

# DIFFERENSIALGEOMETRI PÅ SINGULÆRE FLATER

AV

GEIR MAGNE FLØ

MASTEROPPGAVE

FOR GRADEN

MASTER I REALFAGSUTDANNING



DET MATEMATISK- NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

UNIVERSITETET I OSLO, DESEMBER 2011

## Sammendrag

Gauss-Bonnets teorem relaterer den geometriske strukturen til en flate til dens eulerkarakteristikk, en topologisk invariant. Dette teoremet forutsetter at flaten ikke inneholder noen singulariteter. I denne oppgaven vil vi bevise et Gauss-Bonnet-teorem for noen singulær flater. Først vil vi gjøre dette for to-dimensjonale orbifoldigheter, flater som er lokalt homeomorfe med  $\mathbb{R}^2/G$  for en endelig gruppe  $G$  som virker på  $\mathbb{R}^2$ . Deretter vil vi formulere og bevise et Gauss-Bonnet-teorem for singulære flater i  $\mathbb{R}^3$  hvor formelen inneholder korreksjonsledd som avhenger av singularitetene.

# Innhold

<b>Forord</b>	<b>4</b>
<b>Introduksjon</b>	<b>5</b>
<b>1 Differensialgeometri</b>	<b>7</b>
1.1 Litt grunnleggende teori . . . . .	7
1.2 Gauss-Bonnets teorem . . . . .	15
<b>2 Orbifoldigheter</b>	<b>18</b>
2.1 Grunnleggende trekk ved orbifoldigheter . . . . .	18
2.2 Klassifikasjonen av orbifoldigheter . . . . .	20
2.3 Gauss-Bonnets teorem for orbifoldigheter . . . . .	25
<b>3 Singulære flater i <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>29</b>
3.1 Grunnleggende definisjoner . . . . .	29
3.2 Gauss-Bonnets teorem for singulære flater i $\mathbb{R}^3$ . . . . .	44
<b>4 Eksempler og beregninger</b>	<b>52</b>
4.1 Noen singulære flater i $\mathbb{R}^3$ . . . . .	52
<b>Referanser</b>	<b>65</b>

## **Førord**

Denne oppgaven ble skrevet høsten 2011 som en masterspesialisering i matematikk på Lektorprogrammet ved Universitetet i Oslo. Arbeidet med oppgaven har vært interessant og lærerikt, og jeg vil rette en stor takk til min veileder Bjørn Jahren som har funnet et interessant tema, hjulpet meg til å finne resultatene og gitt mange gode råd underveis.

Takk til Sigurd Segtnan som har lest oppgaven og gitt verdifulle tilbakemeldinger.

Jeg vil også takke alle studentene i 6. etasje i Niels Henrik Abels hus og på Lektorprogrammet for en trivelig studietilværelse med inspirerende samarbeid og et hyggelig fellesskap.

En varm takk går til min kjære Ellen for all godhet og omtanke.

Geir Magne Flø, desember 2011.

## Introduksjon

Geometri er en retning innen matematikken med lang tradisjon. For mer enn 2000 år siden skrev Euklid “Elementene”. Dette verket var selve standardverket innen geometri helt fram til 1800-tallet. I dette verket introduserte Euklid den aksiomatiske metoden; man bygger opp geometrien ved å utlede teoremer fra noen grunnleggende setninger kalt aksiomer. Fra Euklids tid og fram til 1800-tallet mente man at denne euklidske geometrien beskrev verden slik den faktisk var.<sup>1</sup> Dette synet på geometri lyktes flere matematikere (Lobachevski, Bolyai og Gauss) i det nittende århundre å løsrive seg fra, og i denne perioden innså man at man kunne konstruere andre geometrier enn den euklidske. Helt siden Euklids dager ble parallellaksiomet (et av aksiomene i den euklidske geometrien) ansett som mindre opplagt enn de andre aksiomene. På 1800-tallet lyktes man i å konstruere geometrier der parallellaksiomet ble erstattet av andre aksiomer. Den første av disse modellene ble konstruert av Beltrami i 1868 og fikk senere navnet hyperbolsk geometri.<sup>2</sup> Et annet eksempel på en ikke-euklidsk geometri er den sfæriske geometrien, og samlet utgjør den sfæriske, den euklidske og den hyperbolske geometrien de tre klassiske geometriske strukturene.

Men historien stopper ikke der. Disse tre strukturene er *homogene*, dvs de ser “like” ut i den forstand at omegner om to punkter kan avbildes på hverandre ved lokale kongruenser.<sup>3</sup> Mange flater har imidlertid ikke denne egenskapen. Slike flater kan utstyres med en geometrisk struktur som varierer *kontinuerlig* over flaten. Denne geometrien er innkodet i den *riemannske metrikken*. Gitt en riemannsk metrikk kan man beregne *gausskrummingen* i hvert punkt på en flate og den *geodetiske krummingen* til kurver på flaten. På mange flater vil gausskrummingen variere kontinuerlig, mens de tre klassiske geometriene kjennetegnes ved at gausskrummingen er konstant.<sup>4</sup> I *differensialgeometrien* studerer man flater (eller rom av høyere dimensjoner) med en riemannsk metrikk. Denne geometrien er altså langt mer generell enn de klassiske geometriske strukturene.

Gauss-Bonnets teorem er en formel som relaterer den *geometriske* strukturen (krumming, geodetisk krumming, vinkler) til en *topologisk* invariant (eulerkarakteristikken).<sup>5</sup> Teoremet forutsetter imidlertid at flaten ikke inneholder noen singulariteter. I denne oppgaven skal vi se at et tilsvarende teorem kan formuleres og bevises også for singulære flater. Først skal vi ta

---

<sup>1</sup>[Jahren 2011, s. 11]

<sup>2</sup>[Jahren 2011, s.11-12]

<sup>3</sup>[Jahren 2011, s. 103]

<sup>4</sup>[Jahren 2011, s. 155]

<sup>5</sup>[Jahren 2011, s. 158]

for oss orbifoldigheter (eng. orbifolds).<sup>6</sup> Disse kjennetegnes ved at en omegn om ethvert punkt er homeomorft med  $\mathbb{R}^n/G$  hvor  $G$  er en endelig gruppe som virker effektivt på  $\mathbb{R}^n$ . Deretter skal vi se på singulære flater i  $\mathbb{R}^3$ . Også for slike flater kan man formulere og bevise et Gauss-Bonnet-teorem hvor formelen inneholder korreksjonsledd som avhenger av de singulære punktene.

I oppgavens første kapittel vil vi gi en presentasjon av noen av de mest sentrale begrepene og resultatene i differensialgeometrien hvor hovedresultatet er Gauss-Bonnets teorem. Kapittel 2 omhandler orbifoldigheter og avsluttes med et bevis for Gauss-Bonnets teorem for disse flatene. I kapittel 3 vil vi formulere og bevise et Gauss-Bonnet-teorem for singulære flater i  $\mathbb{R}^3$ , og i kapittel 4 vil vi anvende dette teoremet på noen slike singulære flater.

For å lese oppgaven vil noe forkunnskaper innen topologi og differensialgeometri selvsagt være en fordel, men den viktigste teorien vil bli presentert underveis. Kapittelet om orbifoldigheter forutsetter litt kjennskap til gruppeteori.

---

<sup>6</sup>[Thurston 2002]

# 1 Differensialgeometri

I dette kapitlet vil vi definere noen av de mest sentrale begrepene i differensialgeometrien og presentere noen sentrale resultater. Det viktigste vil være Gauss-Bonnets teorem (for ikke-singulære flater) som vi skal ta utgangspunkt i når vi senere skal bevise tilsvarende teoremer for singulære flater.

## 1.1 Litt grunnleggende teori

Vi begynner med å definere en flate og dens differensiabel struktur.<sup>7</sup>

**Definisjon 1.1.1.** En *flate* er et rom  $S$  slik at for hver  $p \in S$  fins en avbildning  $x : U \rightarrow S$  fra en åpen mengde  $U \in \mathbb{R}^2$  slik at  $p \in x(U)$  og  $x : U \rightarrow x(U)$  er en homeomorfi. En slik avbildning  $x$  kaller vi en *lokal parametrisering*.

Siden en flate kan parametriseres ved hjelp av flere overlappende lokale parametriseringer, trenger man koordinattransformasjoner for å bestemme hva som skjer i overlappet.

**Definisjon 1.1.2.** For to lokale parametriseringer  $x : U \rightarrow S$  og  $y : V \rightarrow S$  er en *koordinattransformasjon* en avbildning  $y^{-1}x : U \cap x^{-1}y(V) \rightarrow V \cap y^{-1}x(U)$ . Et *atlas* er en samling lokale parametriseringer  $(x_i, U_i)$  slik at  $\cup_i U_i = S$ . En differensiabel struktur på  $S$  er et maksimalt atlas slik at alle koordinattransformasjonene er glatte.

For en flate  $S$  med differensiabel struktur kan vi definere tangentplan<sup>8</sup>. La  $S$  være en glatt flate og la  $p \in S$ . En kurve gjennom  $p$  er en glatt avbildning  $\omega : J \rightarrow S$  hvor  $J$  er et åpent intervall slik at  $0 \in J$  og  $\omega(0) = p$ . La  $\Omega_p$  være mengden av alle slike kurver i  $p$ , velg en lokal parametrisering  $x : U \rightarrow S$  rundt  $p$ . Da er  $x^{-1}\omega$  en kurve gjennom  $x^{-1}(p) \in \mathbb{R}^2$ , og  $(x^{-1}\omega)'(0)$  er en vektor i  $\mathbb{R}^2$ . Vi kan nå definere en ekvivalensrelasjon  $\sim$  på  $\Omega_p$ .

$$\omega \sim \tau \Leftrightarrow (x^{-1} \circ \omega)'(0) = (x^{-1} \circ \tau)'(0).$$

Vi har nå følgende lemma:

### Lemma 1.1.3.

1) Denne ekvivalensrelasjonen avhenger ikke av valg av lokal parametrisering  $x$ .

La  $T_p S$  være mengden av ekvivalensklasser.

---

<sup>7</sup>[Jahren 2011, s. 105]

<sup>8</sup>[Jahren 2011, s. 105]

- 2)  $\omega \mapsto (x^{-1}\omega)'(0)$  induserer en bijeksjon  $T_pS \approx \mathbb{R}^2$ .  
 3) Bijeksjonen i 2) definerer en vektorromsstruktur på  $T_pS$  som er uavhengig av  $x$ .

For bevis, se [Jahren 2011, s. 106].

La  $x : U \rightarrow S$  være en lokal parametrisering av en flate  $S$  og la  $(u, v)$  være koordinatene i  $U \in \mathbb{R}^2$ . Kurvene  $u \mapsto x(u, v)$  og  $v \mapsto x(u, v)$  kalles *koordinatkurver*, og  $x_u$  og  $x_v$  er tangentvektorer til disse kurvene. Disse utgjør en basis for tangentplanet, og kryssproduktet av disse gir en normalvektor til tangentplanet  $N = x_u \times x_v$ . For en flate  $S \in \mathbb{R}^3$  er dette de partielle deriverte av  $x$  mhp  $u$  og  $v$ .<sup>9</sup>

**Definisjon 1.1.4.**  $T_pS$  med vektorromsstrukturen gitt ved Lemma 1.1.3 kalles tangentplanet til  $S$  i  $p$ .

Det er verdt å merke seg at definisjonene ikke forutsetter at flatene er embeddet i  $\mathbb{R}^3$ . I denne oppgaven vil vi se flere eksempler på flater hvor dette ikke er tilfelle. Et eksempel på en flate som ikke kan embeddes<sup>10</sup> i  $\mathbb{R}^3$  er *det projektive planet*,  $\mathbb{P}^2$ . Orbifoldigheter er et annet eksempel på slike abstrakte flater.

**Definisjon 1.1.5.** Dersom  $S$  er en flate i  $\mathbb{R}^3$  som også er en glatt flate og  $\iota : S \subset \mathbb{R}^3$  er inklusjonsavbildningen, kaller vi  $S$  en regulær flate hvis jacobideterminanten til komposisjonen  $\iota \circ x$  har rang 2 i hvert punkt for hver lokal parametrisering  $x$  av  $S$ .

Man kan vise at en flate  $S$  er regulær hvis og bare hvis den lokalt er på formen  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$  for en glatt funksjon  $F$  med  $\nabla F \neq 0$  på  $S$ . Sfærer er et eksempel på slike flater<sup>11</sup>. Dersom det finnes et punkt hvor  $\nabla F = 0$  har vi en singularær flate. Et eksempel på det er kjeglen som kan skrives som  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Den har  $\nabla F = (2x, 2y, -2z)$ ,  $\nabla F(0, 0, 0) = 0$  og dermed en singularitet i 0. Vi vil se flere eksempler på slike flater senere i oppgaven.

Derivasjon av glatte funksjoner er definert som følger:

**Definisjon 1.1.6.** La  $f : S \rightarrow S'$  være glatt,  $p \in S$ ,  $q = f(p)$  og  $\omega \in \Omega_p(S)$ . Da er  $f \circ \omega \in \Omega_q(S')$ . Den deriverte av  $f$  i  $p$  er avbildningen  $df_p : T_pS \rightarrow T_qS'$  definert ved  $df_p(\omega'(0)) = (f\omega)'(0)$ .

<sup>9</sup>[Jahren 2011, s. 107f]

<sup>10</sup>[Spivak 2005, s. 11]

<sup>11</sup>[Jahren 2011, s. 107]



Dette er veldefinert, den deriverte er en lineærtransformasjon, og kjerneregelen holder<sup>12</sup>.

I denne oppgaven vil vi både betrakte flater som er orienterbare og flater som ikke er det. Vi har følgende definisjon:

**Definisjon 1.1.7.** En flate  $S$  er *orienterbar* hvis den har et differensiabelt atlas slik at jacobideterminantene til koordinattransformasjonene er positive overalt. En orientering av  $S$  er et valg av et slikt maksimalt atlas.

Vi kan nå innføre en riemannsk metrikk.

**Definisjon 1.1.8.** En *riemannsk metrikk* på  $S$  er et valg av indreprodukt på hvert tangentplan  $T_p S$  som varierer glatt med  $p$ . Vi bruker notasjonen  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  for indreproduktet på  $T_p S$ .

At indreproduktet varierer glatt, betyr følgende: For en lokal parametrisering  $x : U \rightarrow S$  er indreproduktet bestemt av verdien på basisen  $\{x_u, x_v\}$  dvs på funksjonene

$$E = \langle x_u, x_u \rangle, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle = \langle x_v, x_u \rangle \quad \text{og} \quad G = \langle x_v, x_v \rangle,$$

og at indreproduktet er glatt betyr at disse funksjonene er glatte for alle lokale parametriseringer. Hvis en flate er utstyrt med en riemannsk metrikk, sier vi at flaten har en riemannsk struktur og vi kaller den en riemannsk flate<sup>13</sup>.

En riemannsk metrikk gir en norm  $\|w_p\|$  for en vektor  $w_p \in T_p S$  gitt ved  $\|w\|_p^2 = \langle w, w \rangle_p$ . For en  $C^1$ -kurve  $\omega(t) = x(u(t), v(t))$ ,  $t \in [a, b]$  og  $p = \omega(t)$  har vi

$$\|\omega\|_p^2 = E(p)(u'(t))^2 + 2F(p)u'(t)v'(t) + G(p)(v'(t))^2.$$

Dermed kan vi definere *buelengden* til en slik kurve  $\omega$  mellom parameterverdiene  $a$  og  $t$  ved

$$s(t) = \int_a^t \|\omega'(t)\|_{\omega(t)} dt.$$

Dette gir også formler for distanse og vinkler. Distansen mellom to punkter  $p, q \in S$  er gitt ved

---

<sup>12</sup>[Jahren 2011, s. 108f]

<sup>13</sup>[Jahren 2011, s. 117]

$$d(p, q) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{p,q}\}$$

hvor  $l(\gamma)$  er buelengden til  $\gamma$  og  $\Omega_{p,q}$  er mengden av alle  $C^1$ -kurver fra  $p$  til  $q$ . Vinkler er definert ved

$$\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle = \cos \phi \|\alpha'(0)\| \|\beta'(0)\|$$

hvor  $\alpha(t)$  og  $\beta(t)$  er to glatte kurver slik at  $\alpha(0) = \beta(0)$ . Formelen gir en entydig vinkel  $\phi \in [0, \pi]$ .<sup>14</sup>

Også en arealformel følger fra metrikken:

$$A(R) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

der  $\Omega$  er en region begrenset av glatte kurver.<sup>15</sup>

Vi skal nå snart definere krummingen til en flate. Dette skal gjøres for en flate  $S \subset \mathbb{R}^3$ , men for å definere krumming også for abstrakte flater (som  $\mathbb{P}^2$ ), trenger man avbildninger som bevarer den riemannske strukturen<sup>16</sup>. Slike kalles isometrier. En *isometri* er en diffeomorfi slik at følgende holder for alle  $p \in S$  og  $v, w \in T_p S$ :

$$\langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)} = \langle v, w \rangle_p.$$

Dersom dette er oppfylt uten at  $f$  er en diffeomorfi, kaller vi  $f$  en *lokal isometri*.

Et av de aller mest sentrale begrepene i differensialgeometrien er *krumming*. Krumming kan defineres på ulike måter. Vi skal definere *gausskrummingen*. Dette skal vi gjøre for en regulær flate  $S \subset \mathbb{R}^3$ , men den gjelder også for abstrakte flater som ikke er embeddet i  $\mathbb{R}^3$  så lenge den er *lokalt isometrisk* med en regulær flate  $S$ .<sup>17</sup>

La  $S$  være en regulær flate i  $\mathbb{R}^3$ , og la  $x : U \rightarrow S \in \mathbb{R}^3$  være en lokal parametrisering. Da er en enhetsnormalvektor gitt ved

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}.$$

En enhetsnormalvektor i motsatt retning finner man ved å bytte om rekkefølgen på  $x_u$  og  $x_v$ .

---

<sup>14</sup>[Jahren 2011, s. 118]

<sup>15</sup>[Jahren 2011, s. 119]

<sup>16</sup>[Jahren 2011, s. 132]

<sup>17</sup>[Jahren 2011, s. 132]

Siden  $\|N\| = 1$  kan vi tenke på  $N$  som en glatt avbildning  $N : x(U) \rightarrow S^2$ . Denne kalles *gaussavbildningen*. Den deriverte til  $N$  er en lineærtransformasjon, og den har dermed en determinant. Vi definerer gausskrummingen ved

$$K(p) = \det(dN_p).$$

Det er verdt å merke seg at  $K$  er uavhengig av valg av normalvektor.<sup>18</sup>

For en flate  $S \subset \mathbb{R}^3$  med en lokal parametrisering  $x : U \rightarrow S$  om  $p$ , kan vi tenke på  $x_u$  og  $x_v$  som de partiellderiverte til  $x$ . Vi kan også ta andre ordens partiellderiverte  $x_{uu}$ ,  $x_{uv}$  og  $x_{vv}$ . Dermed kan vi definere funksjonene

$$e = N \cdot x_{uu}, \quad g = N \cdot x_{vv} \quad \text{og} \quad f = N \cdot x_{uv}.$$

Disse funksjonene gir oss et annet uttrykk for gausskrummingen:<sup>19</sup>

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1)$$

Et av de viktigste teoremene i differensialgeometrien sier at denne krummingen er uavhengig av den lokale parametriseringen (intrinsisk):

**Teorem 1.1.9.** (Theorema Egregium) Gausskrummingen er intrinsisk.

Dette teoremet er bevist hos [Jahren 2011, s.130 – 131].

For en flate med en riemannsk struktur ønsker vi noe som tilsvare linjene i euklidisk geometri. Disse "linjene" vil vi kalle *geodeter*. Atter en gang definerer vi dette for flater i  $\mathbb{R}^3$ , men på grunn av lokale isometrier kan vi overføre konseptet til abstrakte flater. Linjene i euklidisk geometri kjennetegnes ved at de aldri skifter retning. Denne egenskapen er utgangspunktet for definisjonen av geodetene.

La  $\beta(t)$  være en kurve gjennom  $p \in \mathbb{R}^3$  med derivert  $\beta'(t)$  og dobbeltderivert  $\beta''(t)$ . La  $D\beta''(t)$  være projeksjonen av  $\beta''(t)$  på  $T_pS$ .

**Definisjon 1.1.10.** Den *kovariant andrederiverte* til  $\beta$  er gitt ved  $D\beta''(t)$ . Kurven  $\beta$  er en geodet dersom  $\beta'(t) \neq 0$  og  $D\beta''(t)$  er et multippel av  $\beta'(t)$  for alle  $t$ .

I beregninger der den kovariant andrederiverte inngår, trenger man kurver som er parametrisert på en spesiell måte:

---

<sup>18</sup>[Jahren 2011, s. 126]

<sup>19</sup>[Jahren 2011, s. 128]

**Definisjon 1.1.11.** La  $\alpha$  være en kurve. Dersom  $\alpha$  er parametrisert slik at  $\|\alpha'(s)\| = 1$  for alle  $s$ , sier vi at  $\alpha$  er *parametrisert ved buelengde*. Kurver som er slik at  $\frac{ds}{dt}$  er konstant (et multiplum av buelengde), kalles *geodeter med konstant hastighet*.

For slike kurver har vi følgende proposisjon:

**Proposisjon 1.1.12.** En kurve parametrisert ved  $\alpha(t)$  er en geodet med konstant hastighet hvis og bare hvis den kovariant andrederiverte er lik null, dvs  $D\alpha''(s) = 0$ .

Formeler for den kovariant andrederiverte finner man uttrykt ved *Christoffelsymbolene*. Se [Jahren 2011, s. 140-143] for mer om dette. En analog til Theorema Egregium er følgende:

**Teorem 1.1.13.** Den kovariant andrederiverte er intrinsisk.

En observasjon som vil komme til nytte senere i oppgaven er at den kovariant andrederiverte er uavhengig av retning.<sup>20</sup> Det vil si at om vi erstatter en kurve  $\alpha(t)$  med en kurve  $\beta(t) = \alpha(c - t)$  for en konstant  $c$ , har vi

$$D\beta''(s) = D\alpha''(c - s).$$

Geodeter vil spille en viktig rolle i forbindelse med parametrisering av flater. I den forbindelse trenger vi følgende proposisjon:

**Proposisjon 1.1.14.** Ethvert punkt på en riemannsk flate  $S$  har en åpen omegn  $V$  med følgende egenskap:

Det eksisterer positive tall  $\epsilon$  og  $\tau$  slik at for hver  $q \in V$  og  $w \in T_p S$  med  $\|w\| < \epsilon$ , fins en entydig geodet med konstant hastighet  $\gamma_w^q : (-\tau, \tau) \rightarrow S$  slik at

$$\gamma_w^q(0) = q \text{ og } \gamma_w^q'(0) = w.$$

Dessuten avhenger  $\gamma_w^q(t)$  glatt av  $q$ ,  $w$  og  $t$ .

Dette bruker vi til å definere en eksponentialavbildning  $exp_p : B_p(\epsilon) \rightarrow S$  ved

$$exp_p(w) = \gamma_w^p(1).$$

De viktigste egenskapene til eksponentialavbildningen er følgende:

---

<sup>20</sup>[Jahren 2011, s. 142]

**Teorem 1.1.15.** For hver  $p \in S$  fins det en  $\epsilon > 0$  slik at

- 1)  $\exp_p$  er en diffeomorfi mellom  $B_p(\epsilon)$  og en omegn om  $p$ .
- 2) Hvis  $\epsilon$  er tilstrekkelig liten, kan to punkter i  $\exp_p(B_p(\epsilon))$  forbindes med en entydig geodet med lengde mindre enn  $2\epsilon$ .

Her er  $B_q(\epsilon) = \{w \in T_p S \mid \|w\| < \epsilon\}$  hvor  $q \in V$  og  $\epsilon > 0$ .

En omegn parametrisert ved eksponentialavbildningen kalles en *normal omegn*.

Vi vil nå innføre *geodetiske polarkoordinater*. La  $S$  være en flate med tangentplanet  $T_p S$  i punktet  $p$ . Vi kan parametrisere tangentplanet ved hjelp av polarkoordinater  $(r, \theta)$ . For en tilstrekkelig liten  $\epsilon > 0$  og et åpent intervall  $J$  med lengde mindre eller lik  $2\pi$ , vil avbildningen

$$x(r, \theta) = \exp_p(r\alpha(\theta)), (r, \theta) \in (0, \epsilon) \times J$$

være en lokal parametrisering av  $S$ . Holder man henholdsvis  $r$  og  $\theta$  fast, vil  $\exp_p(r\alpha(\theta))$  parametrisere *geodetiske sirkler* og *geodetiske radier*.

Riemannske flater med konstant krumming kan klassifiseres:<sup>21</sup>

**Teorem 1.1.16.** La  $S$  være en riemannsk flate slik at gausskrummingen er konstant. Da gjelder følgende:

- Hvis  $K = 0$ , er  $S$  lokalt isometrisk med det euklidske planet.
- Hvis  $K = 1/R^2$ , er  $S$  lokalt isometrisk med en sfære med radius  $R$ .
- Hvis  $K = -1/\rho^2$ , er  $S$  lokalt isometrisk med det hyperbolske planet  $\mathbb{D}_\rho$  der  $\mathbb{D}_\rho$  er metrikken til  $\mathbb{D}$  skalert med en konstant  $\rho$ .

Som kommentert innledningsvis i oppgaven betyr det at de tre klassiske geometriske strukturer (euklidsk, sfærisk og hyperbolsk) er spesialtilfeller av den mer generelle teorien vi omtaler i dette kapitlet. Også orbifoldighetene vi skal behandle i neste kapittel kan utstyres med disse strukturer.

Vi er nødt til å definere linje- og flateintegraler for riemannske flater siden slike integraler vil inngå i Gauss-Bonnet-formelen:

**Definisjon 1.1.17.** La  $f$  være en funksjon definert på en kurve  $\mathcal{C}$  parametrisert ved en funksjon  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  med  $\|\alpha'(t)\| \neq 0$  for alle  $t$ . Da er

---

<sup>21</sup>[Jahren 2011, s. 155]

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} dt.$$

Dette er uavhengig av parametriseringen, og for stykkevis glatte funksjoner kan vi definere integralet som summen av integralene over de glatte delkurvene.<sup>22</sup>

**Definisjon 1.1.18.** La  $f$  være definert på en kompakt region  $R$  begrenset av en stykkevis glatt kurve på en riemannsk flate. Hvis  $R \subset x(U)$  for en parametrisering  $x$  definerer vi

$$\iint_R f dA = \iint_{x^{-1}(R)} f(x(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Også dette er uavhengig av parametriseringen. Et område  $R$  som ikke er inneholdt i en koordinatomegn kan deles opp i mindre biter som er det, og integralet kan defineres som summen av bitene, hvilket er uavhengig av oppdelingen.<sup>23</sup>

Til sist vil vi definere den geodetiske krummingen til en kurve:

La  $S$  være en riemannsk flate og anta  $\alpha(s)$  er en regulær kurve parametrisert ved buelengde, med enhetstangentvektor  $T(s) = \alpha'(s)$ . For alle  $s$  har  $\alpha$  to valg av enhetsnormalvektor  $n_\alpha(s)$  i  $\alpha(s)$ . Et kontinuerlig valg av en av dem kalles en *normal orientering* av kurven.

**Definisjon 1.1.19.** La  $\alpha(s)$  være en normalt orientert kurve parametrisert ved buelengde. Den geodetiske krummingen er definert som normalkomponenten til  $D\alpha''(t)$ :

$$k_g(s) = D\alpha''s \cdot n_\alpha(s). \quad (2)$$

Valget av normal orientering påvirker kun fortegnet til  $k_g$ . Den normale orienteringen er naturlig definert i to situasjoner:

- 1) Dersom flaten  $S$  er orientert, velger vi normalvektor  $n_\alpha$  slik at vektorene  $T(s), n_\alpha(s)$  gir en positivt orientert basis for  $T_{\alpha(s)}S$ .
- 2) I den situasjonen vi skal se på, trenger ikke flaten være orientert, men kurvene er regulære randkurver av regioner  $R \subset S$ . Da velger vi  $n_\alpha$  til å

---

<sup>22</sup>[Jahren 2011, s. 156]

<sup>23</sup>[Jahren 2011, s. 156]

være enhetsnormalvektoren som peker *inn* i  $R$ .

Dersom  $R \subset S$  er som i punkt 2, vil definisjonene stemme overens dersom  $\partial R$  gjennomløpes rundt  $R$  *mot klokka*.

Hvis  $\partial R$  er en stykkevis glatt kurve, vil den i hvert ikke-glatt punkt  $p_i \in \partial R$  ha en indre vinkel  $\eta_i \in [0, 2\pi]$ . La  $\epsilon_i = \pi - \eta_i \in [-\pi, \pi]$  i  $p_i$ . For en orientert flate  $S$  der  $\partial R$  gjennomløpes mot klokka, er denne vinkelen positiv hvis vi dreier mot venstre i  $p_i$  og negativ hvis vi dreier mot høyre. Hvis  $\epsilon_i = \pm\pi$ , kaller vi  $p_i$  en *cusps*.

Alt som har blitt skrevet så langt i dette kapitlet har omhandlet den *geometriske* strukturen til flater. Gauss-Bonnets teorem viser at det er en sammenheng mellom den geometriske strukturen til en flate og dens *topologiske* egenskaper. Vi skal nå definere eulerkarakteristikken som er en topologisk invariant.

**Definisjon 1.1.20.** La  $R \subset S$  være triangulert, og la  $T$  betegne antall trekanter,  $E$  antall kanter og  $V$  antall hjørner i trianguleringen. Da har  $R$  følgende eulerkarakteristikk:

$$\chi(R) = T - E + V.$$

Dette er uavhengig av trianguleringen av  $R$  og er en homotopiinvariant.<sup>24</sup>

Nå har vi alt vi trenger for å se på Gauss-Bonnets teorem.

## 1.2 Gauss-Bonnets teorem

La  $R$  være en kompakt flate med en rand  $\partial R$  bestående av et endelig antall glatte kurver. Da gjelder følgende:

**Teorem 1.2.1.** (Gauss-Bonnet)

$$\iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds + \sum_k \epsilon_k = 2\pi\chi(R).$$

**Bevis.** For et fullstendig bevis, se [Jahren 2011, s.159 – 164]. Vi vil her gjengi de hovedpunktene som er av særlig relevans med tanke på de modifiseringer vi senere skal gjøre.

Man lar  $R$  være glatt triangulert, dvs  $R$  kan skrives som en union av glatte, embeddede trekanter. Hver av disse er inneholdt i en *normal* omegn,

---

<sup>24</sup>[Hatcher 2001, s. 146]

dvs en omegn parametrisert ved geodetiske polarkoordinater sentrert om et punkt i det indre av en trekant. Det generelle tilfellet følger dersom man kan bevise teoremet for hver slik trekant. Det gjøres på sidene 159-162 hos [Jahren 2011].

For hver slik trekant gjelder:<sup>25</sup>

$$\iint_{R_j} K dA + \sum_{\partial R_j} k_g ds = \eta_{j1} - \eta_{j2} - \eta_{j3} - \pi.$$

Summerer man over alle  $R_j$ , får man

$$\iint_R K dA + \sum_j \int_{\partial R_j} k_g ds = \sum_{j,i} \eta_{ji} - T\pi \quad (3)$$

der  $T$  er det totale antall trekanter. La  $\alpha_{ji}, i = 1, 2, 3$  være de tre glatte randkurvene til  $R_j$  der disse er normalt orientert i henhold til konvensjonen. Kantene i det indre av  $R$  komme i par med motsatt normal orientering. Dermed har den geodetiske krummingen motsatt tegn og samhørende ledd kansellerer ved:

$$\sum_j \int_{\partial R_j} k_g ds = \sum_{j,i} \int_{\alpha_{ji}} k_g ds.$$

Resterende kanter er i  $\partial R$  der man har

$$\sum_j \int_{\partial R_j} k_g ds = \sum_{\alpha_{ji} \subset \partial R} \int_{\alpha_{ji}} k_g ds = \int_{\partial R} k_g ds.$$

Resten av beviset består i å analysere uttrykket på høyre side av likhetstegnet i ligning (3). Her gjengir vi uttrykkene slik de står i [Jahren 2011, s.162 – 163]. Disse uttrykkene er utgangspunkt for modifikasjonene vi senere skal gjøre.

Siden summen av vinklene  $\eta_{ji}$  rundt et indre hjørne av  $R$  er  $2\pi$ , vil den totale vinkelsummen om alle slike hjørner bli  $2\pi(V - V_\partial)$  der  $V$  og  $V_\partial$  er antall hjørner i hhv  $R$  og  $\partial R$ .

De resterende vinklene er indre vinkler på  $\partial R$ . De summeres opp til

$$V_\partial \pi - \sum_k \epsilon_k. \quad (4)$$

La  $E$  være antall kanter i  $R$  og  $E_\partial$  antall kanter i  $\partial R$ . Da er

---

<sup>25</sup>[Jahren 2011, s. 162]



$$E_{\partial} = V_{\partial}. \quad (5)$$

Siden hver trekant har tre kanter der indre kanter ligger i to kanter mens randkanter kun ligger i en, har vi relasjonen

$$3T = 2E - E_{\partial}. \quad (6)$$

Setter man inn alt dette, får man

$$\begin{aligned} \sum_{j,i} \eta_{ji} - T\pi &= 2\pi(V - V_{\partial}) + V_{\partial}\pi - \sum_k \epsilon_k - T\pi \\ &= 2\pi V - \pi V_{\partial} - \pi T - \sum_k \epsilon_k \\ &= 2\pi V - \pi E_{\partial} - \pi T - \sum_k \epsilon_k \\ &= 2\pi V - \pi(2E - 3T) - \pi T - \sum_k \epsilon_k \\ &= 2\pi\chi(R) - \sum_k \epsilon_k. \end{aligned}$$

Setter man dette inn i (3), får man resultatet. Et kort argument<sup>26</sup> viser at teoremet gjelder også når det er cusper på randa.  $\square$

Når vi senere i oppgaven skal se på singulære flater, må flere av disse uttrykkene modifiseres. Flere trekanter enn to vil kunne møtes langs en kant. Randa trenger ikke være så enkel at  $E_{\partial} = V_{\partial}$ . Vinkelsummen om punkter i det indre av  $R$  vil også ha et noe mer komplisert uttrykk. Men alt dette skal vi komme tilbake til. Nå vil vi se på en type abstrakte flater hvor et Gauss-Bonnet-teorem også viser seg å gjelde.

---

<sup>26</sup>[Jahren 2011, s. 163f]

## 2 Orbifoldigheter

Mangfoldigheter er lokalt homeomorfe med  $\mathbb{R}^n$ . Orbifoldigheter kjenntegnes ved at de er lokalt homeomorfe med  $\mathbb{R}^n/G$  der  $G$  er en endelig gruppe som virker på  $\mathbb{R}^n$ . I dette kapitlet vil vi gi en presentasjon av de todimensjonale orbifoldighetene og vise at Gauss-Bonnets teorem gjelder for disse.

### 2.1 Grunnleggende trekk ved orbifoldigheter

Vi begynner med å definere en gruppevirkning:

**Definisjon 2.1.1.** La  $X$  være en mengde og la  $G$  være en gruppe. En gruppevirkning av  $G$  på  $X$  er en avbildning  $*$ :  $G \times X \rightarrow X$  slik at

- $ex = x$  for alle  $x \in X$  hvor  $e \in G$  er identitetsselementet
- $(g_1g_2)(x) = g_1(g_2(x))$  for alle  $x \in X$  og alle  $g_1, g_2 \in G$ .

Hvis dette er oppfylt, kaller vi  $X$  en  $G$ -mengde og skriver  $G \curvearrowright X$ .

Følgende definisjoner vil også inngå i definisjonen av en orbifoldighet:

**Definisjon 2.1.2.** La  $G \curvearrowright X$  og la  $x \in X$ . Gruppen  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$  kalles *isotropigruppa*. Dersom  $G_x = e$  for alle  $x \in X$ , kalles virkningen *fri*.

**Definisjon 2.1.3.** La  $G \curvearrowright X$ , og la  $g \in G$ . Vi sier at  $G$  virker *effektivt* dersom  $e \in G$  er det eneste elementet i  $G$  som er slik at  $gx = x$  for alle  $x \in X$ .

**Definisjon 2.1.4.** La  $G \curvearrowright X$ , og la  $G(x) = \{gx \in X \mid g \in G\}$ .  $G(x)$  kalles *orbiten* til  $x$ . Dersom det kun er en orbit, kalles virkningen *transitiv*. *Orbitrommet*  $X/G$  er mengden av orbiter i  $X$  med kvotienttopologien.

**Definisjon 2.1.5.** La  $G \curvearrowright X$  og la  $\psi : X \rightarrow X/G$  være avbildningen som sender hvert element i orbiten til  $x$  på  $x$ . Siden hvert element i  $X$  kun er inneholdt i en orbit, er avbildningen veldefinert. Vi kaller denne *orbitavbildningen*.

I forrige kapittel så vi at flater kan utstyres med en differensiabel struktur. En tilsvarende struktur fins for orbifoldigheter. Den skal vi nå definere.

**Definisjon 2.1.6.** Et orbifoldighetkart på et rom  $X$  er et 4-tupple  $(\tilde{U}, G, U, \pi)$  der følgende gjelder:<sup>27</sup>

- $U$  er en åpen delmengde av  $X$ .
- $\tilde{U}$  er en åpen delmengde av  $\mathbb{R}^n$ .
- $G$  er en endelig gruppe av diffeomorfier av  $\tilde{U}$  der  $G$  er effektiv.
- $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$  er en avbildning som kan faktoriseres som  $\pi = \bar{\pi} \circ \psi$  der  $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}/G$  er orbitavbildningen og  $\bar{\pi} : \tilde{U}/G \rightarrow U$  er en diffeomorfi.

La  $i = 1, 2$  og anta  $(\tilde{U}_i, G_i, U_i, \pi_i)$  er orbifoldighetkart på  $X$ . Kartene er kompatible dersom for et gitt punkt  $\tilde{u}_i \in \tilde{U}_i$  med  $\pi_1(\tilde{u}_1) = \pi_2(\tilde{u}_2)$  eksisterer en diffeomorfi  $h$  fra en omegn om  $\tilde{u}_1$  i  $\tilde{U}_1$  på en omegn om  $\tilde{u}_2$  i  $\tilde{U}_2$  slik at  $\pi_1 = \pi_2 \circ h$  på omegnen.

La  $(\tilde{U}, G, U, \pi)$  være et orbifoldighetkart. Vi kaller da  $U$  en *lokal parametrisering*.

Vi kan nå definere et atlas på  $X$ :

**Definisjon 2.1.7.** Et *orbifoldighetatlas* på  $X$  er en kompatibel samling  $\{(\tilde{U}_i, G_i, U_i, \pi_i)\}_{i \in I}$  av orbifoldighetkart som dekker  $X$ .

Vi kan nå gi følgende definisjon av en orbifoldighet:

**Definisjon 2.1.8.** En orbifoldighet  $O$  består av et underliggende topologisk rom  $X_O$  med et maksimalt atlas av orbifoldighetkart.<sup>28</sup>

Dersom parametriseringene  $U_i$  har dimensjon  $n$ , sier vi at  $O$  har dimensjon  $n$ . I denne oppgaven skal vi konsentrere oss om orbifoldigheter med dimensjon 2, men det fins orbifoldigheter også for høyere dimensjoner<sup>29</sup>.

I definisjon 2.1.6 lot vi  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ . Vi vil fra tid til annen la  $\tilde{U}$  betegne en mengde som er homeomorf med en slik åpen delmengde av  $\mathbb{R}^n$ .

Et eksempel på en orbifoldighet er følgende:

**Eksempel 2.1.9.** La  $X = \mathbb{R}^2$ , og la  $\mathbb{Z}_3$  være gruppa som virker på  $\mathbb{R}^2$  ved rotasjon på  $2\pi/3$  om origo. Da er  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_3$  er en orbifoldighet med et singulært

<sup>27</sup>Definisjonen er hentet fra [Davis 2008a]. Han krever at avbildningen  $\pi$  skal være en homeomorfi. Vi krever at den skal være en diffeomorfi siden vi senere skal integrere på orbifoldigheter.

<sup>28</sup>[Davis 2008a]

<sup>29</sup>Se f eks [Thurston 2002] for mer om dette.

punkt i origo. Isotropigruppa til punktet i origo er  $\mathbb{Z}_3$  siden dette punktet er invariant under alle rotasjonene i  $\mathbb{Z}_3$ . For de resterende punktene i  $\mathbb{R}^2$  er isotropigruppa triviell siden identitets-elementet i  $\mathbb{Z}_3$  er det eneste elementet som bevarer noen av disse punktene.

Mengden av singulære punkter på en orbifoldighet kalles en singulær lokus. Denne definerer vi ved følgende:

**Definisjon 2.1.10.** La  $p \in O$ , og la  $(\tilde{U}, G, U, \pi)$  være et orbifoldighetkart slik at  $p \in U$ . La  $e$  være identitets-elementet til  $G$  og la  $x \in \tilde{U}$  være slik at  $\pi(x) = p$ . La  $G_p$  være isotropigruppa til  $x$ . Mengden

$$\Sigma_O = \{p \mid G_p \neq \{e\}\}$$

kalles den singulære lokusen til  $O$ .

En overdekning til en orbifoldighet er definert ved følgende:

**Definisjon 2.1.11.** En overdekning av  $O$  er en orbifoldighet  $\tilde{O}$  med en projeksjon  $p : X_{\tilde{O}} \rightarrow X_O$  slik at for enhver  $x \in X_O$ , fins en åpen omegn  $U$  om  $x$  som er diffeomorf med  $\tilde{U}/G$  ( $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ ) og hver  $v_i \in p^{-1}(U)$  har en omegn  $U_i \approx \tilde{U}_i/G_i$  der  $U_i \subset \mathbb{R}^n$  og  $G_i \subset G$ .

**Definisjon 2.1.12.** En *god* orbifoldighet er en orbifoldighet som har en overdekning som er en mangfoldighet. En *dårlig* orbifoldighet kan ikke dekkes av en mangfoldighet.

## 2.2 Klassifikasjonen av orbifoldigheter

To-dimensjonale orbifoldigheter kan klassifiseres utfra hva slags singulariteter de har. En endelig gruppe  $G$  som virker på  $\mathbb{R}^2$  må være en endelig undergruppe av  $O(2)$ . Elementene i denne gruppa består av rotasjon om origo, eventuelt med en refleksjon.<sup>30</sup> Derfor kan vi klassifisere singularitetene ved følgende teorem:

**Teorem 2.2.1.** Den singulære lokusen til en orbifoldighet  $O$  består av tre typer punkter:

- 1) Speilingspunkter: Et slikt punkt har en omegn diffeomorf med  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2$  der  $\mathbb{Z}_2$  virker ved refleksjon langs ei linje.
- 2) Kjeglepunkter: Et slikt punkt har en omegn diffeomorf med  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_n$  der  $\mathbb{Z}_n$  virker ved rotasjon på  $2\pi/n$ .
- 3) Reflektorhjørner: Et slikt punkt har en omegn diffeomorf med  $\mathbb{R}^2/\mathcal{D}_m$  der

---

<sup>30</sup>[Kaye 2007, s. 3]

$\mathcal{D}_m$  er en dihedrale gruppen av orden  $2m$ , dvs generert ved refleksjon om to linjer som møtes med en vinkel på  $\pi/m$ .

For bevis, se [Kaye 2007, s.3 – 4].<sup>31</sup>

**Definisjon 2.2.2.** La  $q \in O$  være et kjeglepunkt med en tilhørende gruppe  $\mathbb{Z}_n$  som i punkt 2 i foregående teorem. Da lar vi *ordenen* til  $q$  være  $n$  (som er ordenen til gruppa). La  $p \in O$  være et reflektorpunkt med en tilhørende gruppe  $\mathcal{D}_m$  som i punkt 3 i foregående teorem. Da lar vi *ordenen* til  $p$  være  $m$  (som er halvparten av ordenen til gruppa).

En to-dimensjonal orbifoldighet defineres utfra dens underliggende topologiske rom  $X_O$ , og antall kjeglepunkter og hjørnereflektorer der  $(n_1, \dots, n_k; m_1, \dots, m_l)$  angir antall hjørnepunkter av orden  $n_1, \dots, n_k$  og hjørnereflektorer av orden  $m_1, \dots, m_l$ .<sup>32</sup>

I forrige kapittel så vi at vi kunne velge en riemannsk metrikk på en flate  $S$  der metrikken er et valg av indreprodukt på hvert tangentrom  $T_p S$ . For en lokal parametrisering  $x : U \rightarrow S$  var indreproduktet bestemt av verdien på basisen  $\{x_u, x_v\}$ , dvs ved funksjonene  $E$ ,  $F$  og  $G$ .

Også orbifoldigheter kan utstyres med en riemannsk metrikk ved at man velger et indreprodukt på hvert tangentrom (der dette eksisterer). I et ikke-singulært område  $U$  på en orbifoldighet er dette uproblematisk. Nær de singulære punktene må vi ta ekstra hensyn.<sup>33</sup>

**Definisjon 2.2.3.** La  $p \in O$  være et singulært punkt og la  $U$  være en lokal parametrisering om  $p$  der  $\pi : \tilde{U}/G \approx U$ .

- 1) Hvis  $p$  er et kjeglepunkt, tilordner vi en metrikk på  $U \setminus \{p\}$  ved følgende: Velg en  $x \in \tilde{U}$  slik at  $\pi(x) = p$ . La  $\tilde{U}$  være utstyrt med en riemannsk metrikk som er invariant under  $G$ . Vi tilordner en metrikk på  $U \setminus \{p\}$  ved å la metrikken på  $U \setminus \{p\}$  være lik metrikken på  $\tilde{U}/G \setminus \{x\}$  og skriver  $U = \tilde{U}/G$ .
- 2) Hvis  $p$  er et reflektorhjørne eller et speilingspunkt, tilordner vi en metrikk på hele  $U$  ved å la  $\tilde{U}$  være utstyrt med en riemannsk metrikk som er invariant under  $G$  og la metrikken på  $U$  være lik metrikken på  $\tilde{U}/G$ . Vi skriver  $U = \tilde{U}/G$ .

Valget av metrikk er veldefinert i begge tilfeller siden metrikken var invariant

---

<sup>31</sup> Dette teoremet slik det forekommer hos [Kaye 2007, s.3] sier at omegnene er homeomorfe med  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_n$  etc. I vår definisjon av en orbifoldighet krever vi at slike omegnere er diffeomorfe med  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_n$  etc. Vi endrer derfor formuleringen i teoremet her. Denne endringen får ingen avgjørende konsekvenser for hvordan dette teoremet skal bevises.

<sup>32</sup> [Thurston 2002, s. 312]

<sup>33</sup> [Thurston 2002, s. 308]

under  $G$ . Siden det singulære punktet på en kjegle ikke har noe tangentplan, kan vi ikke definere noen metrikk i kjeglepunktene. At metrikken til  $\tilde{U}$  er invariant under gruppevirkningen vil være av stor betydning når vi senere skal bevise Gauss-Bonnets teorem på orbifoldigheter.

Vi kan nå beregne krummingen i hvert punkt der det eksisterer et valg av metrikk. Dersom en orbifoldighet har *konstant* krumming, sier vi at den har en av de tre klassiske geometriske strukturene:<sup>34</sup>

**Definisjon 2.2.4.** En orbifoldighet  $O$  har den geometriske strukturen til  $S^2$  ( $\mathbb{R}^2$  eller  $\mathbb{H}^2$ ) hvis for hver åpen mengde  $U_i \subset O$ ,  $\tilde{U}_i \subset S^2$  ( $\mathbb{R}^2$  eller  $\mathbb{H}^2$ ),  $G_i \subset \text{Isom}(S^2)$  ( $\mathbb{R}^2$  eller  $\mathbb{H}^2$ ) og  $U_i = \tilde{U}_i/G_i$  for alle  $i$ .

I denne oppgaven vil vi forutsette at speilingslinjene oppstår ved at man speiler langs *geodetiske kurver* uansett hva krummingen måtte være. Dersom  $O$  har sfærisk struktur, speiles det om storsirkler på  $S^2$ , og er  $O$  hyperbolsk, speiles det om hyperbolske linjer. Vi vil videre anta at det underliggende topologiske rommet til en orbifoldighet  $X_O$  ikke har noen annen rand enn slike speilingslinjer.

For en orbifoldighet vil vi definere eulertallet ved følgende:<sup>35</sup>

**Definisjon 2.2.5.** Gitt en orbifoldighet  $O$ , hvis  $\mathcal{K}$  er en CW-kompleksdekomposisjon av  $O$  slik at isotropigrupper assosiert med hvert punkt er konstant på hver celle, da er eulertallet til  $O$  definert ved

$$\chi(O) = \sum_{\Delta} (-1)^{\dim(\Delta)} \frac{1}{|\Gamma_{\Delta}|}$$

der det summeres over alle cellene i  $\mathcal{K}$  og  $|\Gamma_{\Delta}|$  er ordenen til isotropigrupper assosiert med cellen  $\Delta$ .

Fra dette kan man utlede følgende formel:<sup>36</sup>

**Teorem 2.2.6.** (Riemann-Hurwitz-formelen) En 2-orbifoldighet med  $m$  reflektorhjørner av orden  $2p_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  og  $n$  kjeglepunkt av orden  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  har eulertall

$$\chi(O) = \chi(X_O) - \sum_i \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_j \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

---

<sup>34</sup>[Kaye 2007, s. 2]

<sup>35</sup>[Kaye 2007, s. 5]

<sup>36</sup>[Kaye 2007, s. 6]

der  $\chi(X_O)$  er eulerkarakteristikken til det underliggende topologiske rommet  $X_O$ . Siden eulertallet kun avhenger av  $\chi(X_O)$  og ordenen til de singulære punktene, er eulertallet uavhengig av valg av CW-kompleks-dekomposisjon av  $O$ .

De to-dimensjonale orbifoldighetene kan nå klassifiseres ved følgende teorem:<sup>37</sup>

**Teorem 2.2.7.** En lukket to-dimensjonal orbifoldighet har en sfærisk, euklidsk eller hyperbolsk struktur<sup>38</sup> hvis og bare hvis den er god. En orbifoldighet  $O$  har en hyperbolsk struktur hvis og bare hvis  $\chi(O) < 0$ , og en euklidsk struktur hvis og bare hvis  $\chi(O) = 0$ . En orbifoldighet er sfærisk eller dårlig hvis og bare hvis  $\chi(O) > 0$ . De dårlige, sfæriske og euklidske orbifoldighetene er følgende:

- Dårlige orbifoldigheter
  - $X_O = S^2 : (n), (n_1, n_2)$  med  $n_1 < n_2$ .
  - $X_O = D^2 : (; n), (; n_1, n_2)$  med  $n_1 < n_2$ .
  
- Sfæriske orbifoldigheter
  - $X_O = S^2 : (), (n, n), (2, 2, n), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$ .
  - $X_O = D^2 : (;), (; n, n), (; 2, 2, n), (; 2, 3, 3), (; 2, 3, 4), (; 2, 3, 5), (n;), (2; m), (3; 2)$ .
  - $X_O = \mathbb{P}^2 : (), (n)$ .
  
- Euklidske orbifoldigheter
  - $X_O = S^2 : (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (2, 2, 2, 2)$ .
  - $X_O = D^2 : (; 2, 3, 6), (; 2, 4, 4), (; 3, 3, 3), (; 2, 2, 2, 2), (2; 2, 2), (3; 3), (4; 2), (2, 2;)$ .
  - $X_O = \mathbb{P}^2 : (2, 2)$ .
  - $X_O = T^2 : ()$ .
  - $X_O = \text{Kleinflasken} : ()$ .
  - $X_O = \text{Annulusen} : (;)$ .
  - $X_O = \text{Möbiusbåndet} : (;)$ .

**Eksempel 2.2.8.** La  $T \subset \mathbb{R}^2$  være en euklidsk trekant med hjørner  $A$  i  $(0,0)$ ,  $B$  i  $(1,0)$  og  $C$  i  $(0,1)$ .  $T$  kan utstyres med en orbifoldighetstruktur der  $p_1 = A$  er et reflektorhjørne av orden 2 ( $\angle A = \pi/2$ ) og  $p_2 = B$  og  $p_3 = C$  er

<sup>37</sup>[Thurston 2002, s. 312]

<sup>38</sup>Disse strukturene kan også kalles hhv elliptisk, parabolisk og hyperbolsk jf [Thurston 2002, s. 312]. Vi holder oss til terminologien hos [Jahren 2011, s. 100].

reflektorhjørner av orden 4 ( $\angle B = \angle C = \pi/4$ ). De resterende punktene langs linjestykkene  $AB$ ,  $BC$  og  $CA$  er speilingspunkter. Siden  $T$  er homeomorf med  $D^2$ , er  $X_O = D^2$ . Dermed kan  $O$  skrives som  $X_O = D^2 : (; 2, 4, 4)$ . Eulertallet til  $O$  er

$$\begin{aligned}\chi(O) &= \chi(X_O) - \sum_i \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_j \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \\ \chi(O) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) = 0.\end{aligned}$$

Siden  $O$  framkommer ved refleksjoner om linjer i  $\mathbb{R}^2$  er  $O$  en euklidsk orbifoldighet.

**Eksempel 2.2.9.** La  $O$  være den sfæriske orbifoldigheten  $S^2 : (2, 3, 3)$ . Da har  $O$  tre kjeglepunkter  $q_1$  (av orden 2),  $q_2, q_3$  (av orden 3) hvor hvert av disse har en omegn  $U_i = \tilde{U}_i/\mathbb{Z}_n$  der  $\tilde{U}_i \subset S^2$  og  $\mathbb{Z}_n, n = 2, 3$  virker på  $S^2$  ved rotasjon på  $2\pi/n$ .

$\tilde{U}_i$  er et regulært område i  $S^2$  for alle  $i$ . Dermed kan vi bruke Gauss-Bonnets teorem slik det er gjengitt i kapittel 1 på områder i hver  $\tilde{U}_i$ . Vi vil nå gjøre det på et område i  $\tilde{U}_1 \subset S^2$ . La  $x \in \tilde{U}_1$  være punktet som bevares under rotasjonen fra  $\mathbb{Z}_2$ , og la  $s$  være en storsirkel gjennom  $x$ . Da vil  $s$  dele  $\tilde{U}_1$  inn i to halvdeler  $\tilde{U}_{1V}$  og  $\tilde{U}_{1H}$ . La  $\bar{D}_1$  være en lukket disk med sentrum i  $x$  og radius  $r > 0$  i  $\tilde{U}_1 \subset S^2$ , la  $\partial\bar{D}_1$  være randa til  $\bar{D}_1$ , la  $D_{1H/V}$  være den delen av  $D_1$  som ligger i  $\tilde{U}_{1H/V}$  og la  $\partial\bar{D}_{1H/V}$  være den delen av  $\partial\bar{D}_1$  som ligger i  $\tilde{U}_{1H/V}$ . Vi kan nå bruke Gauss-Bonnet på  $\bar{D}_1$  og får

$$\iint_{\bar{D}_1} K dA + \int_{\partial\bar{D}_1} k_g ds = 2\pi.$$

På grunn av symmetrien på  $S^2$  er

$$\iint_{\bar{D}_{1H}} K dA + \int_{\partial\bar{D}_{1H}} k_g ds = \iint_{\bar{D}_{1V}} K dA + \int_{\partial\bar{D}_{1V}} k_g ds = \pi.$$

Vi kan altså utnytte symmetrien på  $\tilde{U}_1$  til å utføre beregninger på områder på  $\tilde{U}_1/\mathbb{Z}_2$ . Siden  $U_1 = \tilde{U}_1/\mathbb{Z}_2$  kan vi utføre beregninger på  $U_i \subset O$  ved å utnytte symmetrien på modellene  $\tilde{U}_i$ . Denne ideen skal vi bruke når vi skal bevise Gauss-Bonnets teorem på orbifoldigheter. I de foregående eksemplene var metrikken konstant. Det trenger den ikke være for en vilkårlig orbifoldighet. Metrikken kan godt tillates å variere, også inn mot de singulære punktene, så lenge den er invariant under gruppevirkingene.



### 2.3 Gauss-Bonnets teorem for orbifoldigheter

Vi har tidligere sett at orbifoldigheter kan utstyres med en riemannsk metrikk i alle punkter bortsett fra i kjeglepunktene og at vi kan beregne krummingen der den er definert. Vi vil nå definere et krummingsintegral.

**Definisjon 2.3.1.** La  $O$  være en orbifoldighet. Vi sier at  $O$  er *kompakt* dersom det for hver overdekning av orbifoldighetkart eksisterer en endelig deloverdekning av slike.

**Definisjon 2.3.2.** La  $O$  være en kompakt orbifoldighet. Da definerer vi følgende krummingsintegral:

$$\iint_O K dA = \iint_{O \setminus \{q_1, \dots, q_n\}} K dA.$$

der  $q_1, \dots, q_n$  er kjeglepunktene på  $O$ .

Dette integralet eksisterer ved følgende:  $O$  kan dekkes av en endelig mengde lokale parametriseringer  $U_i$ . Dersom  $U_i$  er ikke-singulær, vet vi at integralet  $\iint_{U_i} K dA$  eksisterer. La  $U_i$  være en lokal parametrisering med et singulært punkt  $r$ .  $U_i$  kan skrives  $U_i = \tilde{U}_i/G_i$  der  $\tilde{U}_i$  er et regulært område. Dermed eksisterer  $\iint_{\tilde{U}_i} K dA$ . Men da eksisterer også integralet  $\iint_{U_i} K dA$ . Siden  $O$  kan dekkes av en endelig mengde lokale parametriseringer der integralet eksisterer, eksisterer også integralet ovenfor.

Vi ønsker nå å vise Gauss-Bonnets teorem for orbifoldigheter. For en to-dimensjonal kompakt orbifoldighet  $O$  med eulertall  $\chi(O)$  gjelder

**Teorem 2.3.3.** (Gauss-Bonnet)

$$\iint_O K dA = 2\pi\chi(O). \quad (7)$$

**Bevis.** Ideen til dette beviset er gitt av Thurston i [Thurston 2002, s.312]. Vi vil fjerne små omegner om kjeglepunktene. Dermed står vi igjen med en flate med rand og kan bruke det vanlige Gauss-Bonnet-teoremet på denne.

Siden vi skal fjerne små omegner om kjeglepunktene, ønsker vi at omegnene skal ha en gitt radius. Siden vi ikke har definert noen metrikk i kjeglepunktene, må vi først definere denne radien. La  $r_1$  være et kjeglepunkt på  $O$  og la  $r_1 \in U$  der  $U = \tilde{U}/G$ . La  $r_2$  være et ikke-singulært punkt i  $U$ . La  $x_1, x_2 \in \tilde{U}$  være slik at  $\pi(x_1) = r_1$  og  $\pi(x_2) = r_2$  der  $\pi : \tilde{U}/G \approx U$ . La  $d(r_1, r_2)$  betegne distansen mellom  $r_1$  og  $r_2$ . Vi setter  $d(r_1, r_2) = d(x_1, x_2)$ .

Dette er veldefinert siden  $\tilde{U}_i$  har en metrikk som er invariant under  $G$ . Dermed er  $d(x_1, x_2)$  den samme for hvert valg av  $x_2$  ( $x_1$  er entydig gitt).

Så la  $O$  være en orbifoldighet dekket av lokale parametriseringer  $U_i = \tilde{U}_i/G_i$ . La de ikke-trivielle  $G_i$  gi  $k$  kjeglepunkter av orden  $n_1, \dots, n_k$ ,  $l$  hjørne-reflektorer av orden  $m_1, \dots, m_l$  og speilingslinjer. Vi fjerner små åpne disker  $B_{q_1}(r), \dots, B_{q_k}(r)$  med radius  $r > 0$  om kjeglesingularitetene. La  $\bar{B}_{q_i}(r)$  betegne tillukningen til  $B_{q_i}(r)$ . La diskene være tilstrekkelig små til at hver  $\bar{B}_{q_i}$  er inneholdt i en  $U_i$ . La  $R = O \setminus \{B_{q_1}(r), \dots, B_{q_k}(r)\}$ . Dermed er  $R$  en regulær flate med en rand  $\partial R$  hvor  $R$  er dekket av lokale parametriseringer.

La oss først se hva som skjer nær et kjeglepunkt  $q$  med orden  $n$  når vi fjerner et lite omegn  $B_r(q)$  med radius  $r > 0$  der  $r$  er tilstrekkelig liten til at  $B_r(q)$  er inneholdt i en  $U_i$ . Her er  $U_i = \tilde{U}_i/\mathbb{Z}_n$  der  $\mathbb{Z}_n$  virker på  $\tilde{U}_i$  ved rotasjon på  $2\pi/n$ . Metrikken på  $\tilde{U}_i$  er invariant under  $\mathbb{Z}_n$ , og gir en metrikk på  $U_i$  som vanlig. La  $x$  være punktet i  $\tilde{U}_i$  slik at  $\pi_i(x) = q$  der  $\pi_i : \tilde{U}_i/\mathbb{Z}_n \approx U_i$ .

La  $\bar{B}_r(x) \subset \tilde{U}_i$  være en lukket disk med radius  $r$  og sentrum i  $x$ . Da blir  $\bar{B}_r(x)/\mathbb{Z}_n = \bar{B}_r(q) \subset U_i$ . Siden  $\tilde{U}_i$  er et regulært område, kan vi bruke Gauss-Bonnets teorem her. Det gir

$$\iint_{\bar{B}_r(x)} K dA + \int_{\partial \bar{B}_r(x)} k_g ds = 2\pi$$

der

$$\iint_{\bar{B}_r(x)} K dA \rightarrow 0$$

når  $r \rightarrow 0$ . For en gitt  $r$  har vi dermed uttrykket:

$$\int_{\partial \bar{B}_r(x)} k_g ds = 2\pi + h(r)$$

for en funksjon  $h(r)$  der  $h(r) \rightarrow 0$  når  $r \rightarrow 0$ .

Siden  $\bar{B}_r(x)/\mathbb{Z}_n = \bar{B}_r(q)$  er

$$\int_{\partial \bar{B}_r(q)} k_g ds = \frac{1}{n} \int_{\partial \bar{B}_r(p)} k_g ds = \frac{2\pi}{n} + h(r)$$

der  $h(r) \rightarrow 0$  når  $r \rightarrow 0$ .

Dersom vi fjerner slike små disker  $B_r$  uten rand om alle kjeglepunktene på  $O$ , blir vi som sagt stående igjen med et område med rand der vi kan bruke Gauss-Bonnets teorem. Men på dette området, vil randkurvene gjennomløpes *motsatt* vei (integrasjonsområdet ligger nå utenfor disken). Dermed skifter fortegnet til  $k_g$ . Lar vi nå  $\partial R_r(q)$  betegne den delen av  $\partial R$  som omslutter  $q$ , får vi

$$\int_{\partial R_r(q)} k_g ds = - \int_{\partial \bar{B}_r(q)} k_g ds = -\frac{2\pi}{n} + h(r)$$

der  $h(r) \rightarrow 0$  når  $r \rightarrow 0$ .

Dersom  $O$  har kurver med spellingspunkter, vil  $R$  ha rand langs disse kurvene. Siden disse kurvene alltid er geodeter, er  $k_g = 0$  her, og disse kurvene gir ikke noe bidrag til formelen.  $\partial R$  består altså av geodeter (som ikke gir bidrag) og kurvene  $\partial R_r(q)$  rundt kjeglepunktene.

Hva så med et reflektorpunkt  $p \in O$  med orden  $n$ ? En omegn om et slikt punkt parametriseres ved  $\tilde{U}/\mathcal{D}_n$  der  $\mathcal{D}_n$  er den dihedrale gruppen av orden  $2n$  (generert av refleksjon om to kurver som møtes med en vinkel på  $\pi/n$ ). Slike punkter ligger på  $\partial R$ , og dermed har  $\partial R$  et hjørne med en vinkel  $\pi/n$  og en ytre vinkel  $\epsilon_r = \pi - \pi/n$  her.

Siden  $R = O \setminus \{B_{q1}(r), \dots, B_{qk}(r)\}$ , har vi

$$\iint_R K dA \rightarrow \iint_O K dA$$

når  $r \rightarrow 0$ .

Vi er nå klare for å bruke Gauss-Bonnets teorem på  $R$ . Når man fjerner en disk fra det indre av  $O$ , reduserer man eulerkarakteristikken med 1. Dermed vil  $\chi(R) = \chi(X_O) - k$  der  $k$  er antall disker man har fjernet. Siden  $R$  er et område der det eneste bidraget til randintegralet kommer fra kurvene  $\partial R_r(q)$  rundt kjeglepunktene og reflektorhjørnene er de eneste hjørnene, får vi

$$\begin{aligned}
\iint_R K dA &= 2\pi\chi(R) - \int_{\partial R} k_g ds - \sum_k \epsilon_k + h(r) \\
&= 2\pi(\chi(X_O) - k) - \int_{\partial R} k_g ds - \sum_k \epsilon_k + h(r) \\
&= 2\pi(\chi(X_O) - k) + \sum_{i=1}^k \frac{2\pi}{n_i} - \sum_{j=1}^l (\pi - \frac{\pi}{m_j}) + h(r) \\
&= 2\pi(\chi(X_O) - 2\pi(\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{n_i}))) - 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l (1 - \frac{1}{n_j}) + h(r) \\
&= 2\pi(\chi(O)) + h(r).
\end{aligned}$$

Når vi lar  $r \rightarrow 0$ , får vi

$$\iint_O K dA = 2\pi\chi(O)$$

hvilket fullfører beviset. □

I neste kapittel skal vi se på Gauss-Bonnets teorem for singulære flater i  $\mathbb{R}^3$ . Siden orbifoldighetene har en struktur som er grunnleggende forskjellig fra disse, har orbifoldighetene fått en egen behandling her. Gauss-Bonnet-formelen for orbifoldigheter er for øvrig noe enklere enn uttrykket vi vil finne i neste kapittel.

### 3 Singulære flater i $\mathbb{R}^3$

I dette kapittelet vil vi formulere og bevise et Gauss-Bonnet-teorem for singulære flater i  $\mathbb{R}^3$ . Vi vil først definere noen grunnleggende begreper og deretter bevise teoremet. Vi tar utgangspunkt i beviset for Gauss-Bonnets teorem for ikke-singulære flater (hovedpunktene er gjengitt i kapittel 1). Dette beviset må imidlertid modifiseres på grunn av singularitetene.

#### 3.1 Grunnleggende definisjoner

Vi begynner med å innføre noen grunnleggende begreper og legge noen begrensninger på hva slags singulariteter vi kan tillate.

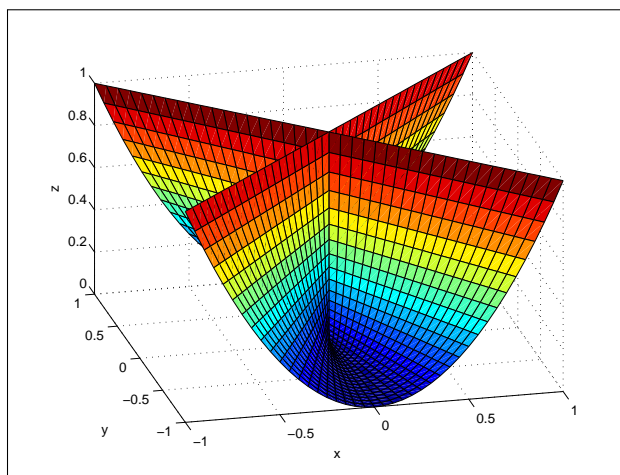
Vi vil kun se på flater som er embeddet i  $\mathbb{R}^3$ . Flatene vi skal behandle, vil kunne beskrives på minst en av følgende to måter. Noen flater kan beskrives som løsningsmengden til en ligning  $F(x, y, z) = 0$ . Slike flater har singulariteter i punkter der  $\nabla F(x, y, z) = 0$ .<sup>39</sup> Eventuelt kan flaten beskrives ved en parametrisering  $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Slike flater har selvsnitt dersom  $x$  ikke er injektiv (mer om dette senere). En slik flate er singulær i selvsnittene. Allikevel vil flaten kunne behandles som en ikke-singulær flate langs slike snitt hvis den lokalt kan skrives som en union av regulære flater. Det skal vi komme tilbake til. Selvsnittene vil kunne inneholde singulære punkter som ikke så lett lar seg behandle som ikke-singulære. Vi skal nå se på et eksempel på det.

**Eksempel 3.1.1.** Et eksempel på en flate som kan beskrives både ved en ligning  $F = 0$  og en parametrisering er Whitneyparaplyen (se figur 1). Flatene framkommer som løsningsmengden til ligningen  $F(x, y, z) = y^2z - x^2$ . Den har  $\nabla F = (-2x, 2yz, y^2)$  og har singulære punkter der  $x = 0$  og  $y = 0$  ( $z$  er en fri variabel). Flatene kan parametriseres ved  $x(u, v) = (uv, u, v^2)$ ,<sup>40</sup>. La  $R$  være området gitt ved  $u, v \in [-1, 1]$ .  $R$  har en rand  $\partial R$  der  $u = \pm 1$  og  $v = \pm 1$ . Vi vil referere til dette området i noen senere eksempler. Flater parametrisert ved  $x$  vil aldri utgjøre hele løsningsmengden til ligningen. Den negative delen av  $z$ -aksen ( $x = y = 0, z$  fri) utelates. Punktene  $v = 0$ , ( $u$  fri variabel) avbildes på  $y$ -aksen mens punktene  $u = 0$  ( $v$  fri variabel) avbildes på den positive delen av  $z$ -aksen. Punktene på  $z$ -aksen for  $z > 0$  er eksempler på punkter som er singulære, men som kan behandles som ikke-singulære siden flaten her lokalt kan beskrives som en union av regulære flater. Punktet i origo er mer spesielt. Det omtales som en whitneysingularitet og har en egenkapen at ethvert åpent omegn om punktet snitter seg selv. Slike punkter vil kreve en særbehandling, noe vi skal komme tilbake til i løpet av det følgende.

---

<sup>39</sup>[Jahren 2011, s. 107]

<sup>40</sup>[Barile og Weisstein 2011]



Figur 1: Whitneyparaplyen

Vi vil nå gi en definisjon av en singulær flate. Som vi så i foregående eksempel lå alle de singulære punktene (bortsett fra ett) i et område som *lokalt* kan uttrykkes som en union av regulære flater. I vår definisjon vil vi kreve denne egenskapen for alle (bortsett fra endelig mange av) singularitetene på flaten.

Så la  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \mid z \geq 0\}$ , og la  $a_k \in \mathbb{R}$  der  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 2$ , og der  $a_i \neq a_j$  når  $i \neq j$ . La  $A_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x - a_k y = 0\}$ . La  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$  og la  $l = A_1 \cap \dots \cap A_n$ . La  $A_R = \{(x, y, z) \in A \mid z = 0\}$ .

La  $S \subset \mathbb{R}^3$ , og la  $S$  være slik at hver  $p \in S$  bortsett fra endelig mange punkter har en omegn  $U$  som er homeomorf med en åpen mengde  $V \subset A$ .

La  $p \in S$  være slik at dette kravet holder, og la  $r \in A$ . La  $U \subset S$  og  $V \subset A$  være omegner om hhv  $p$  og  $r$  og la  $h : V \rightarrow U$  være en homeomorfi slik at  $h(r) = p$ . Vi betegner dette ved  $h : (V, r) \approx (U, p)$ .

Punktene i  $S$  kan nå klassifiseres ved følgende.

- 1) Punkter der kravet ovenfor ikke holder. Disse vil vi betegne  $q_1, \dots, q_n$ .
- 2) Punkter  $p \in S$  der  $p = h(r)$  og  $r \in l$ .
- 3) Punkter  $p \in S$  der  $p = h(r)$  og  $r \notin l$ .

I resten av oppgaven vil vi omtale disse som punkter av type 1, 2 og 3.

For punkter av type 3 kan omegnen  $V$  om  $r$  velges slik at  $V \cap l = \emptyset$ . Dermed er hver  $U$  homeomorf med en åpen omegn i  $\mathbb{R}_+^2$  (det lukkede øvre halvplan).

La  $\Sigma_S$  være mengden av alle punktene på  $S$  som er av type 1 og 2. Vi krever at  $S \setminus \Sigma_S$  skal være en regulær flate. Dessuten vil vi kreve følgende:

For punkter  $p \in U \subset S$  av type 3 krever vi at  $h : (V, r) \approx (U, p)$  er en diffeomorfi.

For punkter  $p \in U \subset S$  av type 2 krever vi følgende: La  $p$  være et slikt punkt og la  $h : (V, r) \approx (U, p)$ . La  $V_i = V \cap A_i$ . Siden  $r \in l$  er  $r \in V_i$  og  $p \in h(V_i)$  for alle  $i$ . Hver slik  $V_i$  er homeomorf med en åpen mengde i  $\mathbb{R}_+^2$  siden hver  $A_i$  er et plan med en rand. La  $S_i = h(V_i)$  og la  $h_i : V_i \rightarrow S_i$  være definert ved  $h_i = h|_{V_i}$ . La hver  $S_i \subset \mathbb{R}^3$  være en regulær flate og la  $h_i$  være en diffeomorfi for alle  $i$ . Omegnen  $U$  om  $p$  kan nå uttrykkes ved  $U = S_1 \cup \dots \cup S_n$  der hver  $S_i$  er en regulær flate.

**Definisjon 3.1.2.** En  $S \subset \mathbb{R}^3$  der disse betingelsene er oppfylt kaller vi en *singulær flate*.

Vi skal nå se nærmere på punktene av type 2.

**Definisjon 3.1.3.** La  $p$  være et punkt av type 2, og la  $h : (V, r) \approx (U, p)$ . La  $l_V = l \cap V$ .  $l_V$  er en glatt sammenhengende 1-mangfoldighet (med rand dersom  $(0, 0, 0) \in l_V$ ). Dermed vil også  $h(l_V) \subset U$  være en glatt sammenhengende 1-mangfoldighet (eventuelt med rand). En slik 1-mangfoldighet vil vi kalle en *snittkurve*.

For 1-mangfoldigheter har vi følgende teorem:<sup>41</sup>

**Teorem 3.1.4.** En glatt, sammenhengende 1-mangfoldighet er diffeomorf enten med sirkelen  $S^1$  eller et intervall på  $\mathbb{R}$ .

**Definisjon 3.1.5.** La  $\gamma_L \subset S$  være en kurve som er diffeomorf med  $S^1$  og der hver  $p \in \gamma_L$  er av type 2. En slik  $\gamma_L$  kaller vi en *lukket snittkurve*.

**Eksempel 3.1.6.** La  $S \subset \mathbb{R}^3$  være cylinderen  $x^2 + y^2 = 1$  ( $z$  er en fri variabel) og  $P$  være  $xy$ -planet. Da er  $S \cap P$  en lukket snittkurve.

**Definisjon 3.1.7.** La  $\gamma$  være en snittkurve på en singulær flate  $S$ . Dersom

---

<sup>41</sup>[Milnor 1965, s. 55]

$\gamma \subsetneq \gamma'$  hvor  $\gamma'$  er en snittkurve, vil vi kalle  $\gamma'$  en *forlengelse* av  $\gamma$ .

**Definisjon 3.1.8.** For en snittkuve  $\gamma$  uten noen forlengelse, la  $\bar{\gamma}$  betegne tillukningen til  $\gamma$ . La  $\gamma$  være slik at  $\partial\bar{\gamma}$  maksimalt består av 2 punkter. Disse punktene kaller vi *endepunktene* til  $\gamma$ .

**Eksempel 3.1.9.** Kurven langs den positive delen av z-aksen på området  $R$  på whitneypaplyen er en snittkurve med et endepunkt  $q$  av type 1 i origo og et endepunkt på  $\partial R$ .

Vi skal nå se på noen flere eksempler på punkter av type 1.

**Definisjon 3.1.10.** La  $S$  være en flate. En singularitet  $q \in S$  kalles *isolert* dersom det eksisterer en  $\epsilon > 0$  slik at det ikke eksisterer andre singulariteter i en omegn  $B_\epsilon(q)$  med radius  $\epsilon$  og senter i  $q$ .

**Eksempel 3.1.11.** La  $C$  være kjeglen gitt ved  $z^2 = x^2 + y^2$ . Singulariteten i origo er av type 1 og den er isolert.

**Eksempel 3.1.12.** Ligningen  $F(x, y, z) = xyz = 0$  gir unionen av  $xy$ -  $xz$ - og  $yz$ -planet. Singulariteten i origo kalles et *trippelpunkt* og er av type 1.

**Eksempel 3.1.13.** En singularitet som har den egenskapen at ethvert omegn om singulariteten snitter seg selv, kalles en whitneysingularitet og er av type 1. Vi har allerede sett at whitneypaplyen har en slik singularitet. Senere skal vi se andre flater som også har slike singulariteter.

Senere i oppgaven vil vi se flere eksempler på snittkurver og vi skal klassifisere disse. Vi vil nå gi en definisjon av et område på en singular flate.

**Definisjon 3.1.14.** La  $I$  være et intervall på  $\mathbb{R}$  og la  $\beta : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ . Vi sier at  $\beta$  er en glatt kurve på  $S$  dersom den er en glatt kurve i  $\mathbb{R}^3$ .

**Definisjon 3.1.15** La  $R \subset S$  og la  $R$  være sammenhengende. Dersom  $R$  er begrenset av en endelig union av glatte kurver kaller vi denne randa til  $R$ . Vi lar  $\partial R$  betegne denne. La  $D^2$  være den åpne enhetsdisken og la  $D_+^2 = D^2 \cap \mathbb{R}_+^2$  (hvor  $\mathbb{R}_+^2$  er det lukkede øvre halvplan). La  $p \in \partial R$  og la  $U \subset R$  være en omegn om  $p$ . Vi vil da kreve at  $p$  oppfyller et av to krav:

a) For  $(p, U)$  skal det finnes en homeomorfi  $h$  slik at  $h : ((0, 0), D_+^2) \approx (p, U)$ .

b) For  $(p, U)$  skal det finnes en homeomorfi  $h$  slik at  $h : (r, V) \approx (p, U)$  der  $r = (0, 0, 0) \in l \subset V \subset A$ .



Dessuten krever vi at ethvert ikke-glatt punkt på  $\partial R$  skal være av type a.

Punkter av type  $b$  oppstår der snittkurver har endepunkt på randa. På grunn av foregående krav er alle randkurver glatte i slike punkter. Det følger også av dette at alle punkter på  $\partial R$  er av type 2 og 3.

Regulære flater kan tilordnes en riemannsk struktur. Singulære flater kan utstyres med en riemannsk struktur i punktene av type 2 ved følgende definisjon:

**Definisjon 3.1.16.** La  $S$  være en singulær flate og la  $\gamma$  være en snittkurve på  $S$ . La  $p$  være et punkt av type 2 på  $\gamma$  og la  $U \subset S$  være en omegn om  $p$ . La  $U = S_1 \cup \dots \cup S_n$  der hver  $S_i$  er en regulær flate. Velg en flate  $S_i$  og betrakt  $p$  som et punkt på  $S_i$ .  $S_i$  er regulær, og vi velger en riemannsk metrikk på  $S_i$ . Dermed tilordnes  $p$  en metrikk når  $p$  betraktes som punkt på denne flaten.

Denne metrikken avhenger selvfølgelig av valg av  $S_i$ , så definisjonen gir kun mening i de situasjonene vi begrenser oppmerksomheten til kun en flate  $S_i$  i et snitt. Men det er nettopp det vi skal gjøre senere. I de singulære punktene av type 1 eksisterer det ikke noe tangentplan, så det gir ikke mening å tilordne noen metrikk her.

I beviset vil vi trenge at et område  $R$  på en singulær flate  $S$  kan trianguleres. Dette skal vi nå definere i flere omganger.

**Definisjon 3.1.17.** (Triangulering, foreløpig definisjon)

La  $R$  være et område på en singulær flate  $S$ . Å *triangulere*  $R$  er å uttrykke  $R$  som en union av embeddede trekantene med glatte randkurver slik at punktene av type 1 ligger i et hjørne på alle de trekantene de er inneholdt i og hver trekant inneholder kun et slikt punkt. Dessuten skal enhver snittkurve  $\gamma$  kun inneholde hjørner og kanter.

Siden  $S$  kun har en endelig mengde punkter av type 1, kan vi alltid sørge for at hver trekant kun har et punkt av type 1 ved å velge en tilstrekkelig fin triangulering.

**Lemma 3.1.18.** La  $R \subset S$  være et område med snittkurver og isolerte singulariteter. Trianguler  $R$  som i foregående definisjon. Da kan vi for enhver trekant  $T \subset R$  uten noen punkter av type 1 finne et område  $R_T$  som kan parametriseres ved geodetiske polarkoordinater sentrert rundt et punkt i en trekant slik at  $T \subset R_T$ . Dersom et punkt  $q$  av type 1 ligger i  $T$ , kan vi finne en  $R_T$  slik at  $R_T \setminus \{q\}$  er parametrisert ved geodetiske polarkoordinater og  $T \subset R_T$ .

**Bevis.** For trekanter i en ikke-singulær del av  $R$  er dette uproblematisk siden vi kan la en slik trekant være inneholdt i en normal omegn (en omegn om trekanten som er parametrisert ved geodetiske polarkoordinater sentrert om et punkt i en trekant).<sup>42</sup> Ved å velge en tilstrekkelig fin triangulering kan vi sørge for at hver trekant  $T \subset R$  med en kant langs en selvsnittskurve  $\gamma$  og uten punkter av type 1 ligger på en av de regulære flatene  $S_1, \dots, S_n$  som møtes langs  $\gamma$ . Dermed kan vi også la slike trekanter være inneholdt i normale omegner. For en trekant  $T$  med en singularitet  $q$  av type 1 i et hjørne, velger vi et område  $R_T$  om  $T$  slik at  $q$  ligger på  $\partial R_T$ . Dersom  $q$  er endepunktet for et selvsnitt, lar vi  $R_T \subset S_i$  for en flate  $S_i$ . Da kan vi la  $R_T \setminus \{q\}$  parametriseres ved geodetiske polarkoordinater sentrert om et ikke-singulært punkt i  $R_T$  siden vi har antatt at  $T$  kun inneholder et punkt av type 1.  $\square$

Siden enhver trekant  $T \subset R$  kan tilordnes en riemannsk struktur (unntatt i punktene av type 1) og inneholdes i en  $R_T$ , vil  $T$  ha en krumming  $K$  i hvert punkt  $p \in T$  (unntatt i de nevnte punktene) og en geodetisk krumming  $k_g$  langs randkurvene (unntatt i mulige endepunkter av type 1). Disse randkurvene orienteres slik at enhetsnormalen alltid peker *innover*<sup>43</sup> (se (1) og (2) i kapittel 1 for definisjon av  $K$  og  $k_g$ ). Siden vi kan velge å alltid orientere randkurvene på denne måten innebærer det at teoremet også gjelder for ikke-orienterbare flater. Som kommentert tidligere i oppgaven, er den kovariant andrederiverte uavhengig av valg av orientering av randkurvene. Så lenge enhetsnormalvektoren  $n_\alpha$  velges slik at den peker *inn* i  $R$ , spiller det ingen rolle hvilken vei  $\partial R$  gjennomløpes.

Vi skal nå innføre noen betingelser som trianguleringen må oppfylle.

**Betingelse 1.** La  $R = \cup_j T_j$  være en triangulering av  $R$ . La  $T_j$  være en av disse trekantene, og la  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  være de tre glatte randkurvene.  $R$  må være slik at

$$\int_{\alpha_i} k_g ds \tag{8}$$

eksisterer for alle  $\alpha_i$  og alle  $T_j$ .

Videre må følgende gjelde:

**Betingelse 2.** La  $q \in R$  være et punkt av type 1 og la  $T_j$  være en trekant med  $q$  som hjørne. La  $r > 0$ , og la  $S_r \subset \mathbb{R}^3$  være en sfære med radius  $r$  og sentrum i  $q$ . La  $T_{jr}$  være den delen av  $T_j$  som ligger utenfor  $S_r$ . Vi vil da

---

<sup>42</sup>[Jahren 2011, s. 159]

<sup>43</sup>[Jahren 2011, s. 157]

kreve at følgende integral skal eksistere:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{T_{jr}} K dA. \quad (9)$$

**Betingelse 3.** La  $q \in R$ ,  $T_j, T_{jr} \subset R$  og  $S_r$  være som før. Vi vil kreve at det skal eksistere en  $R > 0$  slik at for enhver  $r < R$  skal  $a = S_r \cap T_{jr}$  være en glatt kurve.

**Definisjon 3.1.19.** (Triangulering, endelig definisjon)

La  $R$  være et område på en singulær flate  $S$ . Dersom  $R$  kan trianguleres i henhold til definisjon (3.1.17) og dersom betingelsene 1-3 er oppfylt, sier vi at  $R$  er *triangulerbar*. Et valg av trekanter der betingelsene holder kaller vi en *triangulering*.

I resten av denne oppgaven vil ethvert område  $R \subset S$  være triangulerbart.

**Eksempel 3.1.20.** Området  $R$  på whitneyparaplyen (begrenset av  $u, v \in [-1, 1]$ ) er et eksempel på et triangulerbart område. Whitneyparaplyen er parametrisert ved  $x(u, v) = (uv, u, v^2)$ . For denne vil  $K \rightarrow -\infty$  når  $v \rightarrow 0$  og  $u = 0$ . Krummingsintegralet derimot, konvergerer (se eksempel 4.1.1). Flaten kan for eksempel trianguleres slik at trekantene som omslutter punktet i origo har kanter langs  $y$ - og  $z$ -aksen. På slike kanter er  $k_g = 0$ . At snittet mellom sfærer med radius  $r$  og sentrum i origo blir glatte kurver kan også sjekkes (se eksempel 4.1.1) Dermed holder betingelsene på denne flaten.

La  $T$  være en trekant med et hjørne  $q$  av type 1. Vi trenger et mål på vinkelen i  $q$ . Det er slett ikke opplagt hvordan dette skal defineres. For å motivere vår definisjon ser vi på følgende eksempel.

**Eksempel 3.1.21.** La  $\overline{D}_r \subset \mathbb{R}^2$  være en lukket disk med radius  $r$  og sentrum i origo og la  $R \subset \overline{D}_r$  være en sektor begrenset av to radier  $r_1, r_2$  og sirkelbuen  $s \subset \partial \overline{D}_r$ . La  $\alpha$  være vinkelen mellom  $r_1$  og  $r_2$ . Vi kan nå bruke Gauss-Bonnets teorem på  $R$ . Det gir

$$\int_s k_g ds + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + (\pi - \alpha) = 2\pi$$

$$\alpha = \int_s k_g ds.$$

Merk at verdien på integralet er uavhengig av  $r$ .

La nå  $C \subset \mathbb{R}^3$  være kjeglen gitt ved  $z^2 = x^2 + y^2$  for  $z \geq 0$  og la  $T \subset C$  være en embeddet trekant begrenset av to euklidske linjer  $l_1, l_2 \subset C$  og en kurve  $b$  der  $l_1, l_2$  går gjennom origo og  $b$  er snittet mellom  $C$  og en sfære med radius  $R$  og sentrum i origo. Hvordan bør vi nå definere vinkelen mellom randlinjene  $l_1$  og  $l_2$  i origo? Vinkelen mellom  $l_1$  og  $l_2$  som linjer i  $\mathbb{R}^3$  er lite interessant. Vi er på jakt etter et mål på vinkelen mellom  $l_1$  og  $l_2$  betraktet som *randkurvene til den embeddede trekanten*  $T$ . Det er noe annet. Dette kunne vært forsøkt definert på ulike måter.

Vi kunne delt  $T$  opp ved hjelp av en stor mengde linjer  $l_3, \dots, l_n$  slik at  $l_i \subset T$  for alle  $i \geq 3$  og hver  $l_i$  går gjennom origo. Deretter kunne vi beregnet vinkelen mellom hvert par av linjer som ligger ved siden av hverandre (betraktet som linjer i  $\mathbb{R}^3$ ), summert disse og til slutt beregnet grenseverdien for stadig finere oppdelinger av  $T$ .

Et annet alternativ er å definere  $\alpha_T$  ved grenseverdien

$$\alpha_T = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{s(a)}{r}$$

der  $a$  er kurven i snittet mellom  $T$  og en sfære med radius  $r > 0$  og  $s(a)$  er buelengden til  $a$  (forholdet  $\frac{s(a)}{r}$  er uavhengig av  $r$  i dette tilfellet, men vi er på jakt etter en definisjon som kan generaliseres til enhver trekant  $T$  med en singularitet av type 1 i et hjørne). Ulempen med begge disse definisjonene er at det synes å være vanskelig å relatere disse størrelsene til noe som inngår i beviset til Gauss-Bonnet-teoremet.<sup>44</sup> Vi vil derfor foreslå et tredje alternativ til vinkeldefinisjon på bakgrunn av foregående eksempel:

La fortsatt  $a$  være kurven i snittet mellom  $T$  og en sfære  $S_r$  med radius  $r$  og sentrum i origo. La  $T_r$  være den delen av  $T$  som ligger utenfor  $S_r$ . Vi definerer vinkelen  $\alpha_T$  ved

$$\alpha_T = \lim_{r \rightarrow 0} \int_a k_g ds$$

der kurven  $a$  er orientert slik at enhetsnormalvektoren peker *ut av*  $T_r$ . La oss se hvordan dette fungerer for kjeglen  $C$ .

---

<sup>44</sup>I beviset for Gauss-Bonnet-teoremet slik vi finner det hos [Jahren 2011, s.159 – 164] forutsetter man at tangentplanet er definert i alle hjørnene i trianguleringen. Singulariteter har imidlertid ikke slike tangentplan, så man kan ikke helt uten videre regne med at teoremet vil holde for trekanter nær singulariteter - selv når man har et veldefinert vinkel mål.

Siden  $K = 0$  for kjeglen er trekanten  $T \subset C$  isometrisk med sektoren  $R$  ovenfor for et passelig valg av  $\alpha$ .  $T_r$  er begrenset av linjene  $l_1, l_2$  og kurvene  $a$  og  $b$ . Vi bruker Gauss-Bonnet på  $T_r$  og får

$$-\int_a k_g ds + \int_b k_g ds + 2\pi = 2\pi$$

$$\int_a k_g ds = \int_b k_g ds.$$

For sektoren  $R$  hadde vi

$$\alpha = \int_s k_g ds$$

Siden  $T$  og  $R$  er isometriske, er

$$\int_b k_g ds = \int_s k_g ds.$$

Med vår definisjon av  $\alpha_T$  får vi (integralet er uavhengig av  $r$  også for kjeglen)

$$\alpha_T = \lim_{r \rightarrow 0} \int_a k_g ds = \int_a k_g ds = \int_b k_g ds = \int_s k_g ds = \alpha.$$

Siden  $\alpha_T = \alpha$  ser dette ut til å være en fornuftig vinkeldefinisjon i dette tilfellet. Vi skal snart se at denne definisjonen stemmer overens med den vanlige vinkeldefinisjonen for hjørner der den gjelder (i alle fall holder dette for totalsummen dersom man summerer over alle vinklene om et hjørne, det er alt vi trenger). Dessuten har denne definisjonen den fordelen at den er definert ved hjelp av et integrasjonsledd som *inngår i Gauss-Bonnet-formelen*. Det er svært nyttig. Vi vil altså bruke denne definisjonen for enhver trekant  $T$  med en singularitet av type 1 i et hjørne.

**Definisjon 3.1.22.** La  $T \subset R \subset S$  være en trekant i et område på en singularær flate og la  $T$  ha en singularitet  $q$  av type 1 i et hjørne. La  $S_r$  være en sfære med radius  $r$  og sentrum i  $q$ , og la  $R > 0$  være slik at  $S_r \cap T$  er en glatt kurve for enhver  $r < R$  (en slik  $R$  fins ved betingelse 3 i definisjonen av triangulering (3.1.19)). La  $a_r = S_r \cap T$  være denne kurven, og la  $T_r$  være den delen av  $T$  som ligger utenfor  $S_r$ . Da definerer vi vinkelen  $\alpha_T$  om  $q$  ved

$$\alpha_T = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{a_r} k_g ds$$

der kurven  $a_r$  er orientert slik at enhetsnormalvektoren peker *ut av*  $T_r$ .

Vi skal snart vise et lemma som forsikrer oss om at denne grensen eksisterer for de flatene vi ser på.

**Definisjon 3.1.23.** La  $R \subset S$  være et triangulert område på en singulær flate, og la  $q \in R$  være en singularitet av type 1. La vinkelen  $\alpha$  om  $q$  være definert ved

$$\alpha = \sum_j \alpha_{T_j}$$

summert over alle trekantene  $T_j$  som har  $q$  som hjørne.

Dette er uavhengig av valg av triangulering ved følgende: La  $S_r$  være en sfære med radius  $r$  og sentrum i  $q$ . La  $a_H = S_r \cap R$ . La  $T_1, \dots, T_n$  betegne de trekantene  $T_i \subset R$  som har  $q$  som hjørne. La  $a_i = T_i \cap S_r$ . Ved betingelse 3 i definisjon 3.1.19 er  $a_i$  en glatt kurve for hver  $i \in \{1, \dots, n\}$  for en  $R > 0$  når  $r < R$ . Dermed kan  $a_H$  for en gitt  $r$  skrives som en union av glatte kurver  $a_H = a_1 \cup \dots \cup a_n$  der  $a_1 \cup \dots \cup a_n$  bestemmes av valg av triangulering av  $R$ . Siden  $a_H$  er en union av glatte kurver, eksisterer integralet

$$\int_{a_H} k_g ds = \int_{a_1} k_g ds + \dots + \int_{a_n} k_g ds$$

for en gitt  $r$ , og slike integraler er uavhengige av valg av inndeling av  $a_H$ .

Nå kan  $\alpha$  uttrykkes som

$$\alpha = \sum_j \alpha_{T_j} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{a_H} k_g ds$$

der verdien på integralet er uavhengig av valg av  $a_1, \dots, a_n$  for hver  $r$ . Dermed er  $\alpha$  veldefinert.

Vi vil nå sjekke at definisjonen av  $\alpha$  gir  $2\pi$  som vinkelsum om et ikke-singulært hjørne  $v_{is}$  i en triangulering av et område  $R$ . Så la nå  $v_{is}$  være et hjørne i et ikke-singulært område  $R_S \subset R$ . La  $S_r$  være en sfære med radius

$r$  og sentrum i  $v_{is}$ . La  $a$  være snittet mellom  $R_S$  og  $S_r$ . Siden  $R_S$  er ikke-singulær, kan vi anta at det eksisterer en  $R > 0$  slik at  $a$  er en glatt kurve og avgrenser et område  $B_a \subset R_S$  homeomorft med en disk for alle  $r < R$ . La  $T_1, \dots, T_n$  være de trekantene som har  $v_{is}$  som hjørne, og la  $a_j$  være den delen av  $a$  som ligger i  $T_j$ .

Det gir oss følgende uttrykk for vinkelsummen om  $v_{in}$ :

$$\alpha = \sum_j \alpha_{T_j} = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_j \int_{a_j} k_g ds = \lim_{r \rightarrow 0} \int_a k_g ds \stackrel{*}{=} \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi - \iint_{B_a} K dA) = 2\pi$$

der vi brukte Gauss-Bonnets teorem for regulære flater i \*.

Kjeglen  $C$  omtalt tidligere er slik at snittet mellom  $S_r$  og  $C$  utgjør en kurve med to ikke-glatte punkter der begge vinklene er  $\pi/2$ . De tilsvarende vinklene i snittet mellom en sfære  $S_r$  og en annen flate  $S$  trenger slett ikke være rette. Dette tar vi høyde for senere i oppgaven når vi skal utlede relasjon (11) i beviset for Gauss-Bonnets teorem. Dersom disse vinklene ikke er rette, er det heller ikke sikkert at vår vinkeldefinisjon stemmer overens med den vanlige vinkeldefinisjonen for ikke-singulære hjørner  $v_{is}$  på en flate  $S$  for hver enkelt  $T$  med hjørne i  $v_{is}$ . Vi har sett at den totale vinkelsummen når man summerer over alle trekantene om  $v_{is}$  stemmer overens med den vanlige definisjonen. I beviset er det til syvende og sist totalsummen vi er interessert i.

Integralet i foregående definisjon vil alltid konvergere for de flatene vi ser på ved følgende lemma:

**Lemma 3.1.24.** La  $R \subset S$  være et triangulert område og la  $T$  være en trekant på  $R$  med en singularitet  $q$  av type 1 i et hjørne. La  $q$  være den eneste singulariteten av type 1 i  $T$ , og la  $S_r$  være en sfære med radius  $r$  og sentrum i  $q$ . La  $T_r$  være den delen av  $T$  som ligger utenfor  $S_r$ , og la  $a = T \cap S_r$ . La  $R > 0$  være slik at for enhver  $r < R$  er  $a$  en glatt kurve. La  $T$  være slik at

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{T_r} K dA$$

eksisterer. Da eksisterer grenseverdien

$$\alpha_T = \lim_{r \rightarrow 0} \int_a k_g ds$$

**Bevis**  $T_r$  er et område uten noen singularitet (bortsett fra eventuelle punkter av type 2 langs randkurvene; disse kan tilordnes en riemannsk struktur og betraktes som ikke-singulære ved definisjon 3.1.16). Dermed kan vi bruke Gauss-Bonnets teorem på  $T_r$ . Det gir

$$\iint_{T_r} K dA + \int_a k_g ds + \int_{\partial T_r \setminus a} k_g ds + \sum_k \epsilon_k = 2\pi$$

som medfører

$$\int_a k_g ds = - \iint_{T_r} K dA - \int_{\partial T_r \setminus a} k_g ds - \sum_k \epsilon_k + 2\pi.$$

Når  $r \rightarrow 0$ , vil  $\int_{\partial T_r \setminus a} k_g ds$  konvergere siden  $R$  er triangulert og  $T$  dermed er begrenset av glatte randkurver hvor kurveintegralene konvergerer (ved betingelse 1 i definisjon 3.1.19). Men siden alt på den høyre siden av likhetsteget konvergerer, må integralet på den venstre siden også gjøre det.  $\square$

Vi vil nå innføre noen flere definisjoner som vil inngå i Gauss-Bonnet-formelen.

Vinkelsummen om ikke-singulære hjørner i det indre av et område  $R$  er  $2\pi$ . Vi vil innføre en *singularitetsdefekt* som måler hvor mye singulariteten skiller seg fra slike hjørner.

**Definisjon 3.1.25.** La  $q \in R$  være et punkt av type 1 og la  $\alpha$  være vinkelen om  $q$  (som definert i 3.1.23). La da singularitetsdefekten  $\Delta$  være gitt ved

$$\Delta = 2\pi - \alpha.$$

**Eksempel 3.1.26.** Ligningen  $F(x, y, z) = xyz = 0$  gir unionen av  $xy$ -  $xz$ - og  $yz$ -planet. Singulariteten  $q = (0, 0, 0)$  er et trippelpunkt og er av type 1. Vinkelsummen  $\alpha$  om  $q$  er  $6\pi$  ( $2\pi$  fra hvert av de tre planene). Det gir  $\Delta = 2\pi - 6\pi = -4\pi$ .

Vi vil trenge et mål på hvor mange flater som møtes langs en snittkurve. De kombinatoriske uttrykkene i kapittel 1 (blant annet ligningene (4), (5) og (6)) må modifiseres siden flere enn to trekanter kan ha en felles kant (tenk for eksempel på hvordan en triangulering av whitneypaproyen må se ut langs snittkurven). Vi vil innføre begrepet *defekt* som et mål på hvor mange trekanter som deler felles kanter langs en snittkurve. Definisjonen skal være slik



at defekten for kurver i det ikke-singulære området skal være 0.

La  $R$  være et område på en singulær flate  $S$  og la  $\Gamma_{SI}(R)$  betegne mengden av alle snittkurver på  $R$ . La for en  $\gamma \in \Gamma_{SI}(R)$  med eventuelle endepunkter  $p_0, p_1$ ,  $n(\gamma)$  betegne antall flater  $S_1 \cup \dots \cup S_n$  som snitter langs  $\gamma \setminus \{p_0, p_1\}$  (glatte kurver hvor alle punktene er av type 3 (ikke-singulære) kan oppfattes som snittkurver der kun en flate snitter; dermed er  $n = 1$ ).

**Definisjon 3.1.27.** La  $d(\gamma) : \Gamma_{SI}(R) \rightarrow \mathbb{Z}$  være gitt ved

$$d(\gamma) = 2n(\gamma) - 2.$$

Vi kaller  $d(\gamma)$  *defekten* til  $\gamma$ . Siden  $n \geq 1$  for enhver  $\gamma$ , er  $d(\gamma) \geq 0$  for enhver  $\gamma$ .

For et triangulert område  $R$ , vil vi definere defekt også for hjørner på snittkurvene.

**Definisjon 3.1.28.** La  $v \in R$  være et hjørne på en snittkurve  $\gamma$  med defekt  $d(\gamma)$  slik at  $v$  er av type 2 og  $v \notin \partial R$ . La  $V_{SI}$  være mengden av slike hjørner, og la  $d(v) : V_{SI} \rightarrow \mathbb{Z}$  være gitt ved

$$d(v) = d(\gamma).$$

Vi kaller  $d(v)$  defekten til  $v$  (defekten til et hjørne av type 2 er lik defekten til snittkurven hjørnet ligger på).

Definisjonen av defekt for hjørner av type 2 er annerledes enn singularitetsdefekten til singularitetene av type 1. Som tidligere nevnt vil punktene av type 1 spille en mer avgjørende rolle i beviset enn punkter av type 2. Vinkelsummen om et hjørne  $v$  av type 2 med defekt  $d(v)$  er  $2\pi + d(v)\pi$ , men bidragene fra slike hjørner vil vise seg å kansellere i beviset. Mer om det senere.

**Eksempel 3.1.29.** La  $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$  være den lukkede enhetsdisken, og la  $\gamma$  være den delen av x-aksen som ligger i  $\bar{D}$ . Da ligger ikke  $\gamma$  i noe snitt, og kan oppfattes som en snittkurve der  $n = 1$ . Dermed er  $d(\gamma) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$ .

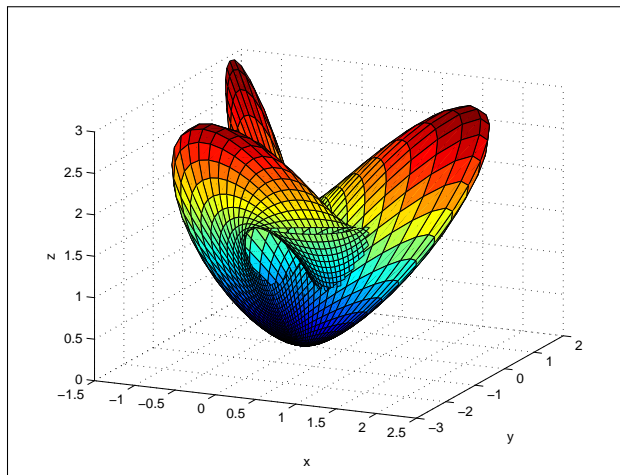
**Eksempel 3.1.30.** Den positive delen av z-aksen på området  $R$  på whitneyparaplyen utgjør en snittkurve  $\gamma$ . Den er snittet mellom to flater og har dermed defekt  $d(\gamma) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ . Som nevnt tidligere har denne kurven et endepunkt i whitneysingulariteten i origo og et endepunkt på  $\partial R$ . Om endepunktene til snittkurvene til et område er på randa eller i det indre, viser seg å være vesentlig informasjon. Vi må derfor klassifisere snittkurvene.

**Definisjon 3.1.31.** La  $R$  være et område på en singularær flate  $S$ . Vi definerer følgende 4 typer av snittkurver på  $R$ .<sup>45</sup>

- I) La  $\gamma_I \subset R$  betegne en snittkurve med endepunkter  $q_m$  og  $q_n$  av type 1 der  $q_m, q_n \in \text{Int } R$ .
- B) La  $\gamma_B \subset R$  betegne en snittkurve med et endepunkt  $q$  av type 1 der  $q \in \text{Int } R$  og et endepunkt  $p \in \partial R$ .
- E) La  $\gamma_E \subset R$  betegne en snittkurve med to endepunkter  $p_1, p_2 \in \partial R$  der  $p_1 \neq p_2$ .
- L) La  $\gamma_L \subset R$  betegne en lukket snittkurve som definert i 3.1.5.

**Eksempel 3.1.32.** Snittkurven langs den positive delen av z-aksen i området  $R$  på whitneyparaplyen er av type  $B$ .

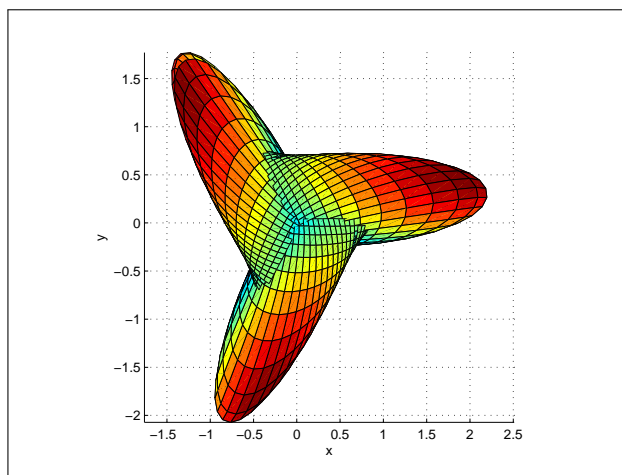
**Eksempel 3.1.33.** La  $S \subset \mathbb{R}^3$  være sylindren  $x^2 + y^2 = 1$  ( $z$  er en fri variabel) og  $P$  være  $xy$ -planet. Da er  $S \cap P$  en snittkurve av type  $L$  med defekt 2.



Figur 2: Boys flate

**Eksempel 3.1.34.** La  $R$  være Boys flate (se figur 2 og 3 og eksempel 4.1.5). Den har tre snittkurver med defekt 2 der alle disse har endepunktene i et trippelpunkt i origo. Disse kurvene er dermed av type  $I$  der  $q_m = q_n$  for hver av kurvene. Selv om  $\gamma_I$  er en lukket kurve, oppfyller den ikke betingelsene i definisjon 3.1.5 for en lukket snittkurve (type  $L$ ) siden trippelpunktet er av type 1 og ikke 2. Det vil senere vise seg at kurver av typene  $I$  og  $L$  gir ulike bidrag til Gauss-Bonnet-formelen (kurvene av type  $L$  gir faktisk ikke noe bidrag i det hele tatt og inngår dermed ikke i den endelige formelen). Derfor skiller vi mellom disse.

<sup>45</sup>Bokstavene I, B, E og L kommer av interior, boundary, exterior og loop.



Figur 3: Boys flate sett ovenfra. Flaten har tre snittkurver med defekt 2. Disse møtes i et trippelpunkt.

I beviset som følger vil vi se at defekten til snittkurvene spiller en avgjørende rolle for korreksjonsleddene i Gauss-Bonnet-formelen. Det vil vise seg at vi trenger å holde styr på hvor mange snittkurver vi har av de fire typene som er omtalt ovenfor. Derfor innfører vi følgende notasjon:

**Definisjon 3.1.35.** La  $R$  være et område med  $m$  snittkurver av typen  $\gamma_I$ ,  $n$  snittkurver av typen  $\gamma_B$ ,  $k$  snittkurver av typen  $\gamma_E$  og  $l$  snittkurver av typen  $\gamma_L$ . Da definerer vi følgende:

$$D_I(R) = \sum_{i=1}^m d(\gamma_{I_i}) \text{ hvis } m \geq 1, D_I(R) = 0 \text{ hvis } m = 0.$$

$$D_B(R) = \sum_{i=1}^n d(\gamma_{B_i}) \text{ hvis } n \geq 1, D_B(R) = 0 \text{ hvis } n = 0.$$

$$D_E(R) = \sum_{i=1}^k d(\gamma_{E_i}) \text{ hvis } k \geq 1, D_E(R) = 0 \text{ hvis } k = 0.$$

$$D_L(R) = \sum_{i=1}^l d(\gamma_{L_i}) \text{ hvis } l \geq 1, D_L(R) = 0 \text{ hvis } l = 0.$$

Merk: Vi skriver ofte  $D_I$  i stedet for  $D_I(R)$  etc når det er underforstått hvilket område  $R$  det er snakk om.

**Eksempel 3.1.36.** La  $S$  være flaten gitt ved  $F(x, y, z) = xyz = 0$ , og la  $R$  være området der  $x, y, z \in [-1, 1]$ . Denne flaten har seks snittkurver av typen  $\gamma_B$  med endepunkter i origo og på randa. Langs hver av disse kurvene (bortsett fra i endepunktene i origo) møtes to plan. Dermed har hver av kurvene defekt  $d(\gamma_B) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ . Dermed har flaten  $D_B(R) = 2 \cdot 6 = 12$ .

For hvert ikke-glatt punkt på  $\partial R$  har  $R$  en veldefinert indre vinkel  $\eta_i \in [0, 2\pi]$  (en vinkel med  $\eta_i = 0$  er en cusp som vender ut av området, en vinkel med  $\eta_i = 2\pi$  er en cusp som vender innover). For slike punkter definerer vi den ytre vinkelen  $\epsilon_i = \pi - \eta_i \in [-\pi, \pi]$ . Da vi definerte randa til et område  $R$  krevde vi at for hvert punkt  $p \in \partial R$  som er et endepunkt for en snittkurve skal randkurvene være glatte i dette punktet. Dermed har vi ingen ytre vinkler i slike punkter og  $\epsilon_i = 0$  for disse.

### 3.2 Gauss-Bonnets teorem for singulære flater i $\mathbb{R}^3$

La  $S$  være en singulær flate og la  $R \subset S$  være et kompakt triangulerbart område. La eventuelle snittkurver på  $R$  være av type  $I$ ,  $E$ ,  $B$  og  $L$ . La  $q_1, \dots, q_x \in R$  betegne punktene av type 1 og la disse være enten isolerte singulariteter eller endepunkter på snittkurver av type  $B$  og  $I$  slik at  $q_i \in \text{Int } R$ . La  $\Delta_i$  være singularitetsdefekten til  $q_i$ .

Da gjelder

**Teorem 3.2.1.** (Gauss-Bonnet)

$$\iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds + \sum_k \epsilon_k + D_I \pi - D_E \pi + \sum_i \Delta_i = 2\pi \chi(R).$$

**Bevis.** Dette beviset tar utgangspunkt i beviset for Gauss-Bonnet-teoremet for ikke-singulære flater slik vi finner det hos [Jahren 2011, s.159 – 164] (hovedpunktene er gjengitt i kapittel 1). Bevisideen består i å dele opp den singulære flaten i deler der uttrykk fra det opprinnelige beviset for Gauss-Bonnet-teoremet kan brukes og deretter bruke kombinatorikk.

Vi triangulerer  $R$  som  $\cup_j R_j$  som beskrevet tidligere i kapittelet (definisjon 3.1.19); slik at hvert punkt av type 1 ligger på et hjørne i hver av trekantene det ligger i. Videre skal trianguleringen være slik at snittkurvene  $\gamma_i$  kun skal inneholde hjørner og kanter. Ved lemma 3.1.18 lar vi hver trekant være inneholdt i et område parametrisert ved geodetiske polarkoordinater. Siden  $R$  er kompakt kan vi anta at trianguleringen består av et endelig antall trekanter.

Vi vil først vise at følgende uttrykk gjelder når vi summerer opp over alle trekantene.<sup>46</sup>

$$\iint_R K dA + \sum_j \int_{\partial R_j} k_g ds = \sum_{j,i} \eta_{ji} + \sum_i \alpha_i - T\pi.$$

Her er  $\alpha_i$  vinkelen om  $q_i$ ,  $\eta_{ji}$  de indre vinklene til hjørnene av type 2 og 3 og  $T$  antall trekanter i trianguleringen.

For en trekant  $R_j$  uten noen singularitet av type 1 gjelder relasjonen:

$$\iint_{R_j} K dA + \int_{\partial R_j} k_g ds = \eta_{j1} + \eta_{j2} + \eta_{j3} - \pi \quad (10)$$

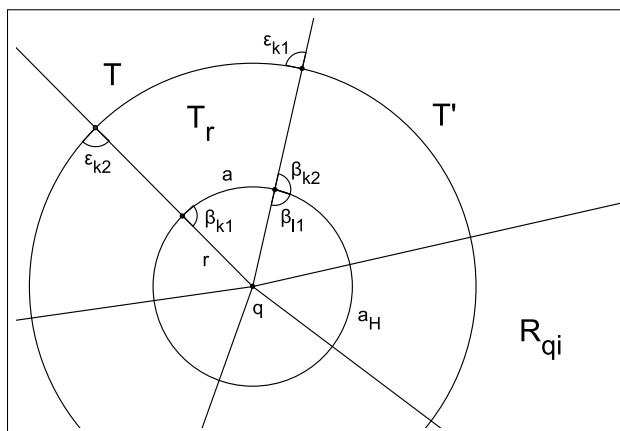
der de indre vinklene  $\eta_{ji}$  er definert som følger. For trekanter der alle punktene er ikke-singulære (dvs av type 3) definerer vi hjørnene ved  $\eta_{ji} = \pi - \epsilon_{ji}$ ,  $i = 1, 2, 3$  som vanlig og vi vet at resultatet holder for slike trekanter.<sup>47</sup> En trekant  $R_j$  med en kant i en snittkurve (med punkter av type 2) er inneholdt i en regulær flate  $R_i \subset R$  ved definisjon 3.1.16. Derfor kan vi definere vinkler på samme vis her og resultatet vil holde.

For trekanter med en singularitet  $q_i$  av type 1 i et hjørne er situasjonen litt mer spesiell. La  $R_{q_i} \subset R$  være et område rundt en slik singularitet (slik at  $q_i$  er den eneste av singularitetene av type 1 som ligger i  $R_{q_i}$ ), og la  $R_{q_i}$  være triangulert med  $T_{R_{q_i}}$  trekanter som alle har et hjørne i  $q$  (noen av disse trekantene kan ha kanter langs snittkurver). La  $S_r$  være en sfære med radius  $r$  og sentrum i  $q_i$ . Vi lar  $T$  og  $T'$  være to av disse trekantene og lar disse være valgt slik at de deler en kant (som kan ligge langs et selvsnitt), og vi lar  $T_r \subset T$  være den delen av  $T$  som ligger utenfor  $S_r$ . La  $R_{q_i r}$  være den delen av  $R_{q_i}$  som ligger utenfor  $S_r$ , og la  $a_H$  være kurven i snittet mellom  $S_r$  og  $R_{q_i}$  (ved betingelse 3 i definisjon 3.1.19 er snittet mellom  $S_r$  og  $R_{q_i}$  faktisk en kurve. Denne er glatt overalt, inkludert i snittene, siden  $R$  lokalt kan uttrykkes ved  $R_1 \cup \dots \cup R_n$  der hver  $R_i$  er en regulær flate. La  $a = a_H \cap T$  ( $a$  er den glatte kurven i snittet mellom  $S_r$  og  $T$ ).

La  $\epsilon_{k1}, \epsilon_{k2}$  være de ytre vinklene til de to hjørnene til  $T_r$  som ikke ligger på  $a$ , og la  $\beta_{k1}, \beta_{k2}$  være de to ytre vinklene i hjørnene på  $a$ . Vi lar  $\beta_{l1}$  være den ytre vinkelen til  $T'$  som ligger i det samme hjørnet som  $\beta_{k2}$  (se figur 4). Siden alle kantene i trianguleringen er glatte, er  $\beta_{l1} + \beta_{k2} = \pi$  (dette gjelder også for trekanter som deler en kant langs et snitt).

<sup>46</sup> Dette er en modifisert utgave av ligning (5.9.9) i [Jahren 2011, s. 162]

<sup>47</sup> [Jahren 2011, s. 162]



Figur 4: Området  $R_{qi}$  rundt singulariteten  $q$ .

Siden  $T_r$  er ikke-singulær (dersom  $T_r$  har kant langs en snittkurve, kan  $T_r$  betraktes som ikke-singulær ved definisjon 3.1.16), kan vi bruke Gauss-Bonnet på  $T_r$ .<sup>48</sup> Vi får

$$\iint_{T_r} K dA + \int_{\partial T_r \setminus a} k_g ds + \int_a k_g ds + \epsilon_{k1} + \epsilon_{k2} + \beta_{k1} + \beta_{k2} = 2\pi.$$

Vi vil nå summere opp tilsvarende uttrykk for alle trekantene i  $R_{qi}$ . Siden  $\beta_{l1} + \beta_{k2} = \pi$  og  $T$  og  $T'$  var vilkårlige, blir<sup>49</sup>

$$\sum_{j,i} \beta_{ji} = T_{R_{qi}} \pi.$$

Dermed får vi:

$$\begin{aligned} \iint_{R_{qi}r} K dA + \int_{\partial R_{qi}r \setminus a_H} k_g ds &= -\sum_{j,i} (\pi - \eta_{ji}) - \sum_j \int_{a_j} k_g ds - \sum_{j,i} \beta_{ji} + 2\pi T_{R_{qi}} \\ &= -2\pi T_{R_{qi}} + \sum_{j,i} \eta_{ji} - \int_{a_H} k_g ds - T_{R_{qi}} \pi + 2\pi T_{R_{qi}} \\ &= \sum_{j,i} \eta_{ji} - \int_{a_H} k_g ds - T_{R_{qi}} \pi. \end{aligned}$$

<sup>48</sup>I denne delen av beviset er det svært praktisk at vi har definert vinkelen om singulariteten ved hjelp av et uttrykk som inngår i Gauss-Bonnet-formelen.

<sup>49</sup>Indeksen  $i$  på venstre side gjennomløper vinkler mens indeksen  $i$  på høyre side gjennomløper singularitetene av type 1.

Når vi lar  $r \rightarrow 0$ , får vi

$$\iint_{R_{q_i}} K dA + \int_{\partial R_{q_i}} k_g ds = \sum_{j,i} \eta_{ji} + \alpha - T_{R_{q_i}} \pi. \quad (11)$$

Merk at

$$\alpha = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{a_H} k_g ds.$$

I definisjonen av  $\alpha$  lar vi enhetsnormalvektoren for kurven  $a_H$  peke *ut av* integrasjonsområdet. Her er  $a_H$  orientert slik at enhetsnormalvektoren peker *inn i* området. Dermed endres fortegnet på  $k_g$ .

Summerer vi opp for alle trekantene i  $R$  (inkludert de ovennevnte der ligning (10) gjelder), får vi

$$\iint_R K dA + \sum_j \int_{\partial R_j} k_g ds = \sum_{j,i} \eta_{ji} + \sum_i \alpha_i - T\pi. \quad (12)$$

Videre i beviset vil vi finne et annet uttrykk for vinkelsummen på den høyre siden av likhetstegnet i denne relasjonen. Vi tar utgangspunkt i relasjonene (4), (5), (6) etc gjengitt i kapittel 1 fra beviset for det opprinnelige Gauss-Bonnets teorem. Disse uttrykkene vil vi imidlertid måtte modifisere på grunn av selvsnittene. Det skal vi komme tilbake til. La de tre glatte randkurvene (kantene) til  $R_j$  betegnes  $\alpha_{ij}, i = 1, 2, 3$  hvor disse er orientert slik at enhetsnormalvektorene peker inn i  $R_j$ . Kantene som ligger i det indre av  $R$  vil komme i par med motsatt normal orientering. Siden vi har krevd at alle selvsnitt ligger i områder som lokalt kan uttrykkes som unioner av regulære flater, vil kanter møtes to og to også her, igjen med motsatt normal orientering. Dermed vil bidragene fra den geodetiske krummingen kansellere også i snittene. Vi har

$$\sum_j \int_{\partial R_j} k_g dS = \sum_{j,i} \int_{\alpha_{ji}} k_g ds.$$

De resterende kantene ligger på  $\partial R$  og vi har

$$\sum_j \int_{\partial R_j} k_g ds = \sum_{\alpha_{ji} \subset \partial R} \int_{\alpha_{ji}} k_g ds = \int_{\partial R} k_g ds \quad (13)$$

Vi skal nå se nærmere på uttrykkene i (12) og vi ønsker å finne uttrykk for den totale vinkelsummen om hjørner i det indre av  $R$  og på  $\partial R$ . La  $V$  og  $\partial V$  være antall hjørner i hhv  $R$  og på  $\partial R$ .

Vi begynner med hjørnene i det indre av  $R$ . Vi har antatt at alle hjørnene av type 1 ligger i det indre av  $R$ , så la  $q_1, \dots, q_x$  betegne disse og la  $\alpha_1, \dots, \alpha_x$  være vinklene om disse singularitetene. De resterende hjørnene i det indre er av type 2 og 3. La  $v_1, \dots, v_y$  betegne hjørnene av type 2 i Int  $R$  (disse ligger på snittkurvene) og la  $z$  være antall hjørner av type 3 (ikke-singulære) i Int  $R$ . Da er  $V - \partial V = x + y + z$ .

Rundt hjørnene  $q_1, \dots, q_x$  er den totale vinkelsummen

$$\sum_{i=1}^x \alpha_i.$$

Rundt et av hjørnene  $v_i$  er vinkelsummen

$$2\pi + d(v_i)\pi.$$

Vi ønsker nå et mål på den totale defekten summert over hjørnene  $v_1, \dots, v_y \in$  Int  $R$  av type 2. Derfor definerer vi:

$$D_T = \sum_{i=1}^y d(v_i) \text{ hvis } y \geq 1, D_T = 0 \text{ hvis } y = 0.$$

Dermed kan vi for hjørnene  $v_1, \dots, v_y$  uttrykke den totale vinkelsummen ved

$$2\pi y + \sum_{i=1}^y d(v) \cdot \pi = 2\pi y + D_T \pi.$$

Rundt hjørnene av type 3 er den totale vinkelsummen  $2\pi z$ .

Samlet gir dette et uttrykk for vinkelsummen om hjørner  $V$  i det indre av  $R$ :

$$\begin{aligned} & 2\pi z + 2\pi y + D_T \pi + \sum_{i=1}^x \alpha_i \\ &= 2\pi(z + y) + D_T \pi + \sum_{i=1}^x \alpha_i \\ &= 2\pi(V - \partial V - x) + D_T \pi + \sum_{i=1}^x \alpha_i \\ &= 2\pi(V - \partial V) + D_T \pi + \sum_{i=1}^x (\alpha_i - 2\pi). \end{aligned} \tag{14}$$

Vi tar nå for oss hjørnene på  $\partial R$ . Siden vi har antatt at alle punktene av type 1 ligger i det indre av  $R$ , er hjørnene på randa av type 2 og 3. Dessuten



har vi antatt at snittkurvene til  $R$  er av type  $I$ ,  $E$ ,  $B$  og  $L$ . Siden snittkurvene av type  $I$  og  $L$  ikke har endepunkter på randa, er punktene på randa av type 2 endepunkter til snittkurer av type  $B$  og  $E$ . Punktene av type 3 ligger enten i et glatt eller et ikke-glatt punkt på en randkurve. I hvert av de ikke-glatte punktene er det en ytre vinkel  $\epsilon_k \neq 0$  og vinkelsummen om et slikt punkt er  $\eta_k = \pi - \epsilon_k$ .

La  $p$  være et hjørne på  $\partial R$ , la  $p$  være endepunkt for en snittkurve  $\gamma_B$  av type  $B$  og la  $d(\gamma_B)$  være defekten til  $\gamma_B$ . Da blir vinkelsummen om  $p$   $\pi + \frac{1}{2}d(\gamma_B)\pi$ . (Her bruker vi forutsetningen om at randa skal kunne skrives som en union av glatte kurver slik at  $\epsilon_k = 0$  her).

La  $p_1, p_2$  være de to endepunktene til en snittkurve  $\gamma_E$  av type  $E$ , og la  $d(\gamma_E)$  være defekten til  $\gamma_E$ . Vinkelsummen om disse to punktene blir  $2\pi + d(\gamma_E)\pi$  (faktoren  $\frac{1}{2}$  blir borte siden vi får et bidrag i begge punktene; også her bruker vi antagelsen om at  $\epsilon_k = 0$  i begge punktene).

Dermed får vi følgende uttrykk for vinkelsummen om hjørner på randa:

$$V_\partial\pi - \sum_k \epsilon_k + \frac{1}{2}D_B\pi + D_E\pi \quad (15)$$

der  $V_\partial$  er antall hjørner på  $\partial R$  og

$$D_B = \sum_{i=1}^n d(\gamma_{B_i}) \text{ hvis } n \geq 1, \quad D_B(R) = 0 \text{ hvis } n = 0,$$

$$D_E = \sum_{i=1}^k d(\gamma_{E_i}) \text{ hvis } k \geq 1, \quad D_E(R) = 0 \text{ hvis } k = 0.$$

I beviset for det opprinnelige Gauss-Bonnet-teoremet, er  $E_\partial = V_\partial$ . Siden snittkurvene av typene  $B$  og  $E$  har endepunkter på randa, endres også denne relasjonen på samme måte som ovenfor. Dermed har vi

$$E_\partial = V_\partial + \frac{1}{2}D_B + D_E.$$

I det opprinnelige beviset for Gauss-Bonnet har vi relasjonen  $3T = 2E - E_\partial$  siden hver trekant har tre kanter og hver kant ligger i to trekanter bortsett fra kantene på randa. Langs snittkurvene på  $R$  møtes imidlertid flere trekanter enn to. Dermed vil noen korreksjonsledd inngå i vår modifiserte utgave av dette uttrykket. Vi har definert defekten slik at korreksjonen enkelt lar seg uttrykke ved hjelp av denne. Uttrykket blir

$$3T = 2E - E_\partial + D_I + D_B + D_E + D_T. \quad (16)$$

Dette ønsker vi nå å begrunne.

Vi har antatt at alle snittkurvene på  $R$  er av type  $I$ ,  $B$ ,  $E$  og  $L$ . La  $m, n, k$  og  $l$  betegne antall kurver av henholdsvis type  $I, B, E$  og  $L$ .

Vi ser først på en snittkurve  $\gamma_B$  av type  $B$  med defekt  $d(\gamma_B)$ . Den har et endepunkt av type 1 i det indre av  $R$  og et endepunkt på  $\partial R$ . La  $v_1, \dots, v_{n_B}$  betegne de  $n_B$  hjørnene av type 2 langs  $\gamma_B$  som ligger i det indre av  $R$  og la  $k_B$  betegne antall kanter langs  $\gamma_B$ . Legg merke til at  $k_B = n_B + 1$  (Sagt på en annen måte: Dersom vi ønsker å telle antall kanter langs kurven, kan vi telle antall hjørner  $v_i$  i stedet, men da må vi huske at vi har oversett en kant). Vi minner om at  $d(\gamma_B) = d(v_i)$ . Korreksjonsbidraget fra denne kurven blir

$$d(\gamma_B) \cdot k_B = d(\gamma_B) + d(\gamma_B) \cdot n_B = d(\gamma_B) + d(v_i) \cdot n_B.$$

La  $\gamma_I$  være en snittkurve av type  $I$ . Den har to endepunkter av type 1 i det indre av  $R$ . La nå  $v_1, \dots, v_{n_I}$  betegne de  $n_I$  hjørnene av type 2 langs  $\gamma_I$  som ligger i det indre av  $R$  og la  $k_I$  betegne antall kanter langs  $\gamma_I$ . Uttrykket for denne kurven tilsvarer det foregående:  $k_I = n_I + 1$ . Dermed blir korreksjonsbidraget fra denne kurven

$$d(\gamma_I) \cdot k_I = d(\gamma_I) + d(\gamma_I) \cdot n_I = d(\gamma_I) + d(v_i) \cdot n_I.$$

En kurve  $\gamma_E$  av type  $E$  med begge endepunktene på randa gir et tilsvarende korreksjonsbidrag

$$d(\gamma_E) \cdot k_E = d(\gamma_E) + d(\gamma_E) \cdot n_E = d(\gamma_E) + d(v_i) \cdot n_E.$$

Situasjonen er litt annerledes for lukkede kurver. La  $\gamma_L$  være en kurve av type  $L$ . La  $k_L$  betegne antall kanter langs  $\gamma_L$  og la  $n_L$  betegne hjørnene av type 2 langs  $\gamma_L$ . For slike kurver er  $k_L = n_L$ . Dermed blir korreksjonsbidraget

$$d(\gamma_L) \cdot k_L = d(v_i) \cdot n_L.$$

Vi kan nå summere opp korreksjonsbidragene fra alle snittkurvene.  $R$  har  $m, n, k$  og  $l$  snittkurver av henholdsvis type  $I, B, E$  og  $L$  og  $y$  hjørner av type 2 i det indre. Dermed har vi følgende uttrykk:

$$\sum_{i=1}^m d(\gamma_I) + \sum_{i=1}^n d(\gamma_B) + \sum_{i=1}^k d(\gamma_E) + \sum_{i=1}^l d(v_i) = D_I + D_B + D_E + D_T$$

som nettopp er korreksjonsleddet som inngår i ligning (16).

Da er vi klare for å oppsummere. Siden  $\sum_{j,i} \eta_{ji} + \sum_i \alpha_i$  (som inngår i uttrykket på den høyre siden av likhetstegnet i ligning (12)) er den totale summen av vinklene i alle trekantene i trianguleringen, kan vi uttrykke dette som summen av uttrykkene (14) og (15). Det gir følgende:

$$\begin{aligned}
\iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds &= \sum_{j,i} \eta_{ji} + \sum_i \alpha_i - T\pi \\
&= 2\pi(V - V_\partial) + \sum_i (\alpha_i - 2\pi) + D_T\pi + V_\partial\pi - \sum_k \epsilon_k + \frac{1}{2}D_B\pi + D_E\pi - \pi T \\
&= 2\pi V - \pi V_\partial - \sum_i \Delta_i + D_T\pi - \sum_k \epsilon_k + \frac{1}{2}D_B\pi + D_E\pi - \pi T \\
&= 2\pi V - \pi(E_\partial - \frac{1}{2}D_B - D_E) - \sum_i \Delta_i + D_T\pi - \sum_k \epsilon_k + \frac{1}{2}D_B\pi + D_E\pi - \pi T \\
&= 2\pi V - \pi E_\partial - \sum_i \Delta_i + D_T\pi - \sum_k \epsilon_k + D_B\pi + 2D_E\pi - \pi T \\
&= 2\pi V - \pi(2E - 3T + D_I + D_B + D_E + D_T) - \sum_i \Delta_i \\
&\quad + D_T\pi - \sum_k \epsilon_k + D_B\pi + 2D_E\pi - \pi T \\
&= 2\pi(V - E + T) - D_I\pi + D_E\pi - \sum_i \Delta_i - \sum_k \epsilon_k \\
&= 2\pi\chi(R) - D_I\pi + D_E\pi - \sum_i \Delta_i - \sum_k \epsilon_k
\end{aligned}$$

hvilket gir

$$\iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds + \sum_k \epsilon_k + D_I\pi - D_E\pi + \sum_i \Delta_i = 2\pi\chi(R)$$

som fullfører beviset. □

## 4 Eksempler og beregninger

I dette kapittelet vil vi bruke teoremet på noen singulære flater i  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.1 Noen singulære flater i $\mathbb{R}^3$

**Eksempel 4.1.1.** La  $S$  være whitneyparaplyen gitt ved ligningen  $y^2 = x^2z$ . Den kan parametriseres ved  $x(u, v) = (uv, u, v^2)$ . La  $R$  være området gitt ved  $u, v \in [-1, 1]$  (se figur 1), og la  $q$  være singulariteten i origo.

Vi må nå sjekke om de tre betingelsene i kap (3.1) holder for  $R$  slik at  $R$  er triangulerbar.

**Betingelse 1.** Som nevnt tidligere kan  $R$  trianguleres slik at trekantene som har  $q$  i som hjørne består av kanter med glatte randkurver der det geodetiske krummingsintegralet konvergerer. Dette oppnår vi ved å velge trekanter med kanter langs  $y$ - og  $z$ -aksen der  $k_g$  blir 0.

**Betingelse 2.** Vi må forsikre oss om at krummingsintegralet konvergerer på denne flaten. Vi beregner først krummingen.<sup>50</sup>

$$x(u, v) = (uv, u, v^2)$$

$$x_u = (v, 1, 0)$$

$$x_v = (u, 0, 2v)$$

$$x_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$x_{uv} = (1, 0, 0)$$

$$x_{vv} = (0, 0, 2)$$

$$x_u \times x_v = (2v, -2v^2, -u)$$

$$\|x_u \times x_v\| = \sqrt{u^2 + 4v^2 + 4v^4}$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$$

---

<sup>50</sup>Formlene er hentet fra [Jahren 2011, s. 125-128]

$$\begin{aligned}
e &= N \cdot x_{uu} = 0 \\
f &= N \cdot x_{uv} = \frac{2v}{\sqrt{u^2 + 4v^2 + 4v^4}} \\
g &= N \cdot x_{vv} = \frac{-2u}{\sqrt{u^2 + 4v^2 + 4v^4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= 1 + v^2 \\
F &= uv \\
G &= 4v^2 + u^2
\end{aligned}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{4v^2}{(u^2 + 4v^2 + 4v^4)^2}.$$

La nå  $R_K$  være området slik at  $u, v \in [0, 1]$ . Krummingsintegralet er gitt ved<sup>51</sup>

$$\iint_{R_K} K \sqrt{EG - F^2} dudv = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{4v^2}{(u^2 + 4v^2 + 4v^4)^{\frac{3}{2}}} dudv.$$

Siden  $K \rightarrow -\infty$  når  $u = 0$  og  $v \rightarrow 0$ , kunne det tenkes at krummingsintegralet divergerer. Vi må sjekke at det ikke er tilfelle. Vi har

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{4v^2}{(u^2 + 4v^2 + 4v^4)^{\frac{3}{2}}} dudv \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{4v^2}{(u^2 + 4v^2)^{\frac{3}{2}}} dudv.$$

Men

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \frac{4v^2}{(u^2 + 4v^2)^{\frac{3}{2}}} dudv \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{r'} \frac{4r^2 \sin