & \text{AR(1)-modell} \\ & k_t = \phi k_{t-1} + \mu + \sigma \epsilon \end{aligned} \tag{2.10}$$

der ϕ er med i intervallet $[0, 1]$. Når $\phi = 1$ får vi ikke-stasjonære serier som eksempelvis tilfeldig gang. Den stasjonære serien har et stasjonærnivå på $\frac{\mu}{1-\phi}$. I begge modeller er $\epsilon \sim N(0, 1)$ som gir oss de tilfeldige banene.

2.6 Lee-Carter med basisår

Vi vil omskrive Lee-Carter modellen som vil være den vi vil benytte videre i oppgaven. Veileder Erik Bølviken har skrevet et program som har en del algoritmer og han har anvendt en del statistiske estimeringsmetoder for å finne fremskrevet dødelighet. Dette programmet tar inn historiske dødelighetsdata som input i tillegg til populasjonen og gir oss parameterestimater som kan benyttes i Lee-Carter modellen. Denne inputen er historiske data og der det siste observerte året i det historiske settet blir basisåret.

Det vi først må definere er modellen. Den opprinnelige modellen til Lee-Carter er som følger

$$\ln(q_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t} \tag{2.11}$$

Her sier veileder at $a_x = 0$ og at $\epsilon_{x,t} = 0$ som han heller hensyntar i programmet sitt. Vi skal nå se på selve omskrivningen og vi får dermed følgende

$$\begin{aligned} q_{x,0} &= q_{x,\text{basis}} \\ q_{x,1} &= q_{x,0} * e^{b_x(k_1-k_0)} \\ &= q_{x,\text{basis}} * e^{b_x(k_1-k_0)} \\ q_{x,2} &= q_{x,1} * e^{b_x(k_2-k_1)} \\ &= q_{x,\text{basis}} * e^{b_x(k_1-k_0)} * e^{b_x(k_2-k_1)} \\ &= q_{x,\text{basis}} * e^{b_x(k_2-k_0)} \\ &\vdots \\ q_{x,t} &= q_{x,\text{basis}} * e^{b_x(k_t-k_0)} \end{aligned}$$

Likningen viser at rekursjonen kun hensyntar basisåret som blir den siste observerte dødeligheten, og i gjengjeld får vi ut to parametere som en output i

programmet. Dette er da b_x og k_t som er aldersfunksjonen og tidsfunksjonen henholdsvis. Vi ser at den dynamiske dødeligheten kun avhenger av riktig indeks i aldersvektoren og tidsvektoren som gjør den enkel og forståelig. Nå har vi modellen på plass og i kapittel 3 vil vi se mer på Lee-Carter modellen.

Kapittel 3

Modeller og beregninger

I dette kapitlet vil vi begynne å se på Lee-Carter modellen. Vi skal bruke denne modellen til å beskrive den dynamiske dødeligheten i oppgaven. Vi vil senere i oppgaven se på konsekvenser av dynamisk dødelighet når tidsparameteren i modellen blir om til en stokastisk prosess. Vi vil også se på de siste observasjonene av dødelighetsrater og kontrollere om dette passer til den predikerte modellen. Tilslutt vil vi se på Solvency II som er mer et konsept enn en modell. Det vi vil starte med er den generelle Lee-Carter modellen.

3.1 Lee-Carter's modell

Modellen som vi anvender er Lee-Carter og er gitt som følger

$$\ln(q_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t} \quad (3.1)$$

der a_x beskriver den gjennomsnittlige aldersprofilen ved gitt alder, b_x beskriver endringer i dødeligheten ved gitt alder, mens k_t er den generelle dødeligheten over tid. I tillegg er den sistnevnte parameteren en tidsavhengig parameter og en kan derfor benytte tidsrekke analyse.

3.2 Lee-Carter's modell med basisår

Vi nevnte i slutten av kapittel 2 hvordan denne modellen framkommer. Vi benyttet en rekursjonsformel som heller så på basisåret og en predikering fra basisåret og frem i tid. Det som gjenstår er å estimere parametrene i

dødelighetsmodellen. Her blir den store utfordringen valg av historiske data som vil avgjøre parametrenes utfall. Hvor langt tilbake skal en gå? Er dødeligheten på 1800 tallet relevant for dødelighet i det nye millenniumet? Slike spørsmål kan man stille seg. Ved å ta en analyse over dette har jeg valgt å se på tidsperioden 1950-2006. Dette grunnet stabiliseringen av dødelighetsratene etter 2.verdenskrig og som derfor vil gi realistiske dødeligheter. En kan diskutere om dette er fornuftig eller ikke.

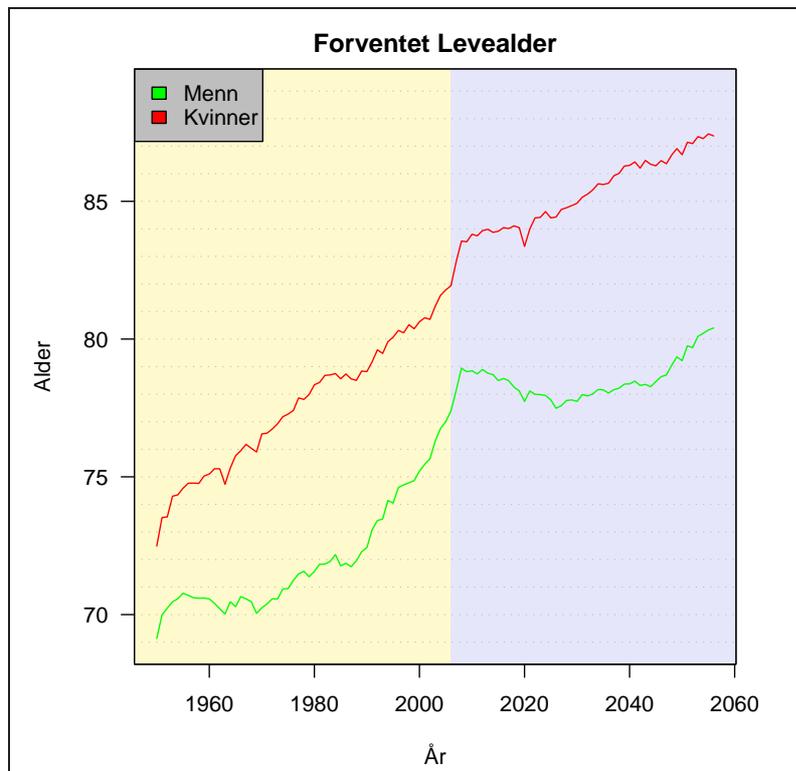
Grunnen til at vi har valgt et spekter av historiske data på 56 år er fordi vi ønsker å predikere dødeligheten langt ut i tid for å se på konsekvensene av langsiktige endringer i dødelighetsratene. Derfor predikeres også dødeligheten over en 50 års periode. Derfor er valg av historiske data blitt som følger. Det historiske datamaterialet er hentet fra databasen Human Mortality Database¹ som gir en oversikt over dødelighetsrater i en rekke land. Her velger vi ut ratene fra 1950 og fram til sist observerte dødelighetsrater som er for året 2006. Det betyr at basisåret vårt blir 2006 og den dynamiske dødeligheten får en form som følger

$$q_{x,t} = q_{x,2006} e^{*b_x(k_t - k_0)} \quad (3.2)$$

Som vi nevte i utledningen av Lee-Carter med basisår i seksjon 2.6, får vi ut to vektorer som er aldersvektoren b_x og tidsvektoren k_t . Dette ser vi at vi kan sette direkte inn i formelen sammen med dødeligheten i basisåret som gir oss den predikerte dynamiske dødeligheten. I tillegg har vi fått ut en forventet levealdersvektor fra 2007 og til 2057. Sammen med historisk forventet levealder, har vi i figur 3.1 plottet ut den fremskrevde forventede levealderen fra den predikerte modellen.

I en diskusjon med veileder kom vi fram til at den fremskrevde forventede levealderen ikke er en god og realistisk fremskrivning. Vi ser at fremskrivningen for menn tilsier at den forventede levealderen synker på kort sikt, men over et 30 års spekter tar det seg opp igjen. For kvinner ser denne fremskrivningen realistisk ut. For å utforske dette mer ser vi i historien at menn har hatt mye variasjon. Vi ser at den synker litt i 1960-65, men tar seg så kraftig opp på 1990-tallet. Grunnen til denne økningen skyldes blant annet bedre helsetilstand blant norske menn. Leger og vitenskapsfolk klarte å forhindre hjerteinfarkt som hadde vært hyppig på denne tiden. Dette fikk en drastisk økning i forventet levealder for menn. Kvinner ser vi har hatt en jevn og nesten lineær økning, og har alltid ligget 4-5 år over forventet

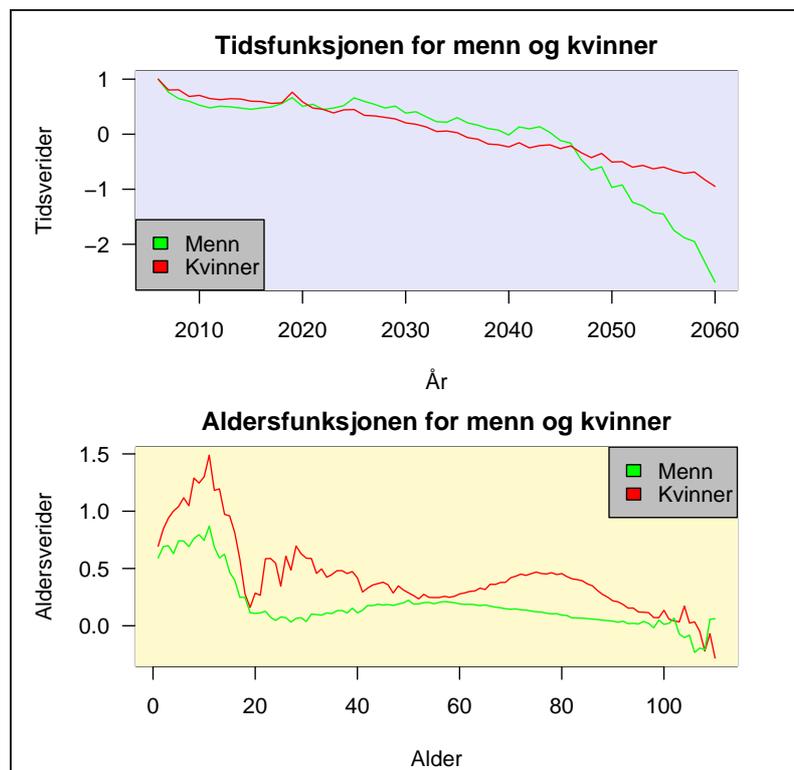
¹Databasen er tilgjengelig på www.mortality.org



Figur 3.1: Forventet levealder for menn og kvinner historisk og fremskrevet

levealder for menn. Variasjonen i historiske data er klart større for menn enn for kvinner. Og i fremskrivningen for menn fra 2006, ser vi at historien fra 1960-65 gjentar seg. Den synker over en liten periode, men tar seg så opp over lengre tid. Tilsvarende hendelse ser vi også i historien for kvinner. Vi ser at det lille bunnpunktet i 1964-1965 oppstår også i 2016-2017. Kvinner hadde en forholdsvis lineær vekst i historien og får det også i fremskrivningen. Vi kan se på dette som en periodisk utvikling. Dette mener jeg og veileder blir feil å bruke ettersom den forventede levealderen ikke vil synke i de neste 3 årene. Derfor må vi omjustere parametrene vi får.

De to vektorene b_x og k_t som vi fikk som output, må derfor endres. Vi bestemte oss for å endre tidsfunksjonsvektoren og aksepterer at aldersfunksjonsvektoren er sann. Så spørsmålet nå blir hvordan tilpasse denne vektoren? I Lee-Carter modellen som vi har benyttet nevnte vi tidligere at k_t kan ses på som en tidsrekke. Det betyr at vi kan modellere tidsfunksjonsvek-

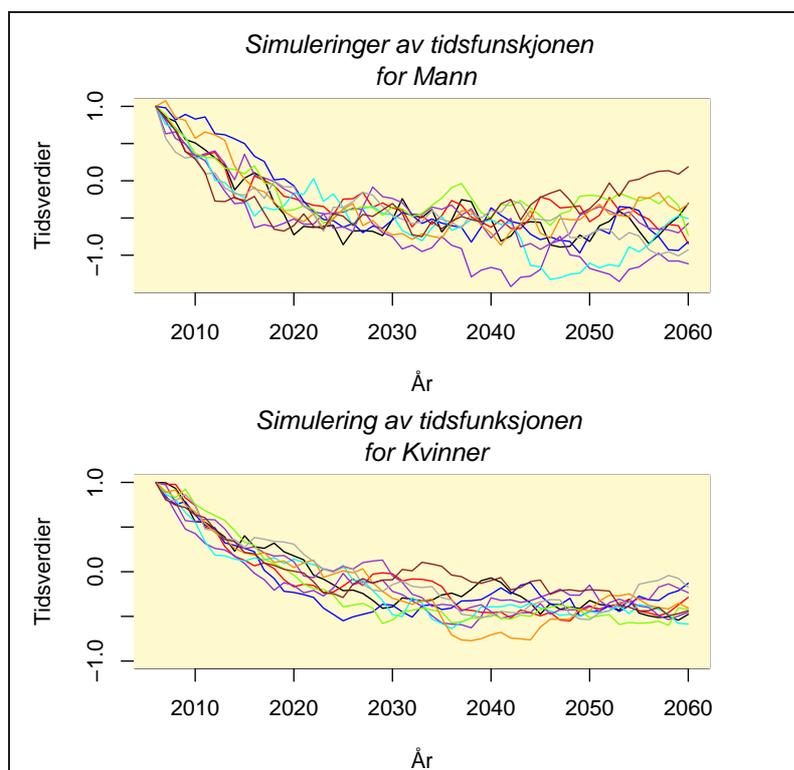


Figur 3.2: Tidseriene k_t for menn og kvinner

toren vår som en stokastisk prosess. Vi får da tilfeldigheter i den fremskrevde dødeligheten som gir oss et mer realistisk bilde av fremskrevet dødelighet. Ved å benytte tilfeldigheter skal jeg se på to modeller som tidsfunksjonsvektoren kan modelleres på. Vi velger selvsagt den modellen som gir best tilpasning og den modellen som gir den beste fremskrivningen av dødeligheten.

3.3 Lee-Carter med autoregressiv modell

Ved å se på k_t som en tidsrekke velger vi først å plote denne tidsrekken. I figur 3.2 ser vi denne sammen med aldersfunksjonen for begge kjønn. Ved første øyekast kan tidsfunksjonen se ut som en random-walk modell selv om den ikke fluktuerer mye. Den har en kurs nedover og vil sannsynligvis fortsette nedover. I en ny diskusjon med veileder kom vi fram til at vi må benytte



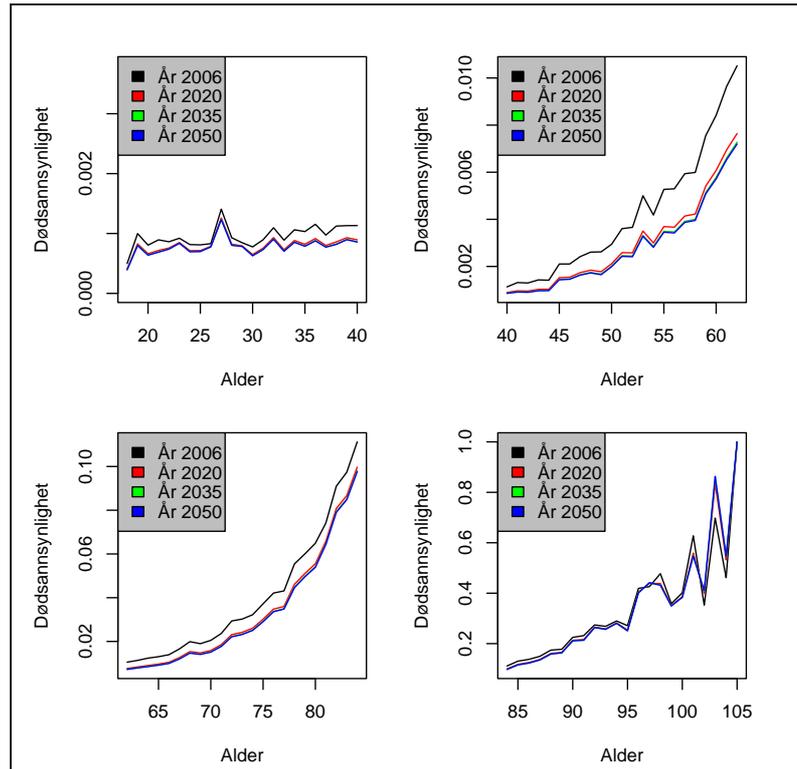
Figur 3.3: Simuleringer av tidsfunksjonen for noen utvalgte baner ved AR-tilpasning

Monte Carlo-simuleringer på k_t . Selv om tidsfunksjonen representerer den fremtidige dødeligheten, har denne vektoren hensyntatt historiske data. En burde benytte historiske verdier for å simulere fremtidig k_t , men veileders program gav ikke dette. Derav ble konklusjonen å simulere den fremtidige tidsvektoren på samme vis som vanlig teori tilsier.

Ved å tilpasse en AR(1)-modell på dataene får jeg at $\phi_m = 0.885$ og $\phi_k = 0.9189$ for henholdsvis menn og kvinner. Dette er tall som er i nærheten av 1 som betyr at stasjonæregenskapene kanskje ikke er god å benytte for tidsrekken vår.

For å gjøre meg opp en fullstendig mening har jeg valgt å se på tidsfunksjonen som både en stasjonær og ikke-stasjonær. I tillegg har jeg valgt å bruke Monte-Carlo simuleringer på tidsrekken og da trengs forventningen μ og standardavviket σ fra tidsrekken. Jeg fant forventningene til å være

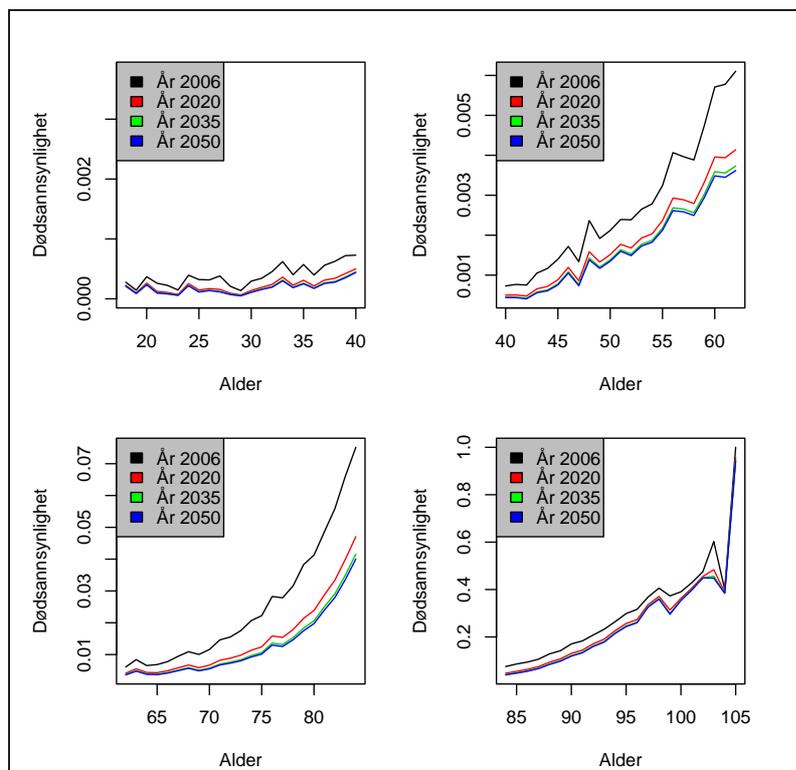
$\mu_m = -0.068$ og $\mu_k = -0.036$, samt standardavvikene til å være $\sigma_m = 0.123$ og $\sigma_k = 0.07$. Her bekreftes det at menn har mer variasjon i historien enn det kvinner har. Vi har i tillegg en negativ drift som betyr at k_t vil ha kurs nedover. Vi ser nå at simuleringene kan utføres siden vi nå har kjente parametere i likning (2.10). Jeg velger å simulere 10 000 potensielle baner på hvordan tidsrekken kunne se ut.



Figur 3.4: Dynamisk dødelighet for menn ved utvalgte år ved en AR-tilpasning

I figur 3.3 ser vi noen potensielle baner på hvordan rekken kunne sett ut for både menn og kvinner. Men for å representere den sanne kurven til k_t , har vi benyttet oss av forventningsverdien ved ethvert tidspunkt i simuleringen. Det betyr at vi står igjen med en kurve som da skal være tidsfunksjonen. Dette gjøres for både menn og kvinner.

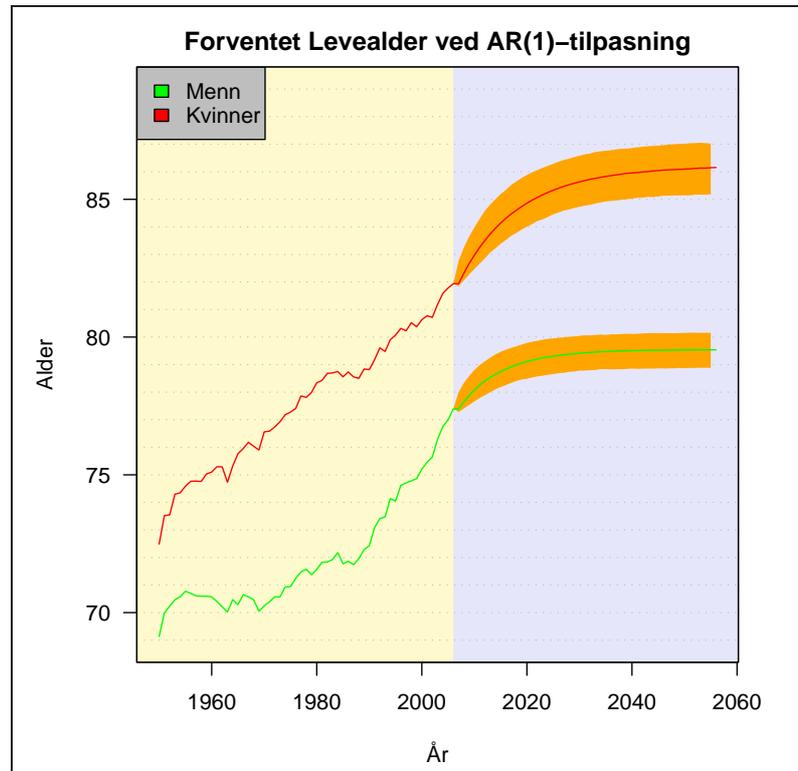
Nå som vi har vi har endret denne parameteren vil vi kunne modellere dynamisk dødelighet ved å bruke likning (3.2). Dette vil vise seg å gi en



Figur 3.5: Dynamisk dødelighet for kvinner ved utvalgte år ved en AR-tilpasning

viktig slutning som vi kommer til å konkludere med tilslutt. I figur 3.4 og figur 3.5 har vi plottet ut dynamisk dødelighet for menn og kvinner. For å gi en bedre illustrasjon, har jeg delt opp dødeligheten i aldersgrupper for å se visuelle forskjeller. I tillegg har jeg valgt ut noen år som vi kommer til å bruke som eksempler i resten av oppgaven. Det som er oppsiktsvekkende er at vi ser den dynamiske dødeligheten nærme seg en "stasjonær-dødelighet". Det jeg mener med en slik dødelighet er at endringene i dødeligheten blir mindre og mindre for hvert år du predikerer frem i tid. Dette ser vi også fra grafene for både menn og kvinner. Jeg har derfor en hypotese om at ved å predikere dødeligheten langt ut i tid, vil denne nærme seg stasjonær-dødeligheten. Det betyr at den dynamiske dødeligheten vil gå over til å være en statisk dødelighet.

Denne hypotesen blir bekreftet i figur 3.6, der vi ser at forventet levealder



Figur 3.6: Forventet levealder ved en AR-tilpasning

går mot en asymptotisk linje. Her ser vi klart at vi får statistisk dødelighet langt ut i tid. Vi observerer også at menn nærmer seg stasjonærdødeligheten raskere enn kvinner. Dette kan skyldes den jevne og lineære stigningen som kvinnene hadde i historien. I tillegg har vi lagt med et 95% konfidensintervall på hvor den sanne forventede levealderen vil ligge. Dette er egentlig 2.5% og 97.5% kvantilene i simuleringen for k_t , der vi har brukt disse kvantilene til å si hva dødelighetens nedre og øvre grense blir. Vi ser her at usikkerheten er liten i begynnelsen av prediksjonen, men blir større når vi predikerer ut i tid. Vi ser også at usikkerheten nærmer seg et stasjonærnivå. Dette er naturlig fordi usikkerheten holdes da fast i det vi ser på et statistisk grunnlag.

Vi ser at AR-tilpasning på tidsfunksjonen vil gi statistisk dødelighet ved en prediksjon langt ut i tid. For å være helt eksakt, vil vi få en stasjonærdødelighet når vi finner stasjonærnivået. Dette blir da fra formel side 18 som

undernevnt

$$\begin{aligned} \text{stasjonærnivå Menn} &= \frac{\mu_m}{1 - \phi_m} = -0.6252 \\ \text{stasjonærnivå Kvinner} &= \frac{\mu_k}{1 - \phi_k} = -0.4567 \end{aligned}$$

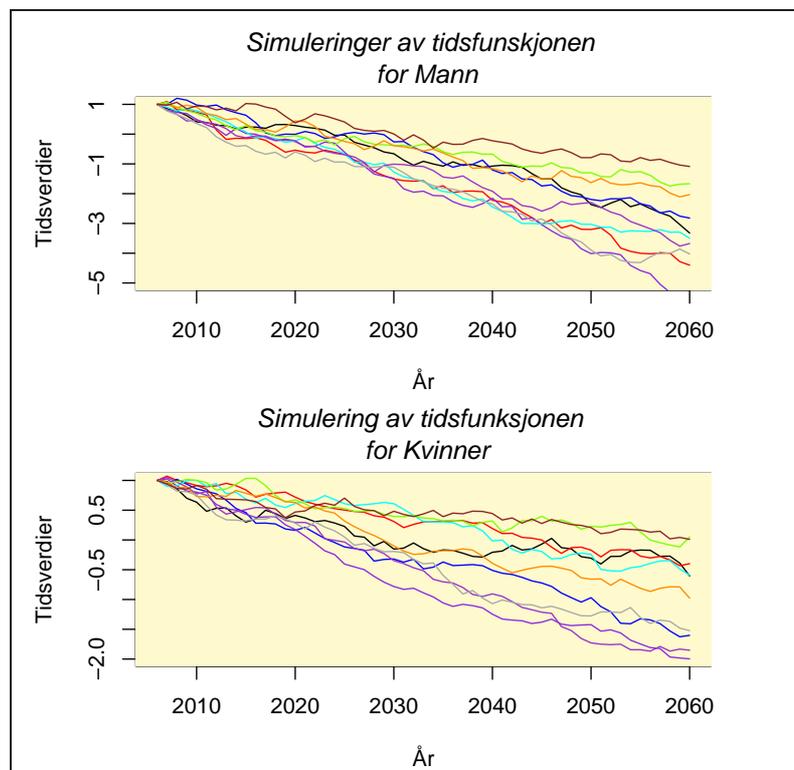
Vi får den indeksverdien i k_t som tilsier at vi har oppnådd stasjonærhet. Ved å ta en nærmere titt i simuleringene, ser vi at menn får stasjonærdødelighet etter 24 år, altså i år 2030. Tilsvarende tall finner vi ikke for kvinner i tidserien. Det betyr at kvinner ikke får stasjonærdødelighet i prediksjonen vi har foretatt oss. Om vi hadde predikert dødeligheten lengre ville vi også fått et stasjonærnivå for kvinner. Det vi derimot observerer fra figuren, er at den asymptotisk nærmer seg et stasjonærnivå. Dette skyldes at ϕ_k er veldig nær 1 som gjør at den tar lengre tid å nå stasjonærnivået sitt.

Som en konklusjon som vi kan ta med oss er at tilpasning av tidsfunksjon k_t til en AR(1) prosess og generelt andre stasjonære serier, vil gi oss den statiske dødeligheten ved lang predikeringsperiode. Ved nå å se på en tilfeldig gang, vil vi se hva som skjer med ikke-stasjonære serier.

3.4 Lee-Carter med tilfeldig gang

Ved å se på tidsfunksjonen som en random-walk blir det å sette $\phi = 1$ for både menn og kvinner i likning (2.10). Da blir dette ekvivalent som å bruke likning (2.9). Her vil prosessen ikke huske tilbake i tid og den vil kunne fluktuere fritt med gitt drift og standardavvik. Vi nevnte hva driften og standardavviket var for k_t i forrige seksjon. Dette vil bli benyttet på nytt. Vi bruker samme fremgangsmåte som ved den stasjonære prosessen og simulerer 10 000 potensielle baner for tidsrekken. I figur 3.7 har vi et utvalg av noen av banene og vi ser at disse kurvene fluktuerer mer enn ved en AR(1)-tilpasning. Det betyr at det ligger mer variasjon i tilfeldig gang og det vil vi snart oppdage. Vi vil også her bruke forventningsverdien til enhver tid til å representere den sanne tidsfunksjonen vår. Da får vi også en kurve som skal benyttes i modelleringen.

Vi kan nå bruke likning (3.2) igjen til å finne de dynamiske dødelighetene og i figur 3.8 og 3.9 har jeg gjort dette for menn og kvinner henholdsvis. Her ser vi at det ikke nærmer seg noe "stasjonærdødelighet" for menn og kvinner. Vi ser at den dynamiske dynamikken ivaretas. Vi ser at predikering langt ut i tid vil gi oss høyere forventet levealder og dette er noe vi ønsker.

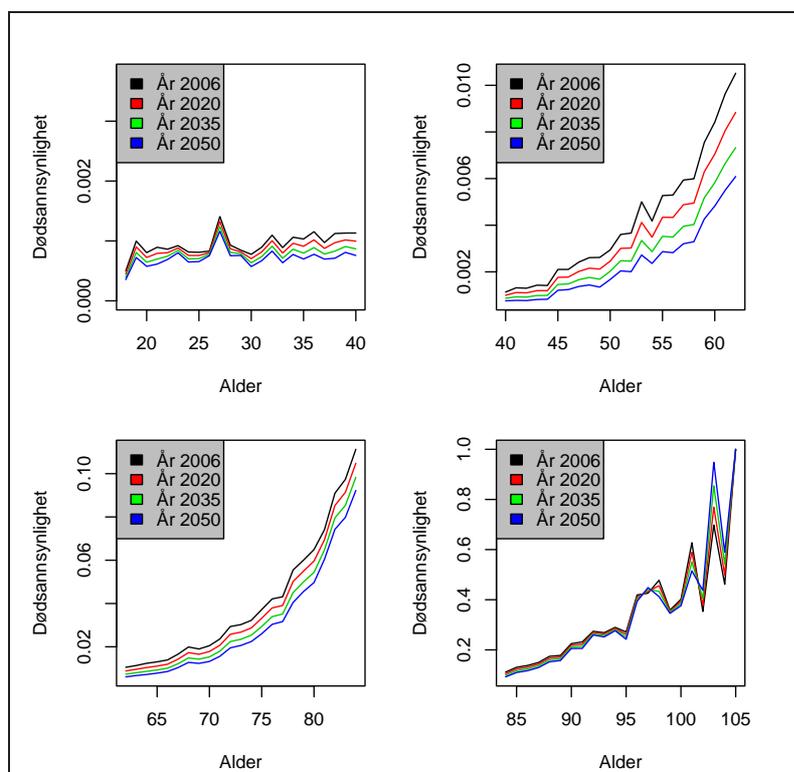


Figur 3.7: Simuleringer av tidsfunksjonen for noen utvalgte baner ved random-walk tilpasning

For å bekrefte hypotesen min om at "random-walk"-tilpasning gir oss dynamisk dynamikk, har jeg plottet ut forventet levealder med usikkerheten for den ikke-stasjonære tidserien i figur 3.10. Her ser vi en lineær vekst i forventet levealder og kvinner ligger ca 4-5 år jevnt over hele perioden. Vi ser at usikkerheten vokser lineært med tiden. Dette skjer fordi den underliggende tidsfunksjonen følger en brownsk² bevegelse. Dette er resultater som er viktig å konkludere med før vi går videre.

Om vi ønsker å bruke en AR(1)-tilpasning, er ikke dette feil fordi den sier bare at dødeligheten vil flate seg ut på et jevnt nivå ved predikering langt ut i tid. Dette virker logisk i den forstand at mennesker ikke vil leve uendelig

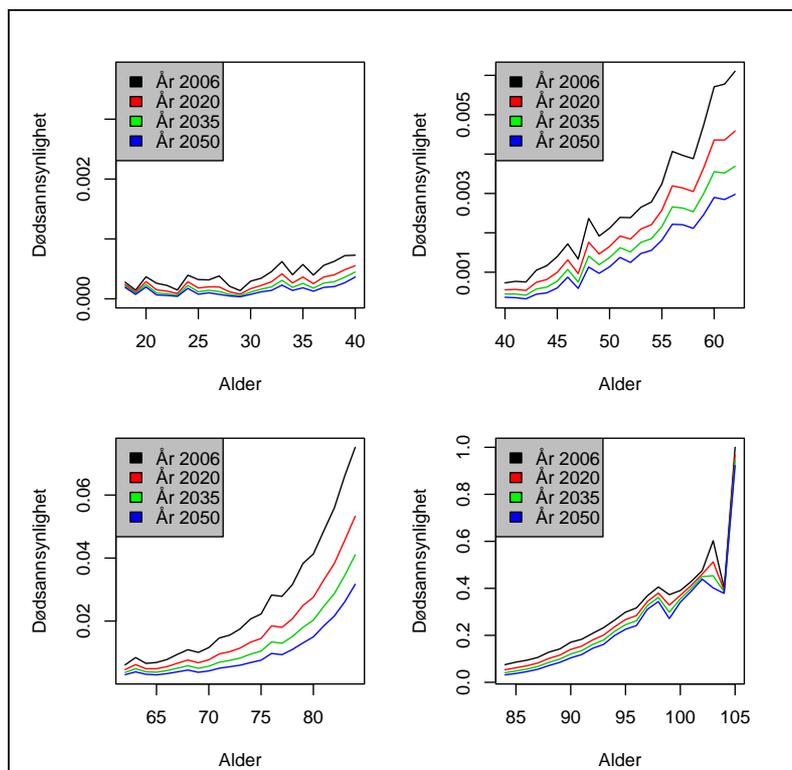
²Brownisk bevegelse tilsvarer en random walk modell der tilfeldige støyledd, drift og standardavvik styrer kursen. Brukes ofte til å modellere akje og obligasjoner



Figur 3.8: Dynamisk dødelighet for menn ved utvalgte år for en Random-walk tilpasning

lenge. Ved random walk tilpasningen, ser vi at i år 2100 vil forventet levealder være rundt 90-95 år. Dette virker heller ikke fornuftig. Så spørsmålet blir å finne ut hvilken modell vi skal bruke. Jeg velger meg bevisst å bruke en random-walk tilpasning på tidsserien k_t . Dette velger jeg fordi vi ønsker å se på dynamisk dødelighetsmodellering i denne oppgaven. Vi vil få dynamisk dødelighet uansett hvor langt vi velger å predikere og dette får vi ikke ved den stasjonære tidsfunksjonen. Som nevnt vil vi få forventede levealder som er høye i det neste millenniumet. Dette kan vi ikke si noe sikkert om før vi ser hva de faktiske (observerte) sannsynlighetene blir. Om vi hadde vært i år 2050 ville vi brukt dette som basisår og predikert nye 50 år. Da kunne vi sett hva forventet levealder ville vært i 2100.

Det som også er viktig å legge merke til er at hvis denne predikeringen med basisåret 2006 gir riktig bilde av utviklingen fram til 2050, kan vi si

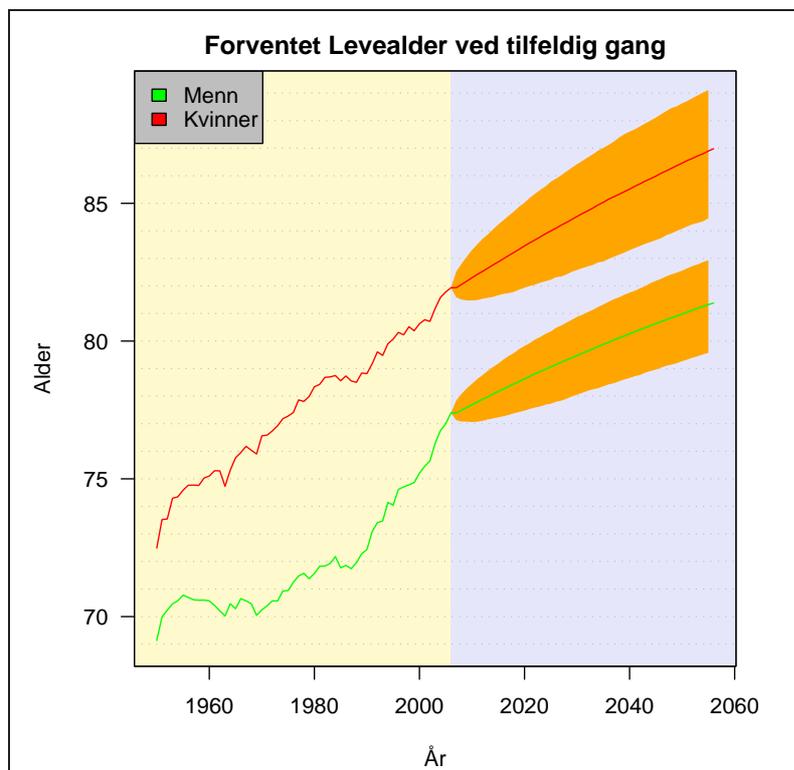


Figur 3.9: Dynamisk dødelighet for kvinner ved utvalgte år ved en Random-walk tilpasning

at modellen er god og residualene ville blitt standard normalfordelte. Dette vil kun tiden vise oss. Videre i oppgaven vil vi kun se på den dynamiske dødelighetsmodellen som har "random-walk"-tilpasning og dette blir den samme modellen vi vil bruke i forpliktelses og annen type beregninger.

3.5 Dynamisk dødelighetsmodellering

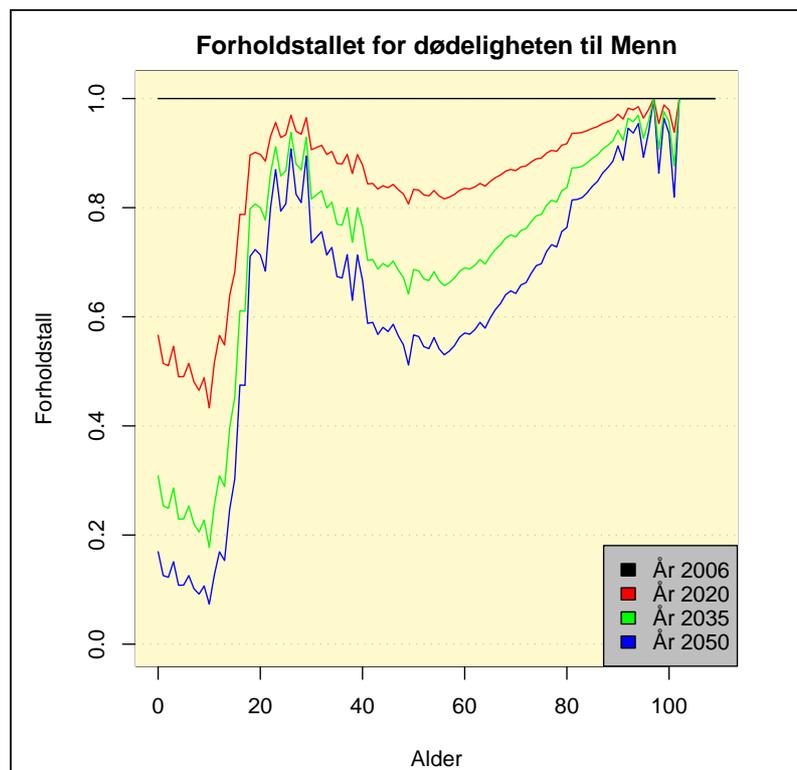
Nå som vi har antatt å bruke en sann dødelighetsmodell vil vi analysere hva modellens utfall blir. Ved å se først på menn ser vi i figur 3.8 at endringen fra år 2006 er minimal i små aldre. Vi ser at endringen blir større i aldre fra 25 år og oppover og igjen minimal i aldre fra 85 og til maksalder. I figur 3.9 ser vi at endringene er store i små aldre og fram til 95 år. Vi ser klart



Figur 3.10: Forventet Levealder ved en Random-walk tilpasning

at dynamisk dødelighet vil gi forskjeller for kvinner siden disse endringene er større enn det vi hadde for menn. Dette skyldes som sagt de små variasjonene som vi hadde for de kvinnelige historiske dataene som ble nevnt tidligere. Menn hadde mer variasjon i dataene sine, der forventet levealder steg og sank som gjør at endringer i dødeligheten blir mindre når vi sammenligner det mot basisåret. For å se i hvilke aldre som har størst og minst endring, har jeg valgt å legge det med. Dette kan fortelle oss om endringen blir størst for medlemmer som er blitt alderspensjonister eller ikke. Hvis dødelighetsendringen er størst for alderspensjonister vil dette gi oss større økonomiske konsekvenser fordi det er i aldre fra 67 og livsvarig utbetalingene forekommer.

I en pensjonskasse, vil vi kun konsentrere oss om aldre fra 20-95 år fordi det er der de fleste av medlemmene har sine aldre. Vi kan allerede nå forutse at forpliktelsene ved en alderspensjon vil bli mye høyere når medlemmer i aldersgruppen 20-30 år går av med pensjon om ca 40 år. Derfor må premien

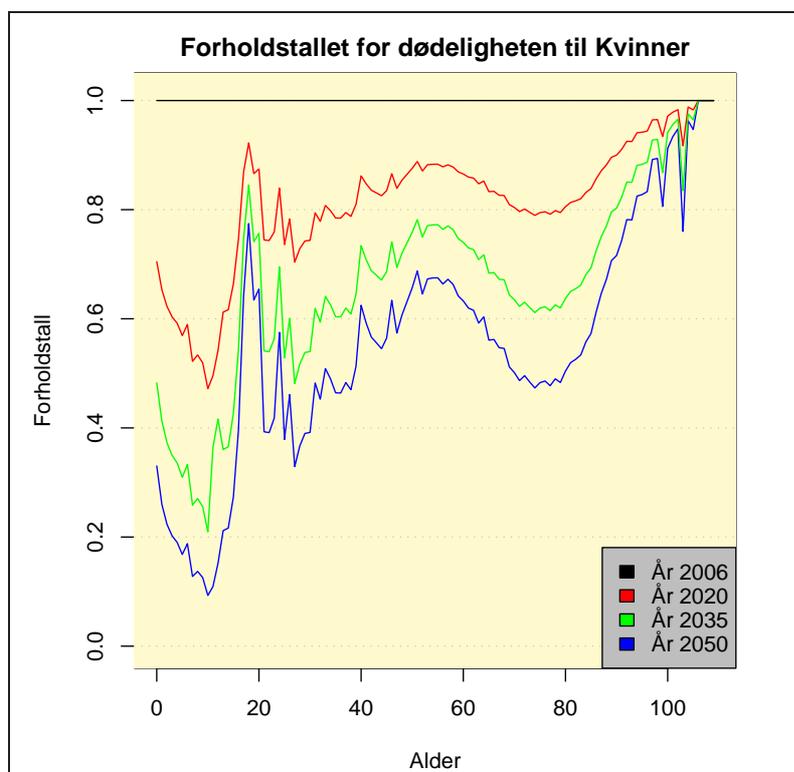


Figur 3.11: Forholdsfaktoren for dødelighetsgrunnlagene for År 2020, 2035 og 2050 mot statistisk dødelighet (År 2006) for menn

som innbetales til livselskapet i dag, bli høyere for at pensjonskassene ikke skal bruke mer av egenkapitalen sin for å dekke forpliktelser om 40 år.

I figur 3.11 ser vi at endringene i fremskrevet dødelighet for menn. Disse endringene er størst i små aldre dvs i 10-15 års alderen. Derimot er endringen minst i aldre 20-30. Dette kan skyldes en hyppighet i trafikkulykker blant norske unge menn i historien som vil gi oss minimal endring, eller andre faktorer som tilkommer i de aldre. Endringene er moderate i aldre 45-85 der det blir mindre og mindre endring jo høyere aldre vi ser på. Så vi kan konkludere med at det vil gi utslag i forpliktelser for menn, men ikke så mye i forhold til kvinner som vil se i neste figur.

I figur 3.12 ser vi forholdstallene for kvinnene og endringene er størst ved 18-20 årsalderen. I et pensjonskassesyn har ikke dette noe å si, da medlemsmassen i den unge alderen er lav. Vi ser at endringene er høye i aldre 65-80

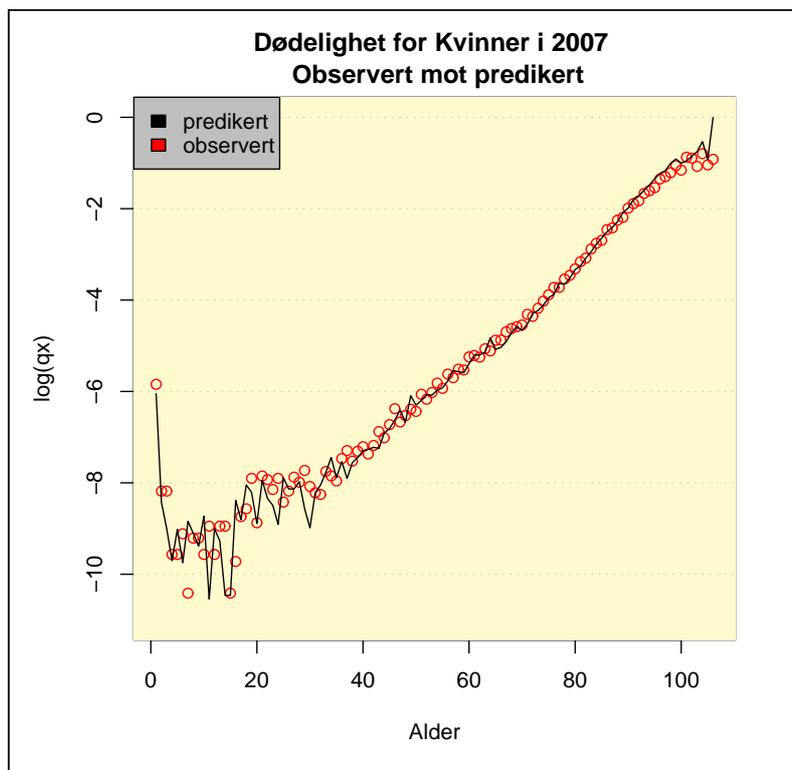


Figur 3.12: Forholdsfaktoren for dødelighetsgrunnlagene for År 2020, 2035 og 2050 mot statsisk dødelighet (År 2006) for kvinner

som vil gi oss mye høyere forpliktelse enn for menn. Spørsmålet blir å finne ut hva disse forpliktelsene blir for menn og kvinner og det finner vi ut når vi beregner reserver for pensjonskassen. Dette vil vi se i kapittel 4, men før vi går så langt vil vi teste ut Lee-Carter modellen på observerte dødelighetsrater.

3.6 SSB's observerte 2007 dødeligheter

Denne avhandlingen startet jeg med høsten 2007 og begynte for fullt i år 2008. I startfasen foretok jeg en del undersøkelser om dødelighet og fant ut at Human Mortality Database som tidligere nevnt gav dødelighetsrater for hele verden. Ved nærmere undersøkelser i etterkant, viste det seg at denne

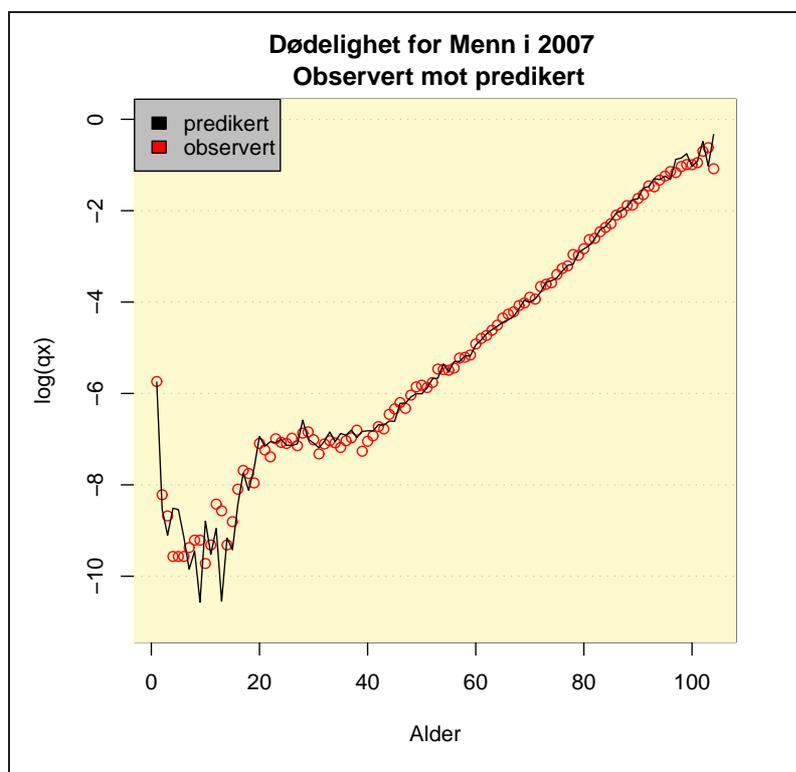


Figur 3.13: Dødelighetsobservasjoner i 2007 for kvinner

databasen får sine kilder fra Statistisk Sentralbyrå³. I sommer 2008 ser man at SSB har kommet med observerte tall for dødelighetsratene i 2007.

Dette er pålitelige observasjoner og SSB's data anses som sanne i den forstand at undersøkelsene deres er gjort under beste antakelser. Dette gir oss en glimrende mulighet til å kontrollere den predikerte dødeligheten i modellen mot de faktiske som er publisert. Her vil vi se om modellen er stabil og akseptert til å beskrive dødeligheten. I figur 3.13 har jeg plottet ut den predikerte dynamiske dødeligheten for året 2007 mot de observerte dataene for kvinner. Denne er på logaritmisk form for å se visuelle forskjeller. Vi ser at dødelighetsmodellen representerer observasjonene veldig godt. Det er noen avvik i lave aldre. Dette er aldre som er irrelevant i pensjonskassens sam-

³Byrå i Norge som driver med statistiske undersøkelser innenfor en rekke bruksområder i Norge



Figur 3.14: Dødelighetsobservasjoner i 2007 for menn

menheng, men igjen kunne vært interessant for skadeselskaper som forsikrer bil, helse og annet for ungdommer og studenter ned i 18-25 års alderen. Men igjen er det vanskelig å modellere dødeligheten for så unge aldre, ettersom dødelighetsratene i denne gruppen er ekstremt liten og slike observasjoner forekommer sjeldent. Det betyr at de eksponerte og utsatte i dette aldersgruppen er lav og kan slå ut helt tilfeldig i begge retninger. Med andre ord har vi høy varians i dødelighetssannsynlighetene i små aldre.

I figur 3.14 har jeg tilsvarende plottet for menn og vi ser det samme mønsteret her. Det ligger også mye støy i observasjonene i lave aldre og det skyldes som sagt høy varians og for få dødelighetsobservasjoner i denne aldersgruppen. Det som er verdt å merke seg er hvor godt modellen representerer dødeligheten i høye aldre. Her ser vi at den ligger rett på observasjonene fra alder 40 og opp til alder 100. Dette gjelder for begge kjønn. Det som også må noteres er de få observasjonene vi har i aldre over 100. Vi ser at modellen

klarer å representere observasjonene bedre for høye aldere enn for lave aldere selv om eksponeringen er så å si lik i begge aldersgrupper.

Vi ser klart at dette er en akseptabel modell for predikert 2007 dødelighet for begge kjønn. Vi veit at usikkerheten i modellen er lineær med tiden. Det betyr at observert 2020 dødelighet eller enda lengre fram i tid vil gi oss mer avvik i modellen enn det vi ser i 2007 dødeligheten. En fremtidig analyse blir å finne hvor stort avviket blir og i hvilke aldersspektre det er størst.

Videre har jeg testet Lee-Carter modellen under en χ^2 -test. Her kan vi konkludere med at modellen aksepteres der antall frihetsgrader er antall datapunkter fratrukket antall estimerte parametere. Vi fikk ingen signifikante avvik på denne testen. I en ny diskusjon med veileder kom vi sammen fram til at dette blir statistisk feil. I en χ^2 -test antar vi at datapunktene er uavhengige og standardnormalfordelte. Siden kvadratet av en standardnormalfordelt variabel gir oss en χ^2 fordelt variabel med 1 frihetsgrad, har vi bare sett på summen av disse variablene i denne testen.

Lee-Carter modellen er ikke deterministisk siden tidsfunksjonen anvender en stokastisk bevegelse. Derfor blir det feil å teste dette i en hypotesesetting som vi har foretatt. Det finnes andre mer kompliserte metoder for testing der den underliggende modellen er stokastisk. Dette krever mer stokastisk analyse og mer matematisk teori. Vi kan derfor som en aktuar se fra plottet at differanseavvikene er relativ små og at fremskrivningen i modellen er veldig god. Derfor kan en slik modell anvendes i praktisk sammenheng om en skulle ønske dette.

Vi skal nå se på en helt annen type modell. Dette er ikke en matematisk modell, men heller et eksempel på hvordan en kan kontrollere og styre risiko bedre. Det er et konsept som de siste årene har etablert seg i mange europeiske land og følger en bestemt standard og retningslinjer.

3.7 Solvency 2

Som vi har konkludert med vil forpliktelsene øke jevnt over med tida og derfor er passivasiden under en utfordrende tid. Vi oppdager mye usikkerhet i markedet i Norge og verden over. Blant annet har stormakten USA stor innflytelse på landene i Europa. Det kan virke som avhengighetsstrukturen er høyt korrelert i markedene, så derfor må forandringer til. Den Europeiske Union og mange andre ikke-EU land i Europa gått inn for et nytt konsept. Dette innebærer å omstrukturere den finansielle risikoen i markedet slik at

et usikkert marked ikke vil få katastrofale følger. Konseptet heter Solvency 2 og er et prosjekt som lanseres i 2012, men er under utvikling hele tida. Dette har sin opprinnelse fra prosjekter og konferanser som ble holdt i Basel i 2004 og derav fått navnet Basel⁴ II.

Solvency 2 vil prege aktivasiden mest, men passivasiden blir også endret. Solvency 2 vil blant annet sikre oss mot store økonomiske følger i dårlige tider. I dag opplever USA et krakk i boligmarkedet som påvirker Europa ettersom dollaren har sunket kraftig de siste 2-3 årene. Det at storbanker har gitt ut "råtne" boliglån til privatpersoner har medført tvangssalg, usikkerhet og ubalanse i finansmarkedene. Mange storselskaper må begjære konkurssalg og noen har fått krisehjelp fra sentralbankene i de respektive landene. Dette har medført at europeiske og asiatiske banker og finansmarked har merket denne støytten. Island, som nevnt i media, er det landet med størst gjeld og er i en finanskriser for tiden. Det jeg egentlig vil fram til er at avhengigheten er sterk og det påvirker europeiske land i dårlig retning. Derfor vil Solvency II konseptet hjelpe oss over tid.

QIS⁵-studiene er en del av beregningsmetodikkene som Solvency 2 legger fram for forsikring og finansinstitusjoner. Dette startet tidlig i år 2007 med QIS 1 og sommeren 2008 kom de med QIS 4. I Norge er det det norske Kredittilsynet som passer på at alle institusjoner følger de vedtatte regler og krav som QIS kommer med. Livselskap og banker må da utføre disse pålagte studiene og fremlegge resultatet for tilsynet. Dermed kan tilsynet kontrollere de kvantitative tapene som kan forekomme ved slike dårlige strategiske valg som gjøres i andre land. Et eksempel på dette er de dårlige lånene som var starten på en lang dominoeffekt.

Begrepet **Solvency** snakker for seg selv og betyr betalingsevne. Konseptet vil derfor styrke betalingsevnen i konsern og andre store og små bedrifter. Dette betyr økte reserver, økte premier og økt kapital på liv-og skadesiden. Skadeselskaper må øke solvensen sin ettersom katastrofer i markedet inntreffer oftere. Livselskaper må kunne dekke sine forpliktelser sikrere og beherske risikostyringen bedre. Dette er noe av det Solvency II konseptet byr på. Det som kjennetegner Solvency II er de tre pillarene som har samme likhetstrekk med Basel II prosjektene. Disse pillarene er en fremgangsmåte på hvordan en skal lage en solvensstandard som klarer å dekke opp all risikoen som for-

⁴Basel II er en internasjonal standard på hvordan en skal kontrollere finansiell og operasjonell risiko innenfor banker og finansinstitusjoner

⁵Quantitative Impact Studies

sikringselskaper eller bankinstitusjoner er eksponert for. Dette gjelder for aktiva og passivasiden. På aktivasiden skal selskapets eiendeler være vurdert til "fair value"⁶, mens på passivasiden skal forpliktelsene være kontrollert under markedsantakelser. De tre pillarene som kommer fra Solvency II prosjektet under Kredittilsynet er som følger

- Pillar 1 omfatter kvantitative krav til teknisk avsetning, solvenskapital og krav til minimumskapital
- Pillar 2 omfatter retningslinjer for tilsynsprosessen samt foretakets internkontroller og risikohåndtering (styring og kontroll)
- Pillar 3 omhandler markedsdisiplin, offentligjøring av informasjon om risikostyring, risikoeksponering og soliditet

Dette er krav som stilles til alle internasjonale foretak og som fortsatt er i en utviklingsperiode. Vi ser på Solvency II konseptet som en modell etter som retningslinjer og prosedyrer endres i livselskapene. Denne modellen/konseptet må benyttes på samtlige dødelighets, uføre- og finansmodeller som per dags dato har gyldig konsesjon fra Kredittilsynet. I den overordnede rollen som Kredittilsynet har, må de legge opp prosedyrer og fremgangsmåter som livselskaper og andre bank- og finansinstitusjoner må følge. I den siste tida har de kommet opp med stresstesting som skal være en del av utviklingsområdet under Solvency II. I kapittel 5 tar vi for oss hvordan disse stresstestene formuleres og hvordan de utføres i praksis.

⁶Fair value, også kalt fair price, er et konsept brukt i finans og økonomi, definert som en rasjonell og forventningsrett estimat på en potensiell markedspris. Dette kan være råvarer, aksjer eller andre typer verdipapirer.

Kapittel 4

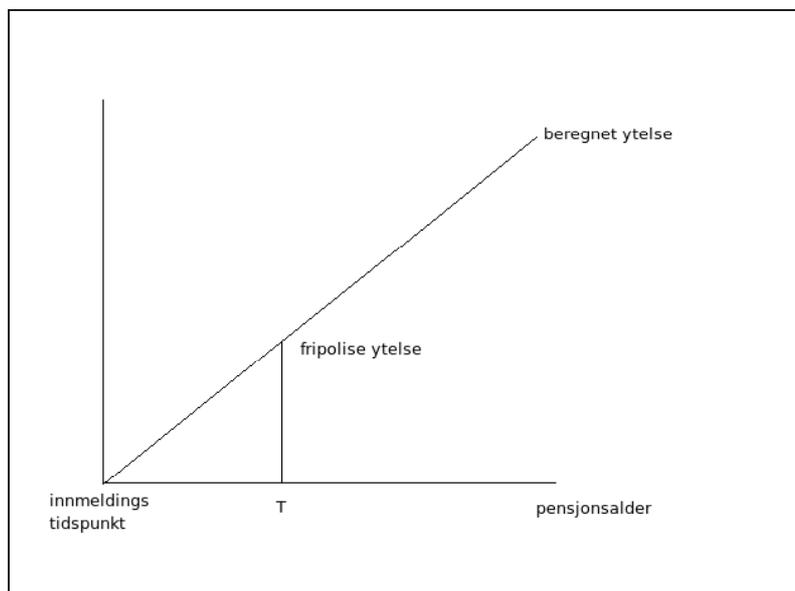
Reserver under dynamisk dødelighet

Vi har nevnt ordet reserve uten å gi en korrekt forklaring på hva det egentlig står for. Vi kan si at en reserve er en slags sikring som pensjonskassen må ha for å kunne gi de ytelsesbeløpene som medlemmene i pensjonskassen har krav på. Ytelsen på en alderspensjon er nevnt i formel (2.8) på side 17. Dette er den beregnede ytelsen medlemmet har krav på ved oppnådd pensjonsalder. For å fastslå en reserve i dag for dette medlemmet vil vi ikke se på den beregnede ytelsen, men heller den ytelsen som er opptjent. Dette kalles i aktuarspråket for fripolise.¹ Denne fripolisytelsen vil starte på null og gå lineært mot den beregnede ytelsen. Det er her begrepet lineær opptjening kommer fra ettersom medlemmet må opparbeide pensjonen sin over tid. For å finne ytelsen på fripolisen må vi vite når medlemmet ble innmeldt i kassen, den beregnede ytelsen og selvsagt beregningstidspunktet. Når vi vet denne informasjonen for medlemmet vil fripolisen bli som følger

$$\text{ytelse fripolise} = \text{beregnet ytelse} * \frac{T}{N}$$

der $N = \text{pensjonsalderstidspunkt} - \text{innmeldingstidspunkt}$ og T er gitt som $T = \text{beregningstidspunkt} - \text{innmeldningstidspunkt}$. Dette gjelder samtlige 4 ytelser som medlemmene i en normal pensjonskasse har rett på. Fra figur 4.1

¹Fripolise er en pensjonsrett som medlemmet har krav på. Dette er den opparbeidete ytelse medlemmet får hvis det meldes ut fra ordningen. Da vil pensjonskassen utstede en fripolise som blir flyttet ut av ordningen. Som regel vil denne fripolisen overføres til et livselskap, men kan også gå inn i den pensjonsordningen der nye arbeidstaker blir innmeldt.



Figur 4.1: Lineært opptjeningsprinsipp som benyttes i kollektiv pensjonsforsikring

ser vi hvordan den lineære opptjeningen ser ut. Hvis medlemmet er nyansatt vil fripolisen være relativ liten i motsetning til en som har noen få år til pensjonsalder. Denne lineære opptjeningen er basisgrunnlaget for kollektiv pensjon. I virkeligheten påvirker reguleringer i lønn og G ytelsen og da vil den beregnede ytelsen trekke seg lengre oppover og den lineære stigningen endrer bane. Men slike antakelser ser vi vekk ifra ettersom det ikke er relevant for oppgaven.

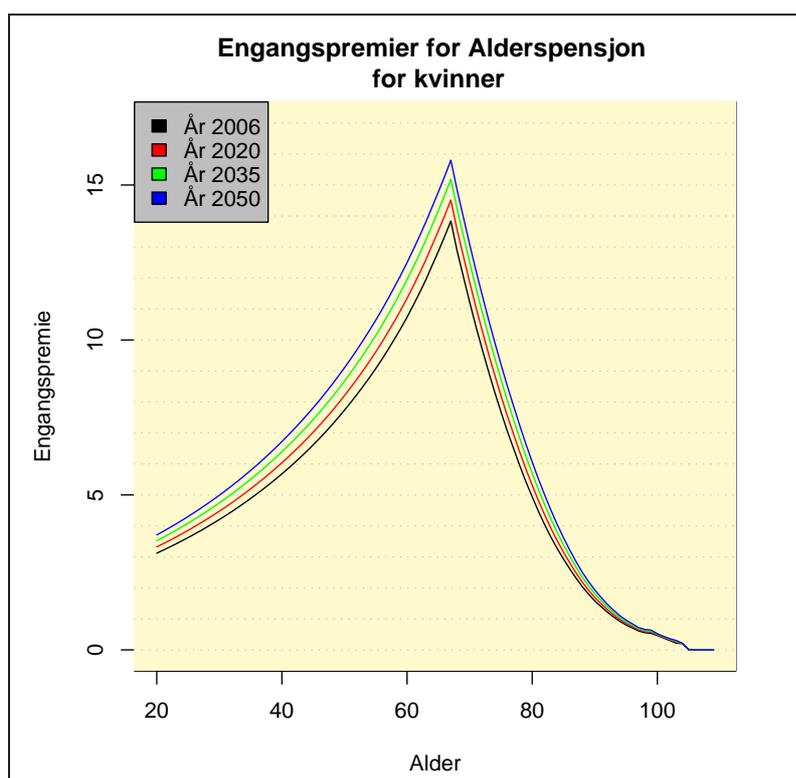
Vi ser nå at vi lett kan finne fripolisen til medlemmet og når den er gitt kan vi også finne reserven. Reserven på ytelsene finner vi ved å se på fripoliseopptjeningen, engangspremien og noe som heter administrasjonsreserve. Disse tre variablene utgjør en reserve og formelen blir som følger

$$\text{Total Reserve} = \text{ytelse fripolise} * \text{engangspremie} * \text{adminreservefaktor} \quad (4.1)$$

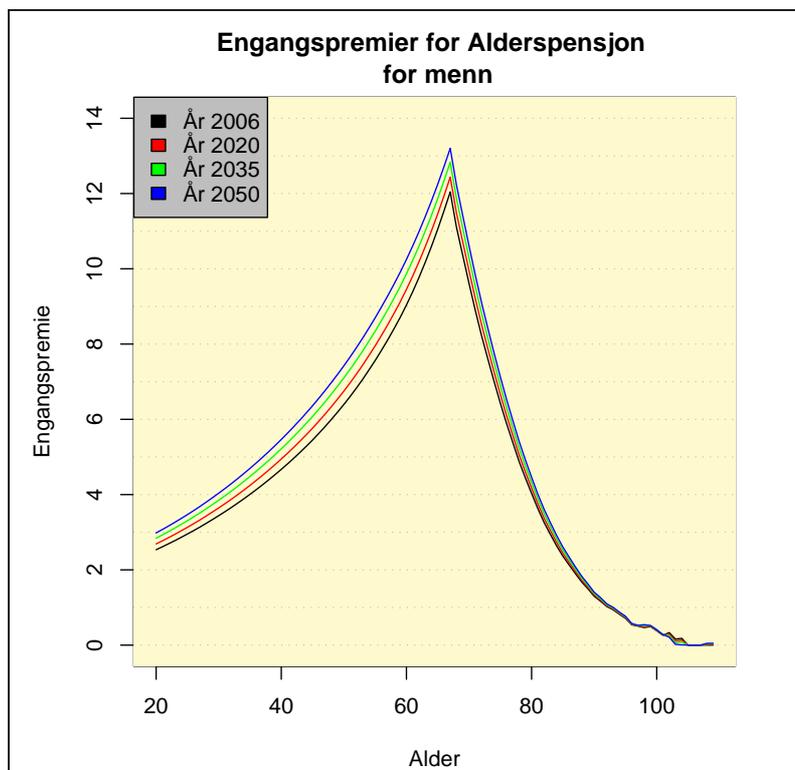
Faktoren for administrasjonsreserven er som regel en fast konstant. Men denne konstanten kan implementeres som en funksjon avhengig av alder, ytelse og kjønn. Hos Gabler & Partners ligger konstanten som regel på 1.03 og er en reserve som skal dekke de kostnader som påløper for å admin-

istrere premieinnbetalinger og pensjonsutbetalinger for medlemmet. Siden pensjonskassen er hentet hos Gabler & Partners, vil administrasjonsreserven også være tilsvarende. Engangspremien er den faktoren der dødeligheten (og renten) inngår og det er med hjelp av denne at endringene i totalreserven kan beregnes.

I dette kapitlet skal vi ta en nærmere titt på en reell pensjonskasse som er i kraft der ansvarshavende aktuar har ansvar for denne pensjonskassen. Det som kan nevnes er at dette er en 66 % ordning og samtlige 4 ytelser er med i denne kontrakten. Disse dataene har jeg fått utlevert av av det overnevnte selskapet og grunnet taushetsplikt vil ikke ytterligere opplysninger nevnes. Grunnen til at vi bruker en ekte pensjonskasse er for å oppfylle kravene som stilles i Solvency 2. Det ble nevnt at virkelige data skulle brukes, så om Gabler & Partners skulle være interessert i reserveendringene kan dette presenteres for styret i pensjonskassen.



Figur 4.2: Dynamisk engangspremie for alderspensjoner for kvinner

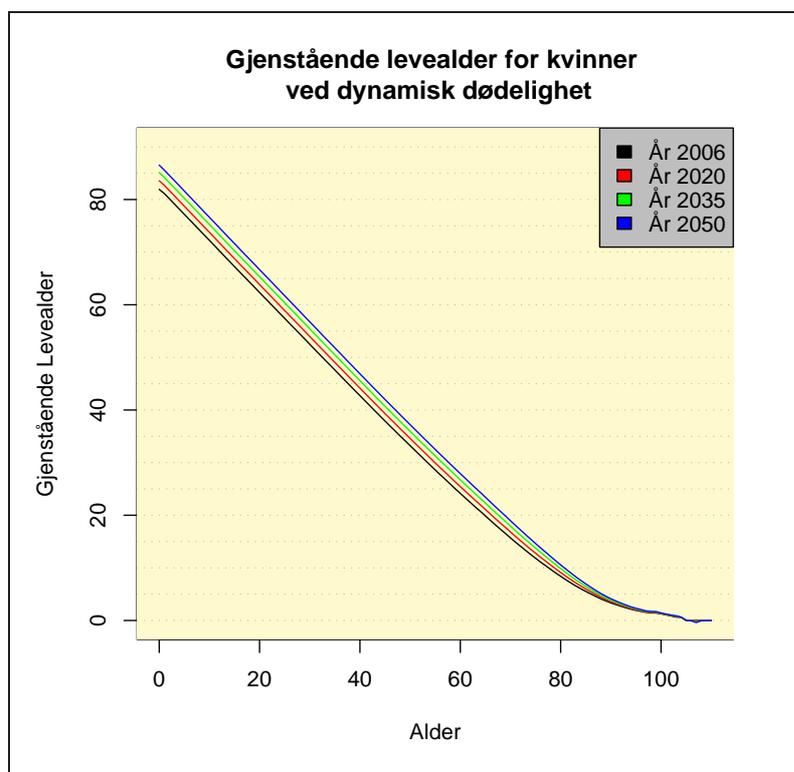


Figur 4.3: Dynamisk engangspremie for alderspensjoner for menn

4.1 Dynamisk engangspremie

I kapittel 3 fastslo vi den dynamiske dødeligheten som gjør at vi tilsvarende vil få dynamiske engangspremier. Dette ser vi fra likning (2.6) og (2.7) for kontinuerlig og diskret tilfelle. Vi ser at engangspremiene vil endre seg ettersom vi bruker forskjellige $q_{x,T}$. Vi har igjen benyttet de utvalgte årene for T . For å fastslå fremtidige dynamiske reserver, må vi ha dynamiske engangspremier. Vi nevnte tidligere i oppgaven at engangspremiene kan ha enten tre eller fire prosent diskonteringsrente. For denne kassen har jeg benyttet meg av 3% diskonteringsrente og vi ser fra figur 4.2 og 4.3 dynamisk engangspremier for kvinner og menn henholdsvis.

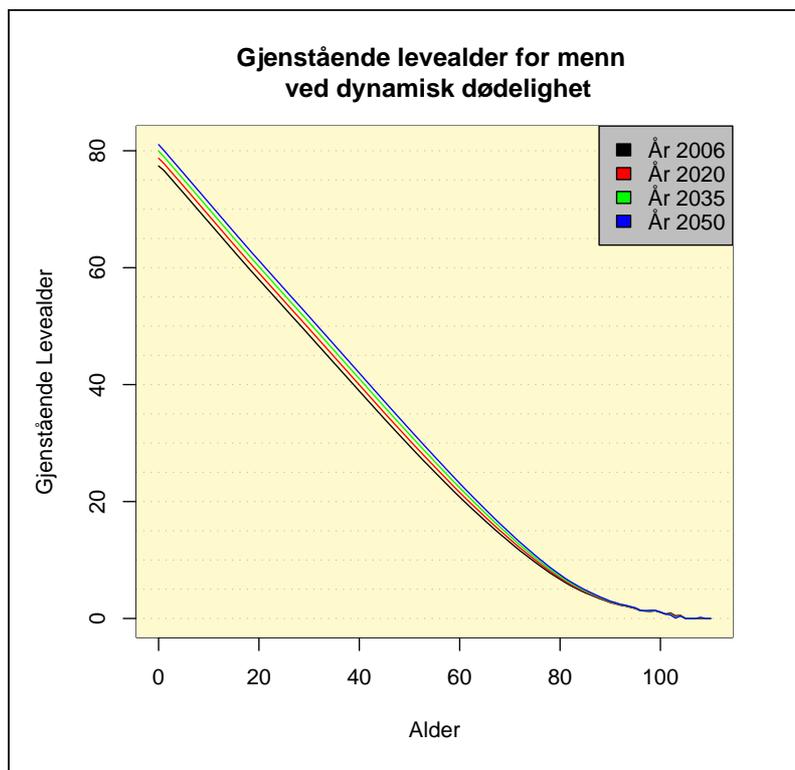
Disse grafene for menn og kvinner har identisk utseende, men skalaen er ulike for menn og kvinner. Den starter fra 2-3 og går opp til 12-13, litt



Figur 4.4: Gjenstående levealder for kvinner ved dynamisk tariff

forskjellig fra om det er menn eller kvinner. Deretter er kurven fallende fordi q_x -sannsynligheten blir større og større for aldre og ved maksalder på 110 år vil denne asymptotisk gå mot 0. Vi ser at endringer i den dynamiske engangspremien er større før pensjonsalder enn etter pensjonsalder for begge kjønn. Dette skyldes valg av dødelighetsmodell og ikke minst hvor endringene i dødeligheten ligger. Dette henger sammen med forholdsgrafene i kapittel 3 og hvor endringene var størst.

Som nevnt tidligere i seksjon 2.3, er dette en skaleringsfaktor på alderspensjonsytelsen. Ved å se nærmere på kurven ser vi at engangspremien stiger med årene. Dette får vi fordi det er større og større sjanse for en yrkesaktiv å oppnå pensjonsalder ettersom en blir eldre og fordi renten teller mindre jo kortere tid vi regner over. Derfor må vi reservere i mye større grad og det er det engangspremien forteller oss. Vi ser at den dynamiske dødeligheten vil gi oss engangspremier som er høyere ettersom dødeligheten blir strengere.



Figur 4.5: Gjenstående levealder for menn ved dynamisk tariff

Engangspremien får et toppunkt ved pensjonsalder, da medlemmet bytter tilstand fra aktiv og blir alderspensjonist. Her skal medlemmens pensjon være fullfinansiert der arbeidsgiver årlig har innbetalt premie på medlemmene. Nå vil utbetalingene finne sted ved at det hvert år betales ut et fast bestemt ytelsesbeløp. Reserven vil da bli mindre for hvert år ettersom gjenstående løpetid for pensjonen blir mindre. Her ser vi selvsagt bort fra G-reguleringer på løpende pensjoner som i realiteten forekommer. Dette vil øke ytelsen og dermed reserven.

I figur 4.4 og 4.5 ser vi forventet gjenstående levealder for menn og kvinner. Dette tar vi med fordi vi vil se hvor lenge en 67 åring har igjen å leve. Her har vi benyttet likning (2.5) i kapittel 2 for alle mulige aldre og ved $x = 0$, får vi den forventede levealderen som igjen stemmer med livsforsikringsteori. Begge kurvene er fallende, men uten noen store visuelle endringer i kurvene. For å få med konkrete tall har jeg i tabell 4.1 satt opp gjenstående levealder

	År 2006	År 2020	År 2035	År 2050
Mann	15.215	15.826	16.454	17.057
Kvinne	18.163	19.351	20.531	21.615

Tabell 4.1: Tabell over gjenstående levealder ved oppnådd pensjonsalder i det dynamiske tilfellet

for en 67 åring for begge kjønn. Vi ser her at vi forventer at en nypensjonert mann har 15.21 år igjen å leve, mens en kvinne har 18.16 år. Disse gjenstående levealdrene øker gradvis med årene og dette stemmer siden vi har lavere dødelighet frem i tid.

Ved å igjen se på engangspremiefunksjonen ser vi med 2006 dødelighet at vi har avsatt 12 ganger ytelsen for menn og 14 ganger ytelsen for kvinner ved pensjonsalder. Siden det ikke er flere innbetalinger i form av premie, blir reserven redusert med utbetalte ytelser årlig for medlemmene. Derfor forteller engangspremien etter pensjonsalder, hvor mye vi må ha reservert i forhold til ytelsen.

Vi har nå sett at engangspremien er et særdeles viktig verktøy og dette anvendes støtt og stadig blant aktuarer og livsforsikringsselskaper. I neste seksjon vil vi se analysen av pensjonkassen og ikke minst hvor mye reservene øker for alderspensjoner siden modellen tilsier høyere gjenstående levealder, og lengre pensjonsutbetalingstid.

4.2 Reserveøkning for alderspensjoner

Vi vil nå analysere hvordan forpliktelsene for alderspensjoner endrer seg over tid. Dette er en ytelse som utbetales fra 67 år og livsvarig om ikke kontrakten tilsier noe annet. Vi vil se på reserveendringene over de årene vi har illustrert tidligere i oppgaven og vi vil senere oppdele det etter kjønn for å se om våre tidligere konklusjoner gjelder.

Denne kassen har 112 medlemmer som har retten på en alderspensjon. Dette kan være personer som er aktive, uføre eller alderspensjonister. Ved å gjøre dette konkret, har jeg delt opp bestanden etter kjønn og tilstander som vist i tabell 4.2. Dette har jeg gjort for å se hvor økningen ligger og på hvilke grupper i kassen som har mest eller minst økning. Dette pensjonsforetaket har en blandet bestand, og her kan reserveøkningen bli langt større eller langt mindre enn for andre foretak med en annen bestandsfordeling. I en

	Menn	Kvinner	Total
Aktive	38	46	84
Uførepensjonister	1	5	6
Alderspensjonister	9	13	22
Sum	48	64	112

Tabell 4.2: Tabell over pensjonsbestanden etter kjønn og tilstand

pensjonskasse der flertallet er pensjonister, vil vi ikke hatt så høy prosentvis økning som vi hadde hatt i et foretak som er nyopprettet med nyutdannede og unge folk. Vi ser at vår pensjonskasse har flertallet av aktive for begge kjønn som betyr at reserveendringene vil være høye. Når vi senere i oppgaven skal prise reassuranskontrakter vil vi også se at pensjonskassebestanden er relevant for hvordan prisen blir. Dette vil vi komme tilbake til. Nå som vi har pensjonskassen på plass med riktig ytelsesberegning kan vi finne totalreserven.

Tidligere i pensjonberegningens historie hadde man ikke lineær opptjening, men heller en annen form for opptjening. Lov om foretakspensjon i kraft fra 2001, bestemmer at alle medlemmer i kollektiv pensjonsforsikring skal ha lineær opptjening innen 2011. Ved en nærmere undersøkelse viste det seg at denne pensjonskassen endret dette like etter loven trådte inn så vi trenger ikke å ta hensyn til eventuelle underreservering i forhold til lineær opptjening.

I tabell 4.3 har vi en fullstendig oversikt over hvordan totalreserven for pensjonskassen utvikler seg for utvalgte år. Dette gjøres under den forutsetningen at medlemsbestanden, ytelsene og aldre holdes fast. Det eneste som endrer seg er dødelighetskurvene som vi benytter. Dette gjøres fordi vi er interessert i hvordan valgt dødelighetskurve faktisk får en reserve til å gå opp eller ned. Det jeg kunne ha gjort var å fremskrive pensjonskassebestanden samt ytelsene, men det ville ikke vært nøyaktig fordi vi må gjøre opp antakelser på hvordan overgangssannsynlighetene blir for denne bestanden. I tillegg ville det vært naturlig at medlemmer i bestanden forlater kassen og nye medlemmer kommer inn. Siden vi ikke kan forutse utviklingen på dette, ser vi kun på bestanden i uttrekket.

Ved å se nærmere på tabellen igjen ser vi klart at reservene har gått opp for begge kjønn og alle tilstander. Som vi ser er det en betydelig forskjell i kroner. Vi ser at for den statiske 2006 dødeligheten ligger reservene for begge kjønn i overkant av 12 millioner kroner, men for dynamisk 2050 dødelighet får reservene en økning på menn og kvinner på henholdsvis 1.5 og 2.1 mil-

Reserver for alderspensjoner			
		Menn	Kvinner
År 2006	Aktive	8 129 677	7 407 098
	Uførepensjonister	477 421	1 118 854
	Alderspensjonister	3 541 438	3 802 586
	Sum totalreserve	12 148 536	12 328 538
År 2020	Aktive	8 530 987	7 839 160
	Uførepensjonister	497 013	1 178 934
	Alderspensjonister	3 662 343	4 044 866
	Sum totalreserve	12 690 343	13 062 960
År 2035	Aktive	8 926 766	8 267 995
	Uførepensjonister	516 609	1 238 414
	Alderspensjonister	3 787 957	4 298 198
	Sum totalreserve	13 234 332	13 795 607
År 2050	Aktive	9 295 971	8 663 549
	Uførepensjonister	534 737	1 293 152
	Alderspensjonister	3 908 866	4 518 989
	Sum totalreserve	13 739 574	14 475 690

Tabell 4.3: Tabell over reserveendringer for tilstander og kjønn i kroner

Prosentvis endring for alderspensjoner mot statistisk dødelighet			
		Menn	Kvinner
År 2020 vs År 2006	Aktive	4.936%	5.833%
	Uførepensjonister	4.104%	5.370%
	Alderspensjonister	3.414%	6.371%
	Sum totalreserve	4.460%	5.957%
År 2035 vs År 2006	Aktive	9.842%	11.623%
	Uførepensjonister	8.208%	10.686%
	Alderspensjonister	6.961%	12.797%
	Sum totalreserve	8.938%	11.900%
År 2050 vs År 2006	Aktive	14.346%	16.963%
	Uførepensjonister	12.005%	15.578%
	Alderspensjonister	10.375%	18.840%
	Sum totalreserve	13.097%	17.416%

Tabell 4.4: Prosentvis endring for alderspensjoner med dynamisk dødelighet versus statistisk dødelighet

Prosentvis endring for alderspensjoner mot dynamisk dødelighet			
		Menn	Kvinner
År 2020 vs År 2006	Aktive	4.936%	5.833%
	Uførepensjonister	4.104%	5.370%
	Alderspensjonister	3.414%	6.371%
	Sum totalreserve	4.460%	5.957%
År 2035 vs År 2020	Aktive	4.674%	5.470%
	Uførepensjonister	3.943%	5.045%
	Alderspensjonister	3.430%	6.041%
	Sum totalreserve	4.287%	5.609%
År 2050 vs År 2035	Aktive	4.101%	4.784%
	Uførepensjonister	3.509%	4.420%
	Alderspensjonister	3.192%	5.357%
	Sum totalreserve	3.818%	4.930%

Tabell 4.5: Prosentvis endring jevnt over tid i fremskrivningen

lioni kroner. Her ser vi klart at valg av dødelighetstariff har mye å si for en pensjonkasse.

Vi ser vi at det er 38 aktive menn og 46 aktive kvinner i bestanden. Ved å gjøre en nyttig observasjon ser vi at reserven for aktive menn er høyere enn reserven for aktive kvinner selv om det er flere kvinner i foretaket. Det kan virke litt rart ettersom vi har begrunnet med at kvinner lever lenger og at de har en høyere engangspremiefunksjon. Dette skyldes rett og slett at menn lønnes bedre enn kvinner i de fleste sektorer som gjør at beregnet ytelsesbeløp og fripoliseverdi blir høyere. Ser vi fra formel (2.8) ser vi at pensjonsgrunnlaget er en vesentlig viktig faktor som avgjør hvor høy ytelsen blir.

Videre er vi interessert i å se hvilke grupper som får den høyeste prosentvise endringen fra statistisk 2006 dødelighet. I tabell 4.4 har vi laget en prosentvis økning versus 2006 dødelighet. Det som vi konkluderte med istad var at det var en økning på 1.5 og 2.1 millioner kroner. Dette blir da en prosentvis økning på 13.09% og 17.42% henholdsvis som viser den totale økningen i reserven i et 45 års spekter. Av og til er vi interessert i å se den gradvise utviklingen som vekker mer interesse enn "dagens" dødelighet. I tabell 4.5 har jeg derfor sett på den gradvise økningen.

Vi ser at den gradvise økningen er størst fra 2006 dødelighet til 2020

dødelighet. Den største reserveøkningen for menn gjelder de aktive med hele 4.94%. Vi ser så at uførereserven går opp med i overkant av fire prosent og alderspensjonistene har den minste reserveøkningen. Dette stemmer godt overens med figur 3.11 der vi ser at endringen er stor for aldre under pensjonsalder. Den røde grafen viser endringen for 2020 dødelighet og vi ser at denne har et bunnpunkt på ca 50 år.

Den største økningen til 2020 dødeligheten for kvinner gjelder de som er pensjonister og med hele 6.37%. Her ser vi at det må reserveres mer for kvinnelige pensjonister siden historiske data sier at de lever lenger. Det vi også ser på figur 3.12 er at endringen er stor for kvinner i 72-75 års alderen som forklarer hvorfor økningen er størst for kvinnelige alderspensjonister. Vi ser også fra figuren at de største endringene i dødeligheten ligger i lave aldre, men aldersanalysen i medlemsbestanden forteller at andelen aktive i spekteret 18-25 er relativt liten. Derfor vil alderspensjonistene få den største økningen i reserver.

Nedover i tabellen ser vi at økningen avtar for samtlige tilstander og kjønn. Dette fordi vi hadde en kraftig økning med en gang vi gikk fra statisk og til dynamisk dødelighet. Så om vi hadde hatt en situasjon der et pensjonsforetak hadde bestemt seg for å bytte om fra statisk til dynamisk beregningsgrunnlag, ville endringen blitt stor i det øyeblikket, og styret i pensjonskassen må da vurdere om det finnes tilstrekkelig med avsetninger for å dekke reservendringen.

Vi har nå sett på konsekvensen av dynamisk dødelighet i pensjonsforetaket og kan derfor konkludere med at pensjonsmidler må økes og det må betales inn høyere premieinnbetalinger til livselskapet eller pensjonsforetaket. Her ligger ansvarsområdet på selve bedriften eller foretaket. De må derfor informeres av livselskapet eller den ansvarshavende aktuaren for det foretaket om at høyere innbetalinger må forekomme. Vår hypotese om høyere reserver og premieinnbetalinger er nå bekreftet med faktiske tall og det anbefales at livselskaper og andre foretak benytter følgende analyse. Vi sier oss nå ferdig med dynamisk dødelighet og reserveøkning i første omgang. Dette vil vi igjen se på seinere i kapittel 5, men først skal vi se på stresstesting som er en del av Solvency 2 konseptet.

Kapittel 5

Kredittilsynets stresstesting

Som vi nevnte sist i kapittel 3 vil vi se nærmere på stresstesting som pålegges av Kredittilsynet. Det som er i søkelyset for tiden er **risikobasert tilsyn**. I en artikkel¹ publisert av Kredittilsynet 30.06.08, har et panel lagt fram retningslinjene i risikobasert tilsyn. I denne artikkelen finner vi moduler som er utarbeidet av tilsynet og som er tilpasset forsikringssekskapenes virksomhet. Disse modulene gir en metode som prøver å identifisere de viktigste risikofaktorene et selskapet står ovenfor. Det er forskjellige moduler for forskjellige typer risiko. Tilsynet pålegger selskapene å benytte modulene i henhold til hva slags virksomhet de driver med. Siden oppgaven vår omhandler dødelighet, vil modulen forsikringsrisiko være aktuelt å bearbeide. Innenfor denne modulen finner vi igjen punkter som nevnes og de er som følger

- uførhetsrisiko
- premierisiko
- dødelighetsrisiko
- opplevelsesrisiko
- motpartsrisiko
- katastroferisiko

¹Artikkelen ligger tilgjengelig på nett med følgende adresse http://www.kredittilsynet.no/archive/f-avd_word/01/09/Modul013.doc.

Det vil falle naturlig å se på dødelighetsrisiko, men jeg vil i tillegg se på motpartsrisiko. Motpartsrisiko er å se på hvordan risikoen til reassurandør endrer seg. Vi er da interessert i en analyse over risikoen reassurandør påtar seg og hvordan denne risikoen endrer seg over tid. Tilslutt vil vi også se på prisen som en kollektiv pensjonskasse må betale reassurandør for diversifiseringen av risikoen.

5.1 Dødelighetsrisiko

Dødelighetsrisiko er definert som risikoen som ligger i endringer i dødsintensitetene. I vår dynamiske dødelighet er dødsintensiteten ikke gitt fra veileders program, så vi velger å se på dødssannsynlighetene istedet. I praktisk sammenheng har ikke dette store innvirkninger. I kapittel 2 ser vi hvordan vi utledet dødssannsynlighetene utifra intensitetene. Vi kan se at dødsintensitetene er tilnærmet lik dødssannsynlighetene.

Videre i tilsynets artikkel har de igjen delt opp dødelighetsrisiko i to punkter. De skiller mellom "tilfeldige feil" og "estimeringsfeil". Tilfeldige feil skyldes det observerte dødelighetsutfallet mot forventet dødelighetsutfall i ett års perspektiv. Her ser vi da på residualene til prediksjonen for modellen. Estimeringsfeil skyldes feil som ligger i estimeringsalgoritmen for dødelighetsmodellen. Vi ser at dette er uavhengige metoder og til syvende og sist er det valg av dødelighetstariff som avgjør dødelighetsrisikoen.

5.1.1 Tilfeldige feil

Statistisk sett skyldes det at et dødsfall inntreffer kun den stokastiske naturen en befinner seg i. Det vi da mener med tilfeldige feil, er at et dødsfall kan inntreffe når en minst forventer det, men det er en viss sannsynlighet for at dødsfallet inntreffer. Det vi kan si er at det faktiske dødelighetsutfallet vil fluktuere rundt modellens kurve hvis modellen er god nok. Tilsynet har kommet med en utledning på hvordan en kan måle tilfeldige feil i dødelighet. De sier at den beste antakelsen om dødelighetsutfallet kan skrives som

$$\text{BAU} = \sum_{i=1}^N q_i * R_i \quad (5.1)$$

og standardavviket til den beste antakelsen om dødelighetsutfallet kan skrives som

$$st(\text{BAU}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N q_i * (1 - q_i) * R_i^2} \quad (5.2)$$

der BAU er beste antakelse om dødelighetsutfallet summert på alle forsikrede liv, q_i er de ettårige dødssannsynlighetene og R_i er risikosommene for de forsikrede. Det de mener med beste antakelse heter i statistikkenspråket "maximum likelihood estimatet" eller "moment estimatet". Dette er å bruke reelle historiske data og tilpasse en modell etter ønsket modellstruktur. Modellens parameter vil da få de "beste" parametrene til å beskrive historien og prediksjonen. Det er akkurat det hele kapittel 3 går ut på. Vi vil senere i oppgaven komme tilbake til risikosummer og hvordan de er definert. Tapspotensialet for tilfeldige feil blir å ta 99,5% kvantilen i en normalfordeling multiplisert med det empiriske standardavviket. Dette blir da

$$TP_T = 2.58 * st(\text{BAU})$$

Her ser vi at tapspotensialet får en grense når vi sier at vi vil ha 99.5% største tapet med som tapspotensialet. Det betyr at vi ved tilfeldig variasjon får det beløpet pensjonsforetaket må avsette. Dette er det beløpet de kan tape om det verste skulle skje med medlemmene i pensjonsforetaket.

5.1.2 Estimeringsfeil

For å kunne kontrollere estimeringsfeil, nevnes det av tilsynet at en må stresser dødsintensitetene opp og ned med en skaleringsfaktor. Etersom våre dødsintensiteter er tilnærmet lik dødssannsynlighetene, vil vi stresser $q_{x,t}$ for den valgte Lee-Carter modellen. Det nevnes i artikkelen at skaleringsfaktoren bør settes til 10% i alle aldre som betyr at vi får en 10% oppgang og nedgang. Siden vi har et dynamisk tilfelle må vi stresser dødeligheten i den fremskrevde dødeligheten og se på reserveforskjellene som foreligger i pensjonsforetaket. Tapspotensialet for estimeringsfeil i følge tilsynet er gitt på følgende formel

$$TP_E = \max\{SA^+ - BA; SA^- - BA; 0\} \quad (5.3)$$

der vi har at SA^+ er reserveøkning i dødelighetstariffen, SA^- er reservereduksjon i dødelighetstariffen og BA er den reserven vi har under den beste antakelsen for dødelighetstariffen.

5.1.3 Samlet tapspotensial

Ved å se på samlet tapspotensial ser vi på summen over begge tapspotensialene i kategoriene. Vi har at estimeringsfeil og tilfeldige feil er to uavhengige metoder for å måle risikoen i dødeligheten på. Ettersom risikoene er uavhengige med nullkorrelasjon blir det samlede tapspotensialet for dødelighetsrisiko gitt som

$$TP = \sqrt{TP_T^2 + TP_E^2} \quad (5.4)$$

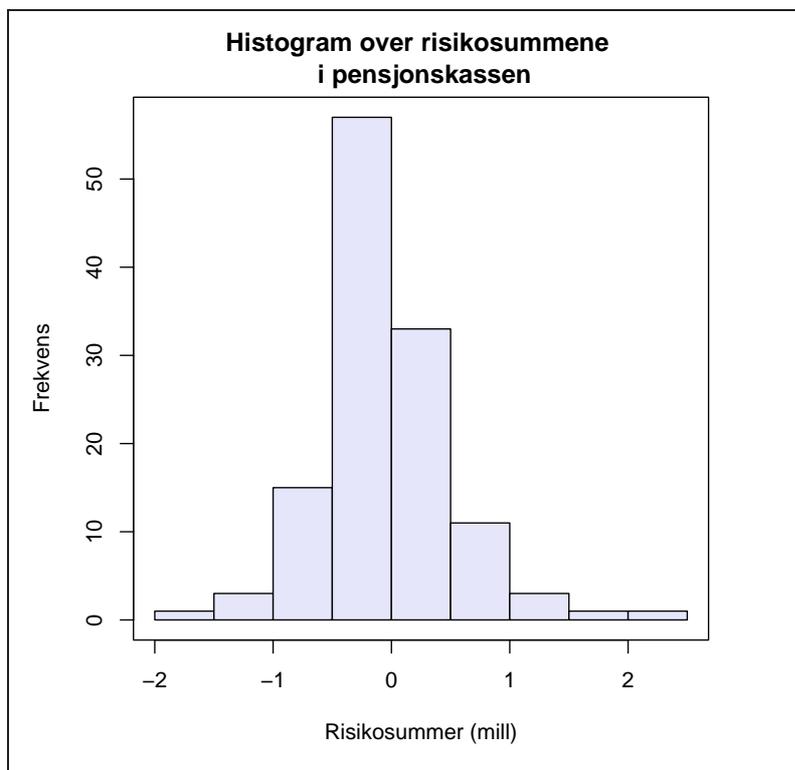
Da vil TP være det tallet som gir oss tapspotensialet for de forsikrede i selskapet eller pensjonskassen. Kredittilsynets stresstesting for dødelighetsrisiko er i mitt subjektive synspunkt veldig "enkelt" i den forstand at vi kun benytter oss av faktiske observasjoner og ingen stokastikk. Om en skulle ha mer sikre og tilfeldige resultater må en ty til Monte Carlo simuleringer.

I en VaR-analyse benytter vi oss av slike stokastiske simuleringer og finner det maksimale tapspotensialet for en gitt sannsynlighet. For å illustrere forskjeller og likheter i begge metodene, skal vi videre i oppgaven se på tilsynets stressmetode og se på VaR-analyse for dødelighetsrisikoen. Ved å se på to ulike metoder vil vi se hvor store forskjeller det utgjør på reserver og ikke minst i prisningsalternativene i reassuranskontraktene som vi kommer til i kapittel 6.

5.2 Tilsynets dødelighetsrisiko i foretaket

Vi vil som tidligere se på pensjonskassen med de faktiske dataene. Vi benyttet oss av risikosummer i formelen for forventningen og standardavviket til BAU og en kort beskrivelse av risikosummer er som følger. Risikosummer er en summert verdi per medlem på alle ytelsene medlemmet har krav på. Disse summene avhenger av reserve, alder, kjønn og ytelse til medlemmet. Det foreligger en del kompliserte formler som benyttes i pensjonskassene, men grunnet begrensning av oppgavens omfang ser vi kun på risikosummer som gitte data.

Ved å se på fordelingen til risikosommene ser vi at disse ligner på normalfordelte risikosummer. Om vi hadde hatt flere medlemmer ville denne vært normalfordelt ifølge sentralgrenseteoremet. Siden en risikosum avhenger av alder, ytelse og kjønn vil bestanden i foretaket være avgjørende for hvordan risikosommene fordeler seg. Hadde vi hatt en bestand med flertall av unge, aktive, høytlønnede medlemmer ville vi fått en stor risikoeksponering i mot-



Figur 5.1: Risikosummene i foretaket

setning til for alderspensjonister. Dette fordi vi må se på totalreserven til medlemmet mot risikoeksponeringen. Hvis risikoeksponeringen er større enn reserven, får vi positive risikosummer og motsatt negative risikosummer om risikoeksponeringen er mindre enn reserven.

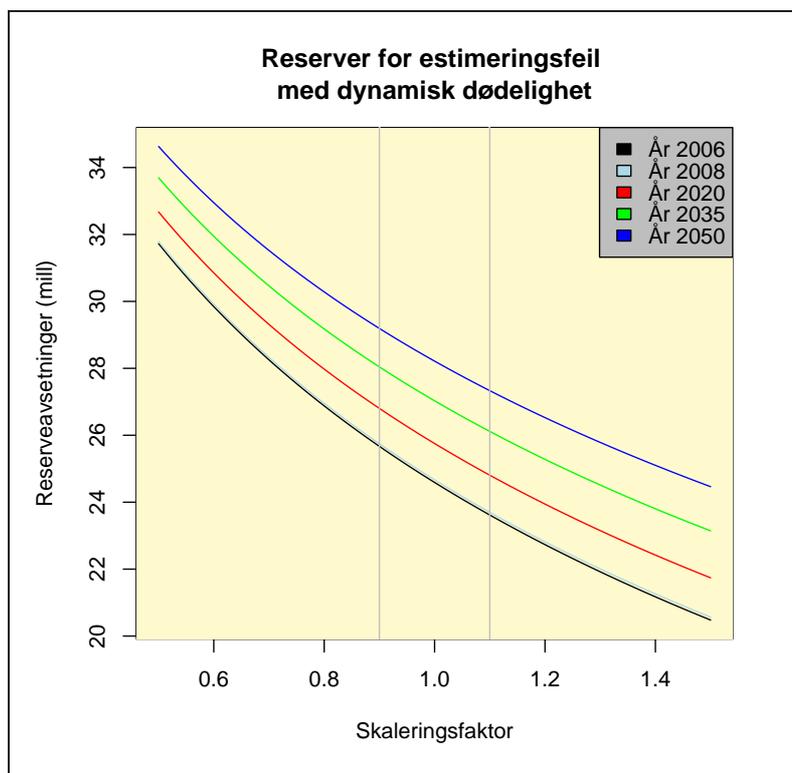
Derfor vil en bestand med flertall av unge nyutdannede gi høy risikoeksponering fordi reserven blir lavere i motsetning til en 60 åring eller en alderspensjonist. Dette ser vi av engangspremien som er størst i aldre 60-75 for begge kjønn som vil gi en høy reserve og derav negative risikosummer. Siden vår bestand visuelt er normalfordelt får vi forventet risikosum på -53 944, mens 99.5%kvantilen er på 2 002 620.

Neste steg blir å løse de nevnte formlene som tilsynet har kommet med for dette foretaket. Det første vi finner er beste antakelse for dødelighetsutfallet og deretter standardavviket til BAU. Fra formel (5.1) og (5.2) fant vi at $BAU = -530\,726$ og $st(BAU) = 517\,326$ for denne kassen. Her har vi brukt

predikert dødelighet i 2008 som "den beste antakelse" om dødelighetsutfallet fordi stresstesting ble utført våren/sommeren 2008. Nå som vi har forventning og standardavviket under beste antakelse finner vi tapspotensialet for tilfeldige feil gitt som

$$TP_T = 2.58 * 517\,326 = 1\,334\,703$$

Her ser vi at foretaket kan tape 1.3 millioner kroner om dødelighetsratene ved tilfeldige feil slår til. Det som gjenstår er å se på tapspotensialet ved



Figur 5.2: Estimeringsfeil ved bruk av dynamisk dødelighet

estimeringsfeil. Vi øker den ettårige dødssannsynligheten med 10% i begge retninger. I figur 5.2 ser vi økt $q_{x,t}$ med en skaleringsfaktor som går fra 0.5 til 1.5. Dette bare for å illustrere hvor mye reservene øker eller minker. I tillegg ser vi også på dynamisk reserveutvikling over tid gitt at bestanden ikke endrer seg. Jeg har også trukket to vertikale linjer i plottet som tilsier

	SA ⁺	BA	SA ⁻
År 2006	23 502 248	24 477 074	25 568 362
År 2008	23 698 359	24 669 287	25 746 003
År 2020	24 806 215	25 753 303	26 802 415
År 2035	26 114 592	27 029 939	28 042 975
År 2050	27 332 479	28 215 264	29 191 825

Tabell 5.1: Tabell over reserveendringer med dynamisk dødelighet ved stress av q_x med 10%

hvilken skaleringsfaktor tilsynet vil at vi skal benytte under stresstesting. I tillegg viser vi de tallene vi får i tabell 5.1 for å se hvordan reservene endrer seg med dynamisk dødelighet. Vi vil så regne ut tapspotensialet gitt for estimeringsfeil og ved formel 5.3 får vi at

$$\begin{aligned} TP_E &= \max(23\,698\,359 - 24\,669\,287; 25\,746\,003 - 24\,669\,287; 0) \\ &= 1\,076\,716 \end{aligned}$$

Nå som vi har dette på plass finner vi at samlet tapspotensial for denne kassen blir i følge formel (5.4)

$$\begin{aligned} TP &= \sqrt{1334703^2 + 1076716^2} \\ &= 1\,714\,861 \end{aligned}$$

Vi ser at tapspotensialet for denne kassen ligger i overkant av kr 1.7 millioner gitt at risikosommene er uforandret. Her ser vi at fordelingen av samlet tapspotensial er nesten likt fordelt mellom tilfeldige feil og estimeringsfeil. Vi ser at usikkerheten er litt større i tilfeldige feil enn ved estimeringsfeil.

Grunnen til at tilsynet har kommet med denne form for stresstesting, er blant annet tilpasning til Solvency 2. En annen grunn er fordi mange liv og forsikringsselskaper benytter i dag dødelighetstariffen K2005 som vi har nevnt innledningsvis i oppgaven. Denne er igjen ikke så sikker som den burde være og derfor vil man se på utfallet ved å skalere dødssannsynlighetene ned.

Som en konklusjon på det vi har gått gjennom hittil, kan vi si at tapspotensialet for tilfeldig feil og estimeringsfeil er som nevnt tidligere er "enkel" å bruke. En trenger kun observerte data og dermed er stresstesting foretatt. Vi skal i neste seksjon vise hvordan en kan stresse dødelighet på pensjonsforetak ved å anvende stokastiske formler og ikke deterministiske formler som

i tilsynets modell. Det kreves tilsvarende simuleringer som vi gjorde for tidsfunksjonen i Lee-Carter modellen, men det blir en del modifiseringer siden vi ikke ser på en tidsrekke men tilfeldige feil og avvik. Vi skal se på tilfeldige feil og estimeringsfeil seperat, slik at vi velger å dele opp dette i 2 risikoer og ikke se på en samlet risiko.

5.3 Monte-Carlo simuleringer på dødelighetsrisiko

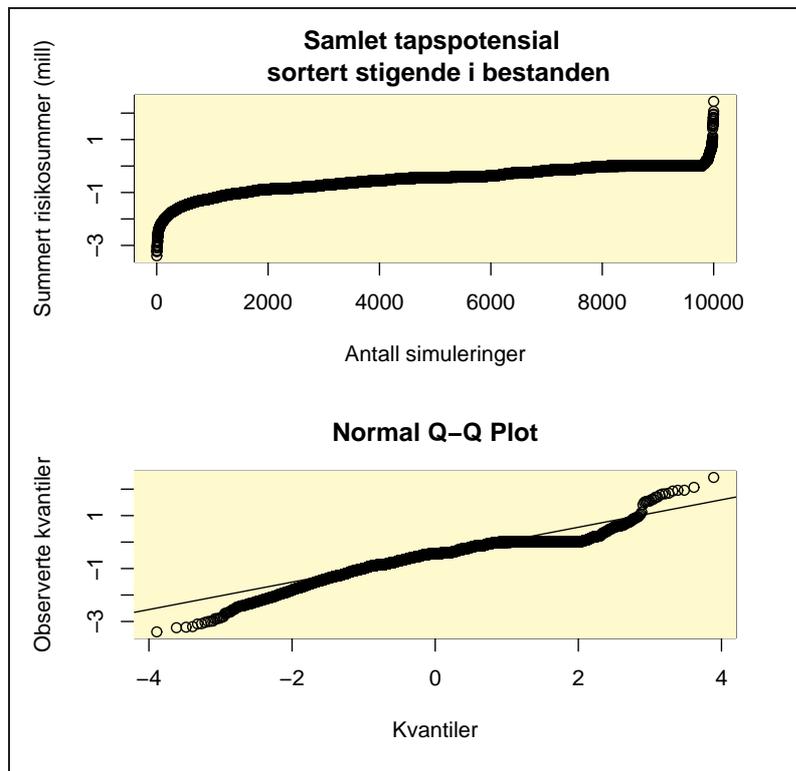
I denne seksjonen skal vi se på hvordan dødelighetsrisikoen endrer seg om man benytter seg av stokastikk gitt den informasjonen vi har. Det vi må benytte oss av er de faktiske observasjonene som tilsynet også anvender i formlene sine. Istedenfor å summere opp på faktiske data, vil vi simulere bestanden og se hvor mange som dør ettersom vi har ettårige dødssannsynligheter for alle medlemmene.

5.3.1 Simuleringer på tilfeldige feil

Den enkleste og mest robuste å måten å utføre dette på, blir å trekke tilfeldige uniformfordelte tall mellom 0 og 1. Om q_x verdien for medlemmet er større enn det tilfeldig trukne tallet, dør medlemmet og risikosummen til den bortfalne blir med i beste antakelse om dødelighetsutfallet. Denne prosedyren kan gjentas N ganger og vi får da N forskjellige tapspotensial for tilfeldige feil. Dette har vi foretatt og vi benyttet 10 000 simuleringer.

I figur 5.3 har vi vist hvordan samlet tapspotensial blir ved simuleringene. Øverst ser vi at ved å sortere de potensielle tapene ser vi at flesteparten av simuleringene gir dødsfall med medlemmer som har enten negativ eller null i risikosum. Ved nærmere undersøkelser viser det seg at overkant av 200 simuleringer fører til et positivt tapspotensial for foretaket. Det betyr at det er kun 2% sjanse ved tilfeldige simuleringer som medfører risikoutbetalinger utover det som er i premiereserven. Av de to prosentene ser vi at disse risikoutbetalingene har en eksponensiell vekst i utbetalingsstørrelse. Så om en skulle forvente det verste for dette foretaket må en ut med nærmere 2 mill i utbetalinger.

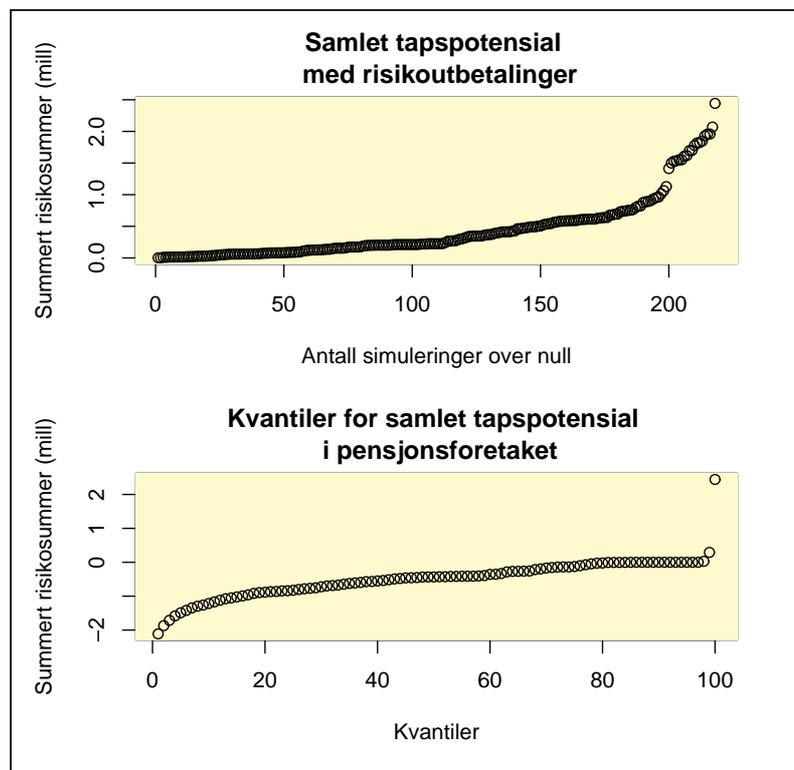
Lenger ned på figuren har vi tatt et QQ-plott som impliserer hvordan de simulerte risikosommene er i forhold til normalantakelsen som vi så på risikosommene i figur 5.1. For at de simulerte summene skal være normalfordelte, må disse ligge rett på linjen. I vår figur ser vi at de ikke gjør det fordi de går



Figur 5.3: Simuleringer med samlet tapspotensial for tilfeldige feil og QQ-plot

nedenfor linjen på negative risikosummer og ovenfor linjen på positive risikosummer. Dette tyder på at risikosommene våre ikke er normalfordelte, men heller tunghalet fordelt. Dette ser vi klart i begge retninger, men igjen veit vi at de økonomiske konsekvensene ligger på positive risikosummer. Her ser vi at selve histogrammet over risikosommene viste oss en nesten tilnærmet normalfordeling selv om antall medlemmer er lavt, men at tapspotensialet av den grunn blir ikke normalfordelt.

I figur 5.4 har jeg tatt for meg simuleringene med positivt utslag på risikosommene. Som vi nevnte var dette over 200 simuleringer og det er i dette plottet det faktiske tapspotensialet ligger for kassen. Så vi ser ved simuleringer at det ved verste fall kan medføre et tap på 2.5 millioner i et "worst-case" tilfelle. Men vi kan desverre ikke skille på det positive og det negative tapspotensialet, fordi vi vil se på det samlede tapspotensialet for tilfeldige feil for alle medlemmene. Derfor har jeg under i samme figur plottet

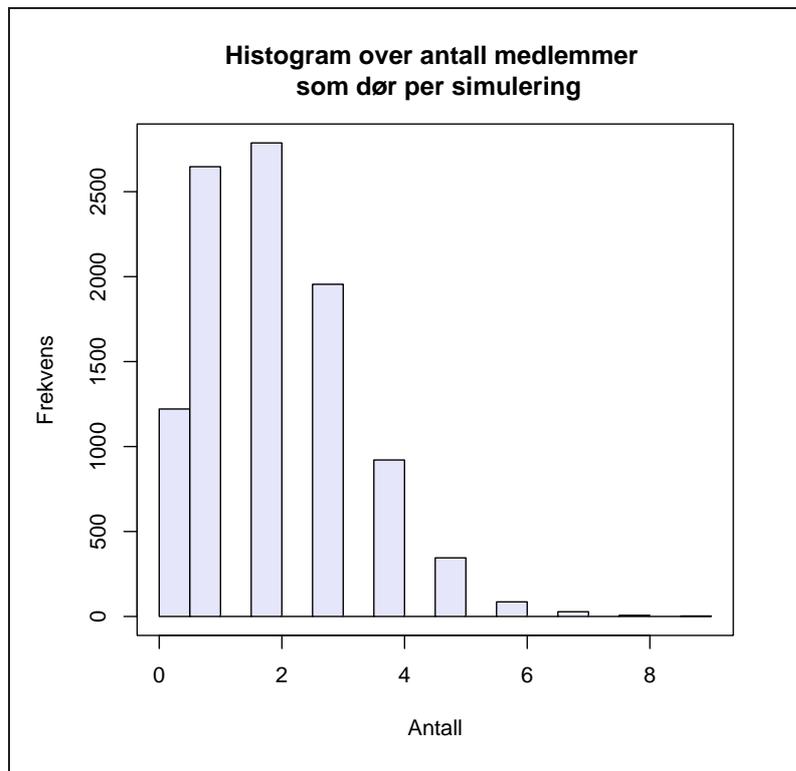


Figur 5.4: Kvantiler og positivt tapspotensial i foretaket

kvantilene til det samlede tapspotensialet som vil gi kvantiler som er mindre enn kvantilene på kun positivt tapspotensial. Dette blir riktig i forhold til solvenskravet som trengs når solvenskravet avhenger av kvantilstørrelsen.

Solvenskravet i følge Value at Risk prinsippet blir å se på 99% eller 99.5% kvantilen. Dette avhenger igjen av regler og forskrifter som Kredittilsynet publiserer. Vi ser at 99% kvantilen for samlet tapspotensial for tilfeldige feil for simuleringene havner på kr 312 645 og for 99.5% kvantilen havner vi på kr 1 377 633 .

I figur 5.5 har jeg tatt med et histogram over hvor mange som dør i simuleringen og vi ser at det gjennomsnittlig dør 2 personer per simulering i bestanden. Dette kan da både være de medlemmene med positive risikosummer eller med negative risikosummer. Fra tidligere konklusjoner vil dette som regel være medlemmer med negative risikosummer, men i 2% av tilfellet kunne det vært medlemmer med positive risikosummer. Vi kan også notere



Figur 5.5: Antall som dør per simulering

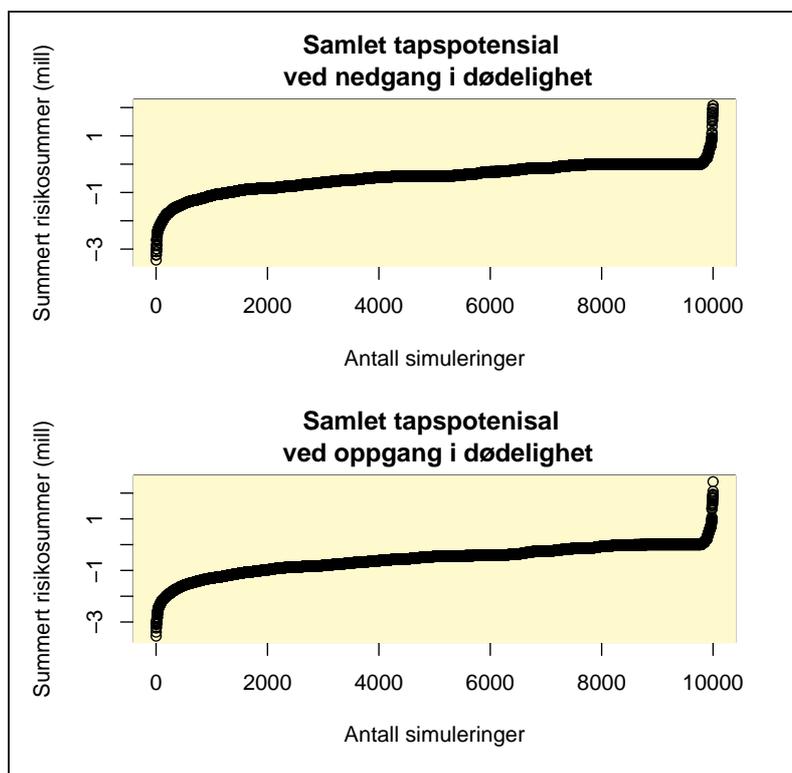
oss at antall som dør er Poisson fordelt. Her vet vi at λ i en poisson fordeling er forventningen. Denne ligger på 2 som avrundet verdi. Vi foretok oss en "Godness of fit" test på antall som dør, der vi tilpasser en Poisson fordeling til de observerte utfallene. Her ser vi klart at vi kan akseptere en Poisson fordeling til antall som dør per simulering.

Som vi ser har vi funnet samlet tapspotensial ved tilfeldige feil på en mer konkret måte enn det tilsynet kom med. Ved å se på resultatene ser vi at samlet tapspotensial i følge tilsynet kom på kr 1 334 703. I det stokastiske tilfellet havnet vi på kr 1 377 633 som viser at tilsynets metode gir et tilnærmet likt grunnlag som vi brukte ved simuleringer. Det er da en enkel metode å bruke som gir samme solvenskrav i den grad vi forlanger det. Vi skal konkludere våre resultater i oppsummeringsseksjonen over hvorfor begge resultatene havner på likt nivå. Det som nå gjenstår er å simulere estimeringsfeil i modellen.

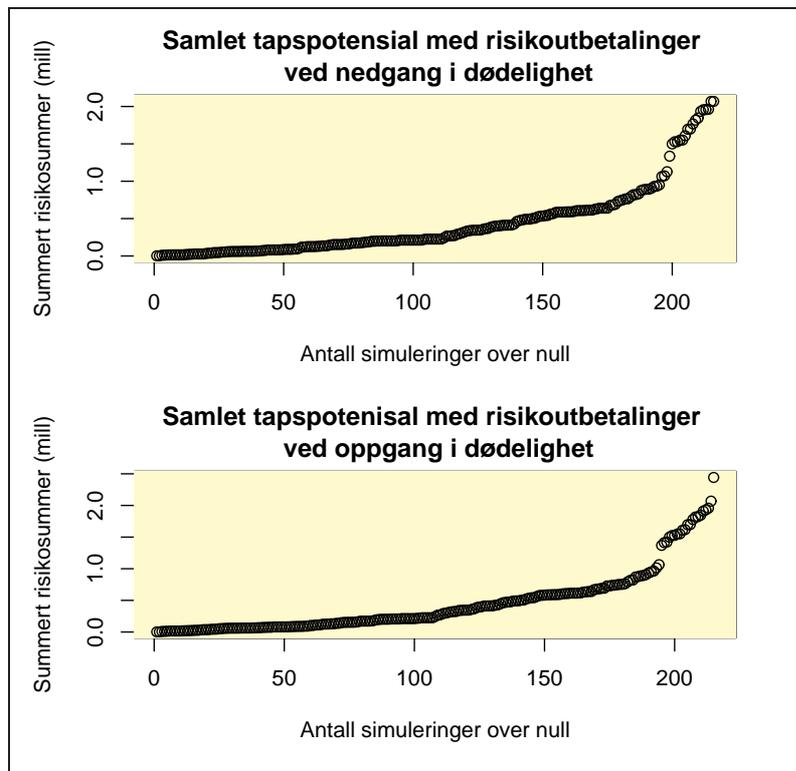
5.3.2 Simuleringer på estimeringsfeil

I denne seksjonen vil vi se på hvordan risikosommene blir om vi skulle anta at dødelighetsmodellen vår har estimeringsfeil. Vi utfører igjen en skalering av de ettårige dødssannsynlighetene med 10% i begge retninger. Utgangspunktet blir å benytte samme fremgangsmåte som vi gjorde med simuleringer for tilfeldige feil, men nå har vi skalerte dødelighetsrater som vil gi forskjellige utslag i simuleringene.

I figur 5.6 har vi plottet ut samlet tapspotensiale for estimeringsfeil. Av figuren ser vi utifra simuleringene at utslaget blir veldig likt det vi hadde for tilfeldige feil. Selv om vi skalerer dødeligheten opp og ned, ser vi at de i høye aldre dør og derfor blir risikosommen deres tatt med i det samlede tapspotensialet. Det vi kan notere oss er at fler dør når det er oppgang i dødelighet som sier at simuleringemetoden indikerer riktige hendelser.



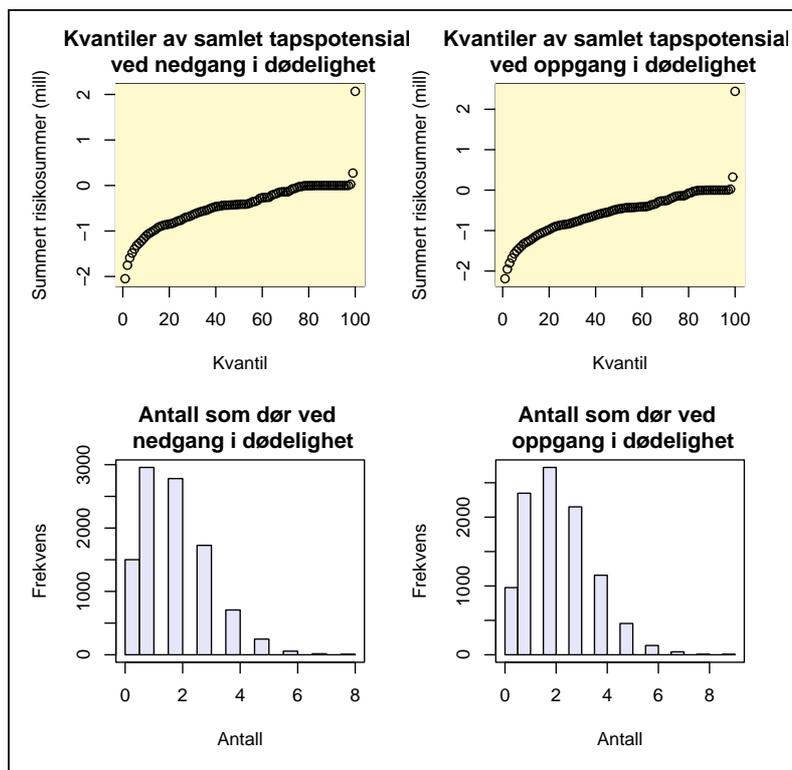
Figur 5.6: Samlet tapspotensial ved oppgang og nedgang i dødelighet



Figur 5.7: Samlet positivt tapspotensial ved endring i dødelighet

I figur 5.7 har vi sett på de simuleringene som gav risikoutbetalinger. Som vi ser er det rundt 250 simuleringer som gav positivt tapspotensial som betyr at foretaket ikke har reservert nok for dødsfallene som har inntruffet. Det skjer kun med 2.5% sjanse i følge simuleringene våre. Vi ser at disse positive risikoutbetalingene ligger fra null og opptil 2 mill ved nedgang i dødelighet. Ved oppgang i dødelighet ser vi at utbetalingene ligger fra null og opptil 2.5 mill, som betyr at der er større sjanse for å dø uansett tilstanden en befinner seg i. I figur 5.8 ser vi dette på kvantilene ved samlet tapspotensiale, der 100% kvantilen tilsvarer de nevnte beløpene.

I samme figur ser vi histogrammer over fordelingen over antall som dør per simulering. Ved oppgang i dødelighet, vil flere dø ettersom dødssannsynligheten er større. Vi ser at forventet antall som dør per simulering ved oppgang i dødelighet ligger langt over 2, mens for nedgang i dødeligheten er den under 2. Det betyr at ved en tilpasning av Poisson fordeling ville vi fått



Figur 5.8: Kvantilene for samlet tapspotensial og histogram over antall medlemmer som dør under endringer i dødelighet.

høyere λ ved oppgang i dødelighet og lavere λ ved nedgang i dødelighet.

Det neste steget her blir å se på Value at Risk for begge tilfellene. Hvis vi begynner med nedgang i dødelighet, forventer vi som sagt færre dødsfall og lavere tapspotensiale i kassen. I motsatt fall forventer vi høyere tapspotensiale og flere dødsfall. I tabell 5.2 ser vi en Value at Risk-tabell for denne pensjonskassen ved beste antakelse om dødelighet og ved endringer i dødelighetsfaktoren.

Vi har tatt med 99% og 99.5% kvantilen som illustrerer hvor stor forskjell det blir om solvenskravet skulle endres. Det må stilles over 3 ganger så mye mer kapital om vi skulle øke kvantilen fra 99% til 99.5%. Dette illustrerer bare differansen i de ytterste kvantilene på oppsiden. Vi ser at differansen ved endring i dødelighet er minimal i motsetning til endring i kapitalkravet. Det betyr at om vi skulle ønske å endre dødelighetstariffen, ville ikke det

	Nedgang i dødelighet	Dødelighet beste antakelse	Oppgang i dødelighet
99%	290 701	312 645	344 061
99.5%	1 179 568	1 377 633	1 393 341

Tabell 5.2: Value at Risk krav ved forskjellige valg av kvantiler

gitt store endringer i kvantilbeløpene. Vi ser at det er nesten kr 200 000 endring om vi forventer nedgang i dødelighet og kun kr 20 00 ved oppgang i dødelighet for 99.5% kvantilen. Det betyr at om vi skulle forvente oppgang i dødelighet ville ikke dette gitt store økonomiske endringer i solvenskravet for dette foretaket.

Nå som vi har sett på simuleringsteknikker for tilfeldige feil og estimeringsfeil, skal vi summere opp våre tanker rundt dette i neste delseksjon.

5.4 Oppsummering av simuleringene i foretaket

Vi så tidligere i oppgaven at risikosommene i foretaket var normalfordelte. Om dette ikke var tilfelle, ville ikke tilsynets samlet tapspotensiale være overens med det vi ville fått fra de stokastiske simuleringene. Dette fordi de benytter seg av 99.5% kvantilen i en normalfordeling. Hadde vi hatt risikosummer som hadde vært tunghalet fordelt, ville ikke denne kvantilen i en normalfordeling klart å dekke solvenskravet som er nødvendig. Det betyr at tilsynet ikke hensyntar sammensetningen i pensjonsbestanden. De gjør som reassurandører og sier at alle foretak har risikosummer som er normalfordelte. I simuleringemetodikken ser vi på kvantilstørrelsen som da vil gi riktig kapitalkrav uansett fordeling på risikosommene.

Hvis noen pensjonsforetak har risikosummer som er tunghalet fordelt mot høyre og "worst-case" skulle inntreffe, vil disse positive utbetalingene være høyere enn solvenskravet. Derfor mener jeg at tilsynet bør foreta en nærmere undersøkelse av store pensjonsforetak og livselskaper med premiereserver i milliardklassen ettersom det positive tapspotensialet kan være ekstremt forskjellig enn hva tilsynet mener kapitalkravet bør være. Igjen kan man diskutere sannsynligheter for at "worst-case" skal inntreffe på ett års perspektiv, men siden vi ser på tilfeldige feil, kan det være tilfeldig at denne hendelsen inntreffer.

Siden stresstesting er en del av Solvency 2, er dette under arbeid og tilsynet vil alltid være åpne for forbedringer for å sikre bedre kontroll og

styring på risikoen. Det er derfor viktig å kritisere tilsynets metoder og heller vise at det finnes stokastiske metoder som kan ta for seg tilfeldighetene.

Nå som vi har gått gjennom stresstesting har vi testet ut potensielle scenarier på ett års basis og vi ser at endringer i dødelighetsgrunnlaget gir reserveøkninger og nedganger i millionklassen. Derfor ser vi at valg av dødelighetsgrunnlaget er avgjørende for hvordan risikohåndteringen blir. Solvenskravet avhenger implisitt av grunnlaget. Derfor ville vi fått forskjellig solvenskrav i foretaket om vi hadde benyttet K2005 eller GAP07.

Vi sier oss nå ferdig med Kredittilsynets stresstesting av dødelighetsrisiko og ser på reassuranse og motpartsrisiko som vil komme i neste kapittel.

Kapittel 6

Reassuranse

I hele oppgaven har ordet reassuranse godt igjennom og det nevnes stadig vekk at vi kommer til det senere i oppgaven. I dette kapitlet skal vi se på reassuransedelen. Å reassurere betyr å avgi risiko til andre parter. Hvis et livselskap sitter på for mye risiko, kan de inngå en avtale med et reassuranseselskap, slik at livselskapet diversifiserer sin risiko. Dette er ikke hvilken som helst risiko, men den erstatningsrisikoen selskapet har overfor forsikringstakeren. I dag er det som regel skadeforsikringsselskapene som driver med reassuranse på materielle skader. Disse selskapene opererer med erstatningssummer med tunghalede fordelinger og noen ganger ekstremfordelinger. I slike selskap sitter en med mye risiko og store variasjoner fra år til år. Derfor er de nødt til å diversifisere risikoen sin, for om et ekstremt erstatningskrav skulle forekomme ville det påvirke regnskapsresultatet til selskapet sterkt.

I livsforsikringer vil ikke et dødsfall i bestanden være kostbart i forhold til en storskade i skadeselskapene. Men om en liten pensjonkasse opplever store tap, vil det merkes i resultatregnskapet og derfor velger mange pensjonkasser å reassurere medlemmene i pensjonskassen. Hvis vi ser på store forsikringsselskap som Vital, Gjensidige, Storebrand eller KLP, kan de velge å være reassurandører. Det betyr at de påtar seg risiko fra andre mindre forsikringsselskaper ettersom de har nok kapital og solvens i konsernet sitt. Det finnes egne reassuranseselskap som påtar seg risiko fra mange store og små forsikringsselskaper.

Det å påta seg risiko kan gå begge veier for assurandør og reassuranseselskapene. Ved minimale skadererstatninger og få dødsfall, vil reassuranseselskapene tjene godt på premieinnbetalingene. Men om det motsatte skulle skje, ville disse selskapene få dårlig resultat for det året. Som en ser kan disse

selskapene ha et variert resultat, men samtidig må de ha nok kapital til å dekke det.

6.1 Reassurans i pensjonsforetaket

I vår situasjon har vi en pensjonskasse med en liten bestand. Denne kassen har valgt å reassurere medlemmene sine i et reassuranseselskap som også skal holdes anonymt. I kontrakten står det at reassurandør har en maksimumsgrense for erstatningsbeløp på 6 mill kroner. Men ved nærmere undersøkelser viser det seg at denne bestanden er ikke i nærheten av å nå dette beløpet siden maksimal risikosum var i overkant av 2 mill kroner. Ved å se nærmere på figur 6.1 ser vi at flesteparten av risikosommene er 0, som betyr at reassurandør ikke får noen store erstatningskrav. Men det vil påvirke premieinntektene siden den økonomiske eksponeringen er stor. Denne eksponeringen beregnes utifra risikosommene og den ettårige dødssannsynligheten til alle medlemmene. Vi får da at risikopremien som pensjonsforetaket må betale reassurandør blir

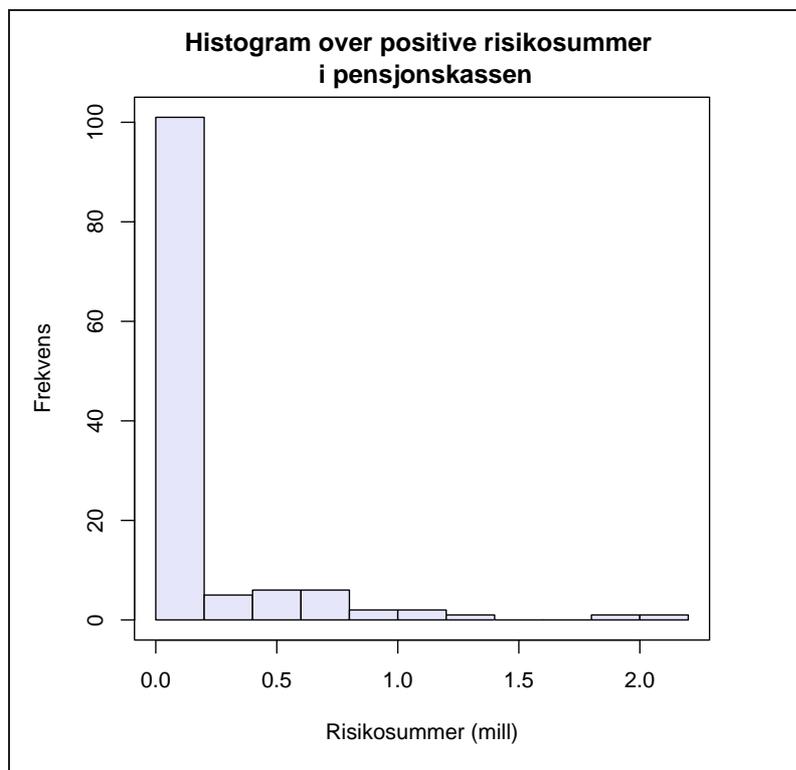
$$\text{Risikopremie} = \sum_{i=1}^N q_i * \max(0, R_i)$$

Vi ser her at de positive risikosommene er tunghalet fordelt og vi ser at prisen som må betales ikke blir stor fordi mange har negativ risikoeksponering som vi nå bare har satt til null. Vi finner at foretaket må ut med kr 21 080 for dette året som ikke er meget å betale for diversifiseringen av risiko. Vi ser at prisen avhenger av risikosommens størrelse. Om vi hadde hatt et foretak med flere medlemmer og høyere risikosummer ville vi fått en premie som hadde vært høyere. Vi skal i neste seksjon simulere potensielt tap gitt at vi har positive risikosummer og se hvordan det kan gå for reassurandør.

6.2 Simuleringer av tapspotensial for reassurandør

Vi skal nå se på dette fra reassurandørens perspektiv. Vi veit at han nå får en premieinntekt av foretaket på kr 21 080 kr for dette året utifra bestanden. Det betyr at han har påtatt seg en risiko for ett år på grunnlag av bestanden og deres risikosummer. Hvis vi antar at jeg er en reassurandør, vil jeg kontrollere tapspotensialet overfor den risikoen jeg har påtatt meg. Jeg ser at

6.2. SIMULERINGER AV TAPSPOTENSIAL FOR REASSURANDØR71

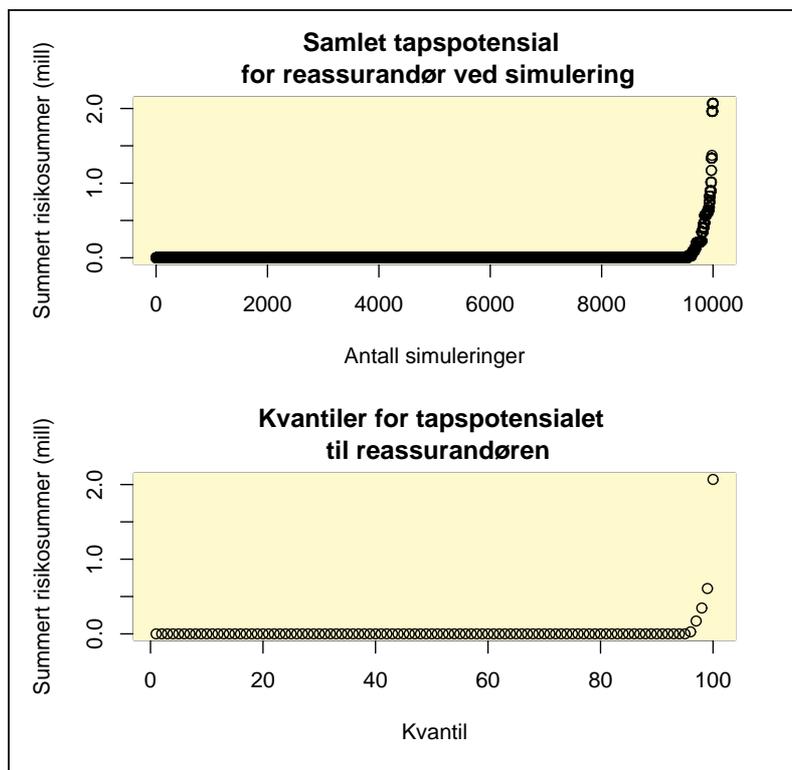


Figur 6.1: Positive risikosummer i foretaket

maksbeløpet på et medlem er på over 2 mill, men det betyr ikke at dette er maksbeløpet siden flere kan dø i det ene året og da kan også uheldigvis medlemmet med denne summen dø.

Den beste måten å kontrollere tapspotensialet mitt på blir å se på potensielle tap ut ifra å simulere dødsfall i pensjonsforetaket. Dette blir tilsvarende likt som vi gjorde i kapittel 5 under stesstesting, men vi ser nå på positive risikosummer og har satt resten til null. Tapspotensialet vil være forskjellig fra de simuleringene vi så på under stesstesting. Her hensyntok vi negative risikosummer og det skal vi ikke gjøre nå.

I figur 6.2 har jeg simulert tapspotensialet for reassurandøren. I disse 10 000 simuleringene gir omtrent 500 av dem et erstatningskrav. Det betyr at det er 5% sjanse for at reassurandøren må ut med et erstatningsbeløp. Men ettersom reassurandøren har motatt kr 21 080 i premie, betyr det nødvendigvis ikke at erstatningsbeløpet er større enn premieinntektene. Ved å



Figur 6.2: Tapspotensialet for reassurandøren

se nærmere på simuleringene ser vi at 490 av simuleringene medfører tap for oss. Da er erstatningsbeløpet større enn premieinntektene.

Som vi kan konkludere med vil det være 4.9% sjanse for at reassurandøren taper dette året utifra simuleringene. Og dette tapet er ikke lite heller. Derfor må reassurandør ha tilstrekkelig med kapital for dette. Ifølge tilsynet bør en dekke tapspotensialet med 99.5%. Ved å bruke Value at Risk ser vi at reassurandør bør ha kapital som tilsvarer det som står i tabell 6.1.

Vi ser at 99.5% kvantilen ikke er tilstrekkelig om det medlemmet med risikosum på 2 mill skulle dø. Her bør en se på 100% kvantilen. I simuleringen ser vi at dette medlemmet dør en gang. Det betyr at 0.0001 sjanse for at dette scenariet skal oppstå. Grunnen til at det ikke må avsettes så mye er at q_x verdien for dette medlemmet er veldig lav. Dette medlemmet er en mann i alder 38 som har veldig lav dødssannsynlighet og derfor vil ikke 99.5% kvantilen klare å fange opp det. Det vi kan konkludere med er at reassur-

	VaR krav
99%	607 633
99.5%	892 939

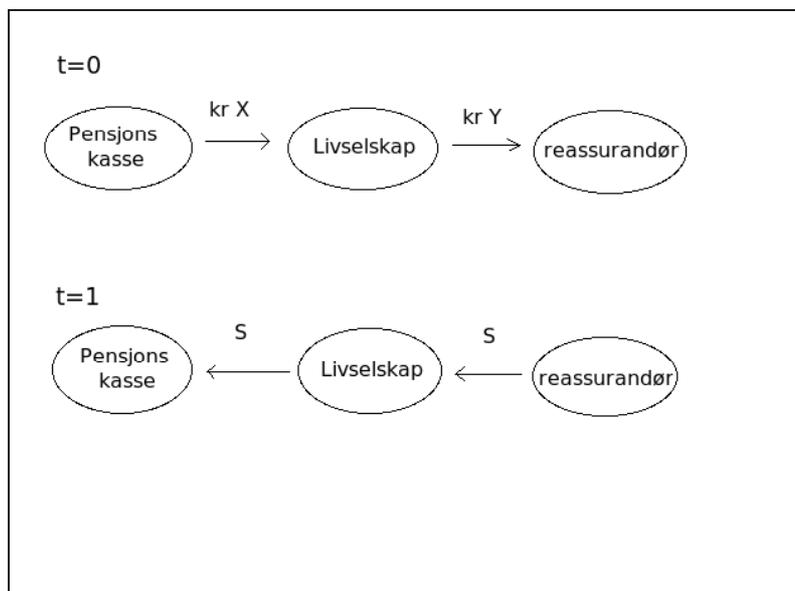
Tabell 6.1: Value at Risk krav for reassurandør ved forskjellige valg av kvantiler

andøren bør avsette kr 892 939 for dette foretaket, men bør ha tilstrekkelig med solvens siden reassurandøren har som regel flere kunder og stor kapital.

6.3 Arbitrasjemuligheter ved dynamisk dødelighet

I den dynamiske verden har vi sett at dødeligheten endrer seg fra år til år. Siden denne er i bevegelse vil premieinntektene som reassurandør mottar endre seg for hvert år. Tydeligvis vil denne prisen gå ned noen kroner hvis vi neste år hadde benyttet den dynamiske dødeligheten for 2009, gitt at bestanden er uforandret. Her ser vi klart en arbitrasjemulighet ute i markedet. Denne muligheten kan en assurandør eller et livselskap påta seg. De danner seg følgende strategi som vist i figur 6.3 og gjør følgende i markedet ved tidspunkt $t=0$. De påtar seg risiko fra andre pensjonsforetak, der de sier at risikopremien for alle medlemmene i foretaket skal beregnes etter tariffen K2005. Da vil premieinntektene være x kroner. Ved samme tidspunkt reassurerer de hele foretaket på den dynamiske dødeligheten GAP07 til et reassuranseselskap. Da må livselskapet betale y kroner i premie til dette reassuranseselskapet. Det betyr at selskapet blir et mellomledd som påtar seg risiko og diversifiserer den samme risikoen til et annet selskap. Vi vil se at $x > y$ slik at den arbitrasjefrie differansen som selskapet får som et tilskudd blir $(x - y)^r > 0$ Vi antar da at r er en årlig rente som de får ved en risikofri renteinvestering av tilskuddet.

Når vi har gått et år frem i tid, altså ved $t=1$ kan det oppstå at noen medlemmer i pensjonsforetaket har sovnet stille inn og utifra simuleringene ser vi at det er 4.9% sjanse for at det er erstatningskrav. Da må reassurandør ut med erstatningskravet på s kroner som de betaler livselskapet. Livselskapet vil bruke dette beløpet til å betale pensjonsforetaket s kroner slik det står i kontrakten. Ved å se på dette foretaket ser vi at denne bestanden er liten, men fortsatt utgjør det en del kroner. Ved å benytte meg av strategien får jeg



Figur 6.3: Figur over investeringsstrategi med arbitrasjemulighet for livselsskap eller assurandør

K2005	GAP07
x=12 917	y=10 970

Tabell 6.2: Reassuransepremie for ulike dødelighetstariffer

premien beregnet som vist i tabell 6.2.

Her har vi sett på den dynamisk dødeligheten fra 01.01.2008 og ser på ett års perspektiv. Det gir oss en differanse på kr 1947 og en fortjeneste på over 15% for dette foretaket. Om vi hadde sett på store foretak med en kapitalforvaltning på flere milliarder, ville disse summene blitt betydelig større. En annen ting å legge merke til er forskjellene i prisen som vi kom med innledningsvis i kapitlet. Vi fikk en pris som havnet på kr 21 080, som avviker ganske mye fra det som vi har fra dødelighetstariffene. Vi må ikke glemme at dette er tariffer med sikkerhetsmarginer som gjør at vi får en strengere overlevelsessannsynlighet og lavere dødssannsynlighet.

Her ser vi en mulighet som gir oss risikofri fortjeneste så sant en benytter seg av dynamisk og statisk dødelighet. Dette fordi det er et gap i dødelighetsmodellene. Når dette gapet er stort, vil fortjenesten være større og

selvsagt avhenger det av foretakets bestand.

Denne strategien kan kun benyttes så sant gapet er tilstede og vi veit at FNH har utviklet K2020 som har konsesjon fra Kredittilsynet. Her må man se om gapet mellom den dynamiske dødeligheten og K2020 er stor nok eller ikke. Erfaringer og uttalelser fra aktuarfronten i Gabler & Partners AS viser at disse to dødelighetsmodellene vil bli tilnærmet like så denne arbitrasjemuligheten vil med tiden forsvinne. Spørsmålet blir hvor lenge en kan benytte seg av dette? Siden den dynamiske modellen er predikert og vi kan akseptere den dynamiske modellen som sann og forventningsrett, kan vi bruke dette når det er et gap tilstede.

Kapittel 7

Konklusjon

Vi har sett på en del forskjellige temaer igjennom denne oppgaven og vi ser at valg av dødelighetsmodell er vesentlig innenfor pensjonsforetak. Bruk av dynamisk dødelighet, gir oss en modell som er mer sikker og ivaretar alle påstander om at nordmenn lever lengre og ikke minst at kvinner lever lengre enn menn. Som vi nevnte innledningsvis er dette modeller med sikkerhetsmarginer. Vi observerte at den dynamiske modellen hadde minst sikkerhetsmarginer som betyr at dette er modeller som best representerer dødelighetssannsynlighetene i Norge.

Vi fant seinere ut at Lee-Carter modellen anvendt i denne oppgaven måtte omjusteres og stokastiske ledd måtte legges inn i modellen. Her så vi at stasjonære stokastiske serier på tidsfunksjonen gav oss den statiske dødeligheten fram i tid ved lang nok predikering. For ikke-stasjonære serier på tidsfunksjonen fikk vi dynamisk dødelighet for hele prediksjonsperioden. Vi tok her et vesentlig valg som fikk konsekvenser for resten av oppgavens omfang. Vi valgte å se på en tilfeldig gang for den fremtidige modelleringen. Her veit vi at de fremtidige reservene vil øke siden forventet levealder for menn og kvinner øker lineært.

Vi så i kapittel 4 hvor mye reservene økte og vi ser at det fikk en stor økning for alle tilstander og kjønn når vi gikk fra statisk 2006 dødelighet til dynamisk dødelighet. Disse endringene i reserver var forskjellige for ulike tilstander og kjønn så det betyr at pensjonsbestanden avgjør hvor mye reserveøkningen kommer på. Noen pensjonskasser kan ha en stor økning, mens andre foretak kan ha minimale økninger. I de dynamiske engangspremiene så vi klart at aktive medlemmer ville ha større reserveendringer enn pensjonister. Dette er fordi vi bytter Lee-Carter modellen og ved forholdsdødeligheten

så vi hvor endringene var størst og minst. Ved å bruke Gompertz-Makeham eller Perks dødelighetsmodell ville vi fått engangspremiefunksjoner som ville vært tilnærmet symmetrisk før og etter pensjonsalder. Vi fant ut at i dette foretaket lå de høyeste reserveøkningene på aktive menn, mens hos kvinner var det hos pensjonistene.

Videre i oppgaven tok vi for oss Kredittilsynets stesstest for dødelighetsrisiko. Dette var da en del av QIS 4-studiene som inngår i Solvency 2. Her konkluderte vi med at tilsynets stressmetode for dødelighetsrisiko er relativt enkel og tilsynet har her benyttet samme fremgangsmetode som Finansinstitusjonen¹. Vi fant ut at deterministiske modeller kan ikke avgjøre tilfeldighetene i dødelighetsrisiko og en må derfor ty til stokastiske simuleringer. I den deterministiske modellen var det en implisitt antakelse at risikosommene i foretaket var normalfordelt, som det ikke nødvendigvis er i alle foretak. Dette avhenger igjen av medlemsbestanden og noen at medlemmer med høy risikoeksponering vil gi tunghalede risikosummer. Monte-Carlo metodikken har ingen implisitte antakelser om risikosommene, ettersom vi benytter kvantilresultatene fra simuleringene. Derfor vil simuleringer av dødelighetsutfall være den mest realistiske metoden for å se på tilfeldige feil.

Tilslutt så vi på reassuranse og risikopremier for statisk og dynamisk dødelighet. Her oppstår det arbitrasjemuligheter i markedet som kan benyttes for en risikofri fortjenste på ett års perspektiv. Dette skal egentlig ikke være riktig i henhold til lover og reguleringer og derfor bør Kredittilsynet fornye forskriftene for avtaler for reassuransekontrakter.

I denne oppgaven har jeg fått en bred innsikt i dødelighetsmodellering og dens konsekvenser i forsikringsmarkedet. Som en oppsummering kan jeg si at valg av dødelighetstariff er til syvende og sist den avgjørende faktoren for din posisjon i risikomarkedet. Tariffen styrer den økonomiske faktoren i henhold til reservering og ikke minst hvor mye usikkerhet det ligger i observerte dødsfall mot modellens utfall. Derfor vil jeg råde alle forsikringsvirksomheter til å benytte dynamisk dødelighetsmodell for å få riktig reserveringsmetodikk og ikke minst en sikker og robust modell.

¹Et autoritært organ i Sverige som har samme styringsfunksjon som Kredittilsynet i Norge

Kapittel 8

Vedlegg A

Programmeringskode for dødeligheten i historiske data

```
data=read.table("test.txt",header=T,na.strings=".")
data=as.matrix(data)
lengde=length(data[,1])

# 1) gjør om sannsynligheten som er større enn 1 til 1 for mann og kvinne #
# 2) del om disse i henhold til år.. #
# 3) erstatter de dataene som har dotter med 1#

# 1) Bearbeider dataene vår #

for(i in 1:lengde){
  if(is.na(data[i,3])) data[i,3]=1
  if(is.na(data[i,4])) data[i,4]=1
  if(data[i,3]>=1) data[i,3]=1
  if(data[i,4]>=1) data[i,4]=1
  if(data[i,3]<=0) data[i,3]=1
  if(data[i,4]<=0) data[i,4]=1
  if(data[i,2]=="110+") data[i,2]=110
}

# Angir 2006 dødelighet som fast #

død2006=data[17761:17871,]
død2006=as.matrix(død2006)
data1950=data[11546:17871,]
# angir maks alder på 105 #

for(i in 1:6){
  død2006[105+i,3]=1
  død2006[105+i,4]=1
}

# plottes ut forventet levetid fra rådata #

# lager en kPx #

matrise=matrix(NA,56,105)
matrise=data[11545:17871,]

kPx=function(x,k){

  test=rep(NA,k)
  for(i in 1:k){

    test[i]=(1-as.numeric(død2006[x+i,3]))
    kPx=prod(test) # sanns for å overleve for kvinne og 4 er mann #
  }
  return(kPx)
}
```



```

# forventet levealder blir å ta integralet kPx #

integral=rep(NA,105)
for(i in 1:105){
  integral[i]=kPx(0,i)
}
forventetLevealder2006=sum(integral)

# modifisert kPx som finner kPx for alle dødelighetstabellen fra
1950 til år 2006 manuelt #

kPxMod=function(x,k,år){

  # henter ut den riktige matrisen #

  riktigdata=matrix(NA,111,5)
  riktigdata[1:111,]=matrise[((111*år+1)-111):((111*år+111)-111),]

  test=rep(NA,k)
  for(i in 1:k){
    test[i]=(1-as.numeric(riktigdata[x+i,3])) # 3 er kvinner og 4 er mann #
    kPx=prod(test)
  }
  return(kPx)
}

integral=matrix(NA,111,57)

for(i in 1:111){
  for(j in 1:57){
    integral[i,j]=kPxMod(0,i,j)
  }
}

forventet=rep(NA,57)
for(i in 1:57){
  forventet[i]=sum(integral[,i])
}

forventet

```

Innlesning av tidsfunksjonen og aldersfunksjonen fra programmet til veileder og Monte-Carlo simuleringer av dette.

```

timeforwardMenn=read.table("timeforwardMenn.txt",sep="")
timeforwardKvinner=read.table("timeforwardKvinner.txt",sep="")
ageforwardMenn=read.table("ageforwardMenn.txt",sep="")
ageforwardKvinner=read.table("ageforwardKvinner.txt",sep="")

dataMenn=timeforwardMenn[,2] # dataene for menn på log form #
dataKvinner=timeforwardKvinner[,2] # dataene for kvinne på logform #

årPlot=seq(2006,2060)

matriseTidsfunksjon=matrix(NA,55,2)
matriseTidsfunksjon[,1]=dataMenn
matriseTidsfunksjon[,2]=dataKvinner

matriseAldersfunksjon=matrix(NA,110,2)
matriseAldersfunksjon[,1]=ageforwardMenn[,2]
matriseAldersfunksjon[,2]=ageforwardKvinner[,2]

# tilpasser en AR(1) modell til tidseriene #

arMann=ar(dataMenn,TRUE,1)
arKvinne=ar(dataKvinner,TRUE,1)

fiMann=arMann$ar
fiKvinne=arKvinne$ar

sigmaMannAR=sqrt(arMann$var.pred)
sigmaKvinneAR=sqrt(arKvinne$var.pred)

# finner forventning og varians til begge tidsrekken bt #

n=length(dataMenn)
menn=rep(NA,n-1)
kvinner=rep(NA,n-1)

```

```

kvinner[1]=0
for(i in 1:(n-1)){
  menn[i]=dataMenn[i+1]-dataMenn[i]
  kvinner[i]=dataKvinner[i+1]-dataKvinner[i]
}
muMann=mean(menn)
muKvinner=mean(kvinner)

wobsMann=menn-muMann
wobsKvinner=kvinner-muKvinner

sigmaMann=sd(wobsMann)
sigmaKvinner=sd(wobsKvinner)

# Monte Carlo simuleringer #
# med Random Walk modell i bakgrunn #
# setter starttidspunktet som 1 #

N=10000

simMann=matrix(NA,n,N)
simMann[1,]=1

simKvinner=matrix(NA,n,N)
simKvinner[1,]=1
epsilonMann=matrix(rnorm(n*N,0,1),n,N)
epsilonKvinner=matrix(rnorm(n*N,0,1),n,N)

for(j in 1:N){
  for(i in 2:n){
    simMann[i,j]=simMann[i-1,j]+muMann+(sigmaMann*epsilonMann[i,j])
    simKvinner[i,j]=simKvinner[i-1,j]+muKvinner+(sigmaKvinner*epsilonKvinner[i,j])
    # om vi hadde benyttet AR-tilpasning vil fiMann og fiKvinner kommet inn i
    # likningen #
  }
}

# Vi bruker forventningsverdien for ved hvert år som den sanne #
# Det betyr at vi trekker ut 50 prosent kvantilen #

kvantfemtiMann=rep(NA,n)
kvantfemtiKvinner=rep(NA,n)

for(i in 1:n){
  kvantfemtiMann[i]=quantile(simMann[i,],0.5)
  kvantfemtiKvinner[i]=quantile(simKvinner[i,],0.5)
}

kvantfemtiMann
kvantfemtiKvinner

```

Her utleder vi den dynamiske dødeligheten som vil bli benyttet i oppgaven

```

# UTLEDNING AV DYNAMISK Qx #

maksalder=110

qx=rep(NA,maksalder)
qx1=rep(NA,maksalder)
modifisert=død2006[0:maksalder,]
modifisertMenn=as.numeric(modifisert[,4])
modifisertKvinner=as.numeric(modifisert[,3])
rekke=seq(0,maksalder-1)

DynamiskDødMenn=function(k){
  for(i in 1:maksalder){
    qx[i]=exp((kvantfemtiMann[k]-1)*ageforwardMenn[i,2])*modifisertMenn[i]
    #timeforwardMenn[k,2]#
  }
  return(qx)
}

```

```

DynamiskDødKvinner=function(k){
  for(i in 1:maksalder){
    qx1[i]=exp((kvantfemtiKvinner[k]-1)*ageforwardKvinner[i,2])*modifisertKvinne[i]
    {#timeforwardKvinner[k,2]#}
  }
  return(qx1)
}
# legger alt det dynamiske i en gigantmatrise #
maksTid=50
gigantMann=matrix(0,maksalder,maksTid)
gigantKvinne=matrix(0,maksalder,maksTid)
for(i in 1:maksTid){
  gigantMann[,i]=DynamiskDødMenn(i)
  gigantKvinne[,i]=DynamiskDødKvinner(i)
}
# gjør tilsvarende for gigantKvinne #

```

I denne seksjonen ser vi på predikert modell mot observerte 2007 dødeligheter fra SSB.

```

# OBSERVERT MOT PREDIKERT #
ssb=read.table("ssb-2007.txt",dec=".",header=T,sep="")
# Mann #
død2007Mann=rep(NA,104)
død2007Mann=gigantMann[1:106,2]
død2007Mann=død2007Mann[1:104]
# interpolering av verdier #
ssb[7,1]=(ssb[8,1]+ssb[6,1])/2
ssb[16,1]=(ssb[15,1]+ssb[17,1])/2
ssbMann=rep(NA,104)
ssbMann=ssb[1:104,1]
ssbMann=log(ssbMann)
død2007Mann=log(død2007Mann)
matriseAnalyseMann=matrix(NA,104,2)
matriseAnalyseMann[,1]=ssbMann
matriseAnalyseMann[,2]=død2007Mann
alderMann=seq(0:103)
# Kvinne #
død2007Kvinner=rep(NA,111)
død2007Kvinner=gigantKvinne[,2]
#interpolering#
død2007Kvinner[12]=(død2007Kvinner[9]+død2007Kvinner[10])/2
død2007Kvinner[13]=(død2007Kvinner[10]+død2007Kvinner[11])/2
død2007Kvinner=død2007Kvinner[1:106]
ssbKvinner=rep(NA,106)
ssbKvinner=log(ssb[,2])
død2007Kvinner=log(død2007Kvinner)
matriseAnalyseKvinner=matrix(NA,106,2)
matriseAnalyseKvinner[,1]=ssbKvinner
matriseAnalyseKvinner[,2]=død2007Kvinner
alderKvinner=seq(0:105)
# Pearsen Testen #
#eksponent av mann og kvinne først #

```

```

matriseAnalyseMann[,1]=exp(matriAnalyseMann[,1])
matriseAnalyseMann[,2]=exp(matriAnalyseMann[,2])

matriseAnalyseKvinner[,1]=exp(matriAnalyseKvinner[,1])
matriseAnalyseKvinner[,2]=exp(matriAnalyseKvinner[,2])

differanseMann=matriseAnalyseMann[,1]-matriseAnalyseMann[,2]
kvadrertMann=differanseMann^(2)
chiMann=kvadrertMann/matriAnalyseMann[,2]
chiMannSum=sum(chiMann)

qchisq(0.95,1)
frihetsgrader=104-2
qchisq(0.995, frihetsgrader)

differanseKvinne=matriseAnalyseKvinner[,1]-matriseAnalyseKvinner[,2]
kvadrertKvinne=differanseKvinne^(2)
chiKvinne=kvadrertKvinne/matriAnalyseKvinner[,2]
chiKvinneSum=sum(chiKvinne)

```

I denne seksjonen ser vi på forventet levealder og engangspremie beregninger på fremskrevet dødelighet

```

# forecasting av forventet levealder #
# lager en kPx #
kPxForecastingMenn=function(x,k,ar){
  test=rep(NA,k)
  død=gigantMann[,ar]
  for(i in 1:k){
    test[i]=(1-død[x+i]) # sanns for å overleve for menn #
    kPx=prod(test)
  }
  return(kPx)
}
kPxForecastingKvinner=function(x,k,ar){
  test=rep(NA,k)
  død=gigantKvinne[,ar]
  for(i in 1:k){
    test[i]=(1-død[x+i]) # sanns for å overleve for kvinne #
    kPx=prod(test)
  }
  return(kPx)
}

#forventet levealder blir å ta integralet kPx #
forecastingMenn=matrix(NA,maksalder,maksTid)
forecastingKvinner=matrix(NA,maksalder,maksTid)

forventetLevealderMenn=rep(NA,maksTid)
forventetLevealderKvinner=rep(NA,maksTid)

for(j in 1:maksTid){
  for(i in 1:maksalder){
    forecastingMenn[i,j]=kPxForecastingMenn(0,i,j)
    forecastingKvinner[i,j]=kPxForecastingKvinner(0,i,j)
  }
}

for(i in 1:maksTid){
  forventetLevealderMenn[i]=sum(forecastingMenn[,i])
  forventetLevealderKvinner[i]=sum(forecastingKvinner[,i])
}
forventetLevealderMenn
forventetLevealderKvinner

# ENGANGSPREMIESTIMERING ALDERSPENSJON #
engangspremieAP=function(x,rente,år){
  alder=x

```

```

pensjonsalder=67

neddiskontering=1/(1+rente)
maksalder=109
pensjonstid=maksalder-pensjonsalder

if(pensjonsalder-alder >=0){
  test=array(NA,pensjonstid)
  gjenståendeAlder=pensjonsalder-x

  # Trekker så fra den andre delene #

  neddiskonteringPenjonsalder=(1/(1+rente))^gjenståendeAlder

  # finner så sannsynligheten for å bli å oppnå pensjonsalder #

  sans=kPx(alder,gjenståendeAlder)
  del2=neddiskonteringPenjonsalder*sans

  for(i in 1:pensjonstid){
    test[i]=(neddiskontering^(gjenståendeAlder+(i-1)))
    *kPxForecastingKvinner(alder,gjenståendeAlder+(i-1),år)
    # kPxForecastingMenn(alder,gjenståendeAlder+i,år) #
  }# end for #

  del1=sum(test)
  svar=del1-(0.5*del2)
  return(svar)
}# end if #

else{

  nytest=array(NA,maksalder-alder)
  del3=neddiskontering^alder
  alderfra=alder-67
  for(i in 1:(maksalder-alder)){

    nytest[i]=(neddiskontering^(alderfra+(i-1)))
    *kPxForecastingKvinner(alder,i,år)
    # kPxForecastingKvinner(alder,i,år) #
  }# end for #

  del4=sum(nytest)
  svar1=del4-(0.5*del3)
  return(del4)
}# end else #
} #end engangspremieAP #

dynamiskEngangspremieAP=function(rente,år){

  aldere=seq(20,109)
  estimering=rep(0,90)

  for(i in 1:90){
    estimering[i]=engangspremieAP(aldere[i],rente,år)

    if(estimering[i]<0){
      estimering[i]=0
    }
  }

  return(estimering)
}# end dynamiskEngangspremieAP #

aldere=seq(20,109)
dynEngangKvinner0.03=matrix(NA,90,4)

dynEngangKvinner0.03[,1]=dynamiskEngangspremieAP(0.03,1)
dynEngangKvinner0.03[,2]=dynamiskEngangspremieAP(0.03,15)
dynEngangKvinner0.03[,3]=dynamiskEngangspremieAP(0.03,30)
dynEngangKvinner0.03[,4]=dynamiskEngangspremieAP(0.03,45)
# 1) endre kodene i engangspremie og sett den for menn i aldersengangspremie #
dynEngangMenn0.03=matrix(NA,90,4)
dynEngangMenn0.03[,1]=dynamiskEngangspremieAP(0.03,1)
dynEngangMenn0.03[,2]=dynamiskEngangspremieAP(0.03,15)
dynEngangMenn0.03[,3]=dynamiskEngangspremieAP(0.03,30)
dynEngangMenn0.03[,4]=dynamiskEngangspremieAP(0.03,45)

```

Her bruker vi den fremskrevde modellen til å beregne reserver for forskjellige tidspunkter frem i tid

```
# TOTRES for YTKODE A #
dataAP=read.table("hoyreAP.txt",header=T,sep="")

# engangspremiene for medlemmene #

dynEngangKvinner0.03Beregning=matrix(NA,109,4)
dynEngangKvinner0.03Beregning[1:19,1]=0
dynEngangKvinner0.03Beregning[1:19,2]=0
dynEngangKvinner0.03Beregning[1:19,3]=0
dynEngangKvinner0.03Beregning[1:19,4]=0

dynEngangKvinner0.03Beregning[20:109,1]=dynEngangKvinner0.03[,1]
dynEngangKvinner0.03Beregning[20:109,2]=dynEngangKvinner0.03[,2]
dynEngangKvinner0.03Beregning[20:109,3]=dynEngangKvinner0.03[,3]
dynEngangKvinner0.03Beregning[20:109,4]=dynEngangKvinner0.03[,4]

dynEngangMenn0.03Beregning=matrix(NA,109,4)
dynEngangMenn0.03Beregning[1:19,1]=0
dynEngangMenn0.03Beregning[1:19,2]=0
dynEngangMenn0.03Beregning[1:19,3]=0
dynEngangMenn0.03Beregning[1:19,4]=0

dynEngangMenn0.03Beregning[20:109,1]=dynEngangMenn0.03[,1]
dynEngangMenn0.03Beregning[20:109,2]=dynEngangMenn0.03[,2]
dynEngangMenn0.03Beregning[20:109,3]=dynEngangMenn0.03[,3]
dynEngangMenn0.03Beregning[20:109,4]=dynEngangMenn0.03[,4]

beregningAP2006=function(alder,kjonn){
  if(kjonn=="2"){
    return(dynEngangMenn0.03Beregning[alder,1])
  }# end if #
  else return(dynEngangKvinner0.03Beregning[alder,1])
}

beregningAP2020=function(alder,kjonn){
  if(kjonn=="2"){
    return(dynEngangMenn0.03Beregning[alder,2])
  }# end if #
  else return(dynEngangKvinner0.03Beregning[alder,2])
}

beregningAP2035=function(alder,kjonn){
  if(kjonn=="2"){
    return(dynEngangMenn0.03Beregning[alder,3])
  }# end if #
  else return(dynEngangKvinner0.03Beregning[alder,3])
}

beregningAP2050=function(alder,kjonn){
  if(kjonn=="2"){
    return(dynEngangMenn0.03Beregning[alder,4])
  }# end if #
  else return(dynEngangKvinner0.03Beregning[alder,4])
}

# 1=kvinne og 2=Mann for KJØNN #
# 1=Aktiv og 2=Alderspensionist og 3=Uførepensionist #

dataAPBeregning2006=matrix(NA,112,6)
dataAPBeregning2006[,1]=dataAP[,5] # alder #
dataAPBeregning2006[,2]=dataAP[,4] # kjønn #
dataAPBeregning2006[,3]=dataAP[,22]
dataAPBeregning2006[,6]=dataAP[,6] # ptype #

dataAPBeregning2020=matrix(NA,112,6)
dataAPBeregning2020[,1]=dataAP[,5] # alder #
dataAPBeregning2020[,2]=dataAP[,4] # kjønn #
dataAPBeregning2020[,3]=dataAP[,22]
dataAPBeregning2020[,6]=dataAP[,6] # ptype #

dataAPBeregning2035=matrix(NA,112,6)
dataAPBeregning2035[,1]=dataAP[,5] # alder #
dataAPBeregning2035[,2]=dataAP[,4] # kjønn #
dataAPBeregning2035[,3]=dataAP[,22]
```

```

dataAPBeregning2035[,6]=dataAP[,6]           # ptype #
dataAPBeregning2050=matrix(NA,112,6)
dataAPBeregning2050[,1]=dataAP[,5]         # alder #
dataAPBeregning2050[,2]=dataAP[,4]         # kjønn #
dataAPBeregning2050[,3]=dataAP[,2,2]      # ptype #
dataAPBeregning2050[,6]=dataAP[,6]

for(i in 1:112) # antall medlemmer #
  dataAPBeregning2006[i,4]=beregningAP2006(dataAPBeregning2006[i,1],dataAPBeregning2006[i,2])
  dataAPBeregning2020[i,4]=beregningAP2020(dataAPBeregning2020[i,1],dataAPBeregning2020[i,2])
  dataAPBeregning2035[i,4]=beregningAP2035(dataAPBeregning2035[i,1],dataAPBeregning2035[i,2])
  dataAPBeregning2050[i,4]=beregningAP2050(dataAPBeregning2050[i,1],dataAPBeregning2050[i,2])

# finner TOTRES og legger det inn i kolonne dataAPBeregning[,5] #

for(i in 1:112){
  dataAPBeregning2006[i,5]=dataAPBeregning2006[i,3]*dataAPBeregning2006[i,4]*1.03
  dataAPBeregning2020[i,5]=dataAPBeregning2020[i,3]*dataAPBeregning2020[i,4]*1.03
  dataAPBeregning2035[i,5]=dataAPBeregning2035[i,3]*dataAPBeregning2035[i,4]*1.03
  dataAPBeregning2050[i,5]=dataAPBeregning2050[i,3]*dataAPBeregning2050[i,4]*1.03
}
sumYtelseA2006=sum(dataAPBeregning2006[,5])
sumYtelseA2020=sum(dataAPBeregning2020[,5])
sumYtelseA2035=sum(dataAPBeregning2035[,5])
sumYtelseA2050=sum(dataAPBeregning2050[,5])

# gjør analyse av totalreserven #
# det er dataAPBeregning som jeg skal bruke for å gjøre analyse #

# år 2006 #

sumMann=rep(0,112)
sumMannAkt=rep(0,112)
sumMannPens=rep(0,112)
sumMannUfor=rep(0,112)

for(i in 1:112){
  if(dataAPBeregning2006[i,2]=="2"){
    sumMann[i]=dataAPBeregning2006[i,5]

    if(dataAPBeregning2006[i,6]=="1"){
      sumMannAkt[i]=dataAPBeregning2006[i,5]
    }
    if(dataAPBeregning2006[i,6]=="2"){
      sumMannPens[i]=dataAPBeregning2006[i,5]
    }
    if(dataAPBeregning2006[i,6]=="3"){
      sumMannUfor[i]=dataAPBeregning2006[i,5]
    }
  }
}

}# end if #

sumMannAkt=sum(sumMannAkt)
sumMannPens=sum(sumMannPens)
sumMannUfor=sum(sumMannUfor)
sumMann=sum(sumMann)

# tilsvarende for kvinner #
sumKvinne=rep(0,112)
sumKvinneAkt=rep(0,112)
sumKvinnePens=rep(0,112)
sumKvinneUfor=rep(0,112)

for(i in 1:112){
  if(dataAPBeregning2006[i,2]=="1"){
    sumKvinne[i]=dataAPBeregning2006[i,5]

    if(dataAPBeregning2006[i,6]=="1"){
      sumKvinneAkt[i]=dataAPBeregning2006[i,5]
    }

    if(dataAPBeregning2006[i,6]=="2"){
      sumKvinnePens[i]=dataAPBeregning2006[i,5]
    }
  }
}

```

```

        if (dataAPBeregning2006[i,6]=="3"){
            sumKvinneUfor[i]=dataAPBeregning2006[i,5]
        }
    } # end if #
}
sumKvinneAkt=sum(sumKvinneAkt)
sumKvinnePens=sum(sumKvinnePens)
sumKvinneUfor=sum(sumKvinneUfor)
sumKvinne=sum(sumKvinne)

test2006=sumMann+sumKvinne

# slik analyse gjøres for år 2020, 2035 og 2050. #
# selve kodeberegningen blir den samme og gjentas derfor ikke selv om det
# i praksis er gjort #

```

I denne seksjonen skal vi se på koden til stresstesting. Noe av koden under stresstesting er veldig lik for engangspremieberegning og reserveberegning så dette tas ikke med. Det eneste vi benytter er skalering på qx som er gjort i en del funksjoner. For å begrense plassbruk tar vi kun med de relevante kodene.

```

# Stresstesting på estimeringsfeil #
# 1) lager en kPx med skalering #
# 2) finner reserver med skalering #
# se tilsvarene kode som overnevnt #

# Stresstesting på tilfeldige feil #
# leser inn risikosommene #

risikosummer=read.table("risikosummer.txt",sep=" ",header=TRUE)
risikosumPlot=risikosummer[,3]/1000000

BAU=rep(0,125)
stBAU=rep(0,125)
dødelighetRisikosummer=rep(NA,125)
aldern=rep(0,125)
aldern=risikosummer[,2]
sanns=rep(0,125)

# risikosummer i foretaket og beregning av beste antakelse og standardavvik #
# under beste antakelse #
for(i in 1:125){
    if (risikosummer[i,1]=="K"){
        test=aldern[i]
        sanns[i]=gigantKvinne[test-1,3] # 3 er år 2008 #
        stBAU[i]=(1-sanns[i])*sanns[i]*(risikosummer[i,3]^(2))
        BAU[i]=sanns[i]*risikosummer[i,3]
    } # end if #
    else{
        test=aldern[i]
        sanns[i]=gigantMann[test-1,3] # 3 er år 2008 #
        stBAU[i]=(1-sanns[i])*sanns[i]*(risikosummer[i,3]^(2))
        BAU[i]=sanns[i]*risikosummer[i,3]
    } # end else #
}

sumBAU=sum(BAU)
summerStandardavvik=sum(stBAU)
standardavvikBAU=sqrt(summerStandardavvik)
tapTilfeldigeFeil=2.58*standardavvikBAU

# Stresstesting Estimeringsfeil #
# denne er brukt for å lage figuren med reserver og forskjellige stressfaktorer #
år2006=umulig[,1]
BA2006=umulig[51,1]
SApluss2006=umulig[61,1]
SAminus2006=umulig[41,1]

år2008=umulig[,2]
BA2008=umulig[51,2]
SApluss2008=umulig[61,2]

```



```

SAminus2008=umulig[41,2]

år2020=umulig[,3]
BA2020=umulig[51,3]
SApluss2020=umulig[61,3]
SAminus2020=umulig[41,3]

år2035=umulig[,4]
BA2035=umulig[51,4]
SApluss2035=umulig[61,4]
SAminus2035=umulig[41,4]

år2050=umulig[,5]
BA2050=umulig[51,5]
SApluss2050=umulig[61,5]
SAminus2050=umulig[41,5]

#                               TAPSPOTENSIAL VED TILFELDIGE FEIL                               #
#                               Monte Carlo simuleringer                               #

risikosummerSim=matrix(NA,125,4)
risikosummerSim[,1]=risikosummer[,3]
risikosummerSim[,2]=sanns
risikosummerSim[,3]=risikosummerSim[,1]^(2)
risikosummerSim[,4]=risikosummerSim[,1]*risikosummerSim[,2]

N=10000
n=112

BesteAntakelse=sum(risikosummerSim[,4])

simulering=matrix(0,n,N)
testing=matrix(0,n,N)
uniform=matrix(runif(n*N,0,1),n,N) # trekker uniform tall #
antall=matrix(0,n,N)

for(j in 1:N){
  for(i in 1:n){ # hvis qx større enn uniformtrukket tall dør medlemmet #
    if(uniform[i,j]<=risikosummerSim[i,2]){

      simulering[i,j]=risikosummerSim[i,1]
      antall[i,j]=1
      testing[i,j]=risikosummerSim[i,3]*risikosummerSim[i,2]
      *(1- risikosummerSim[i,2])

    }#end if#
  }#end for#
}#end for#
totalsummer=rep(0,N)
antallsummer=rep(0,N)

for(i in 1:N){
  totalsummer[i]=sum(simulering[,i])
  antallsummer[i]=sum(antall[,i])
}

# sorter ut kvantilene for simuleringene #
# tar vekk de som har 0 i seg #

sorter=sort(totalsummer)
risikosummerModifisert=sorter[sorter >0]

kvantil1=rep(NA,100)
kvantil2=rep(NA,100)
for(i in 1:100){

  kvantil1[i]=quantile(risikosummerModifisert,(i/100))
  kvantil2[i]=quantile(sorter,(i/100))
}

quantile(kvantil2,0.99)
quantile(kvantil2,0.995)

quantile(kvantil1,0.99)
quantile(kvantil1,0.995)

risikosummerModifisert=risikosummerModifisert/1000000
sorter=sorter/1000000

```

```
# Tapspotensial med tilfeldige feil er den koden som brukes under alt av stressing. #
# Når vi foretar stressing skalerer vi qx og den samme koden vil bli benyttet #
# I Kappittel 6 er det tilsvarende analyse, men vi ser kun på de positive risikosommene #
```

I den siste koden vil vi legge koden til noen av plottene som er benyttet i oppgaven. Jeg tar kun for meg de vesentlige plottene.

```
#                               plott av Dynamisk Dødelighet                               #
#                               menn                                                    #
dynMenn=matrix(NA, maksalder, 4)
dynMenn[,1]=gigantMann[,1]
dynMenn[,2]=gigantMann[,15]
dynMenn[,3]=gigantMann[,30]
dynMenn[,4]=gigantMann[,45]

alder18Til40=dynMenn[19:41,]
nyrekke1=seq(18,40)

alder40Til62=dynMenn[41:63,]
nyrekke2=seq(40,62)

alder62Til84=dynMenn[63:85,]
nyrekke3=seq(62,84)

alder84Til105=dynMenn[85:106,]
nyrekke4=seq(84,105)

par(mfrow=c(2,2))
opar=par(mar=c(4,4,2,2), las=0)
matplot({nyrekke1, alder18Til40, type="l", lty=1,}
ylab="Dødsansynlighet", xlab="Alder", ylim=c(0,0.0038))
smartlegend({x="left", y="top", inset=0,}
legend=c("År 2006", "År 2020", "År 2035", "År 2050"),
{fill=c("black", "red", "green", "blue"), bg="gray"})
matplot({nyrekke2, alder40Til62, type="l", lty=1, ylab="Dødsansynlighet", xlab="Alder"}
smartlegend({x="left", y="top", inset=0,}
{legend=c("År 2006", "År 2020", "År 2035", "År 2050"),}
{fill=c("black", "red", "green", "blue"), bg="gray"})
matplot({nyrekke3, alder62Til84, type="l", lty=1, ylab="Dødsansynlighet", xlab="Alder"}
smartlegend({x="left", y="top", inset=0,}
{legend=c("År 2006", "År 2020", "År 2035", "År 2050"),}
{fill=c("black", "red", "green", "blue"), bg="gray"})
matplot({nyrekke4, alder84Til105, type="l", lty=1, ylab="Dødsansynlighet", xlab="Alder"}
smartlegend({x="left", y="top", inset=0,}
{legend=c("År 2006", "År 2020", "År 2035", "År 2050"),}
{fill=c("black", "red", "green", "blue"), bg="gray"})

# Tilsvarende for kvinner #

#                               plott av forholdstall                               #
opar=par(mar=c(4,4,2,2), las=0)
plot({rekke, forholdMenn[,1], type="n", ylab="Forholdstall", lty=1, xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til menn", ylim=c(0,1.01), bg="lavender")
usr=par("usr")
rect(usr[1], usr[3], 2056, usr[4], border=NA, col="lemonchiffon")
rect(2056, usr[3], usr[2], usr[4], border="NA", col="lemonchiffon")
abline(h=(0:5)*0.2, col="grey", lty=3)
lines({rekke, forholdMenn[,4], type="l", ylab="Forholdstall", lty=1, xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til menn", ylim=c(0,1.01), bg="lavender", col="blue")
lines({rekke, forholdMenn[,2], type="l", ylab="Forholdstall", lty=1, xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til menn", ylim=c(0,1.01), bg="lavender", col="red")
lines({rekke, forholdMenn[,3], type="l", ylab="Forholdstall", lty=1, xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til menn", ylim=c(0,1.01), bg="lavender", col="green")
lines({rekke, forholdMenn[,1], type="l", ylab="Forholdstall", lty=1, xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til menn", ylim=c(0,1.01), bg="lavender", col="black")
smartlegend({x="right", y="bottom", inset=0,}
{legend=c("År 2006", "År 2020", "År 2035", "År 2050"),}
{fill=c("black", "red", "green", "blue"), bg="gray"})

# Tilsvarende for kvinner #

#                               Plot av engangspremier                               #
```

```

opar=par(mar=c(4,4,3,2),las=0)
plot({aldere,dynEngangMenn0.03[,1],type="n",ylab="Engangspremie",lty=1,xlab="Alder",}
main="Engangspremier for Alderspensjon \n for menn",bg="lavender",ylim=c(0,14))
usr=par("usr")
rect(usr[1],usr[3],2056,usr[4],border=NA,col="lemonchiffon")
rect(2056,usr[3],usr[2],usr[4],border="NA",col="lemonchiffon")
abline(h=(0:15)*1,col="grey",lty=3)
lines({aldere,dynEngangMenn0.03[,1],type="l",lty=1,xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til Kvinner",bg="lavender")
lines({aldere,dynEngangMenn0.03[,2],type="l",lty=1,xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til Kvinner",bg="lavender",col="red")
lines({aldere,dynEngangMenn0.03[,3],type="l",lty=1,xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til Kvinner",bg="lavender",col="green")
lines({aldere,dynEngangMenn0.03[,4],type="l",lty=1,xlab="Alder",}
main="Forholdstallet for dødeligheten til Kvinner",bg="lavender",col="blue")
smartlegend({x="left",y="top",inset=0,}
{legend=c("År 2006","År 2020","År 2035","År 2050"),}
fill=c("black","red","green","blue"),bg="gray")
# tilsvarende for kvinner #

```

Bibliografi

- [1] Linda J. S. Allen *Stochastic Processes with Applications to Biology* 1991.
- [2] Hans U. Gerber *Life Insurance Mathematics* Third edition 1997.
- [3] FNH *Netto beregningsgrunnlag for kollektiv pensjonsforsikring i Norge* 2007:
- [4] Kredittilsynet *Modul for forsikringsrisiko i livsforsikring* 2008: http://www.kredittilsynet.no/archive/f-avd_word/01/09/Modul013.doc
- [5] Knut Håkon Brox *Forelesninger i Livsforsikringsmatematikk* 1999: Akademika, Universitetet i Oslo
- [6] Nico Keilmann *Hvor lenge kommer vi til å leve?* 2005: <http://www.ssb.no/emner/08/05/10/oa/200506/folkfram05.pdf>
- [7] <http://www.mortality.org>
- [8] North American Actuarial Journal, Volume 4, Number 1 *The Lee-Carter Method For Forecasting Mortality* Januar 2000:
- [9] Erik Bøllviken *Gablers nye beregningsgrunnlag GAP07: Metode og konstantverdier* 2007:
- [10] Gabler & Partners AS *En levetidsmodell for bruk i pensjonskasser* September 2007:
- [11] Kjersti Aas og Xeni Dimakos *Statistical modelling of financial time-series: An introduction* 2004: Norwegian Computing Center
- [12] John A. Rice *Mathematical Statistics and Data Analysis* Second Edition 1995: Duxberry Press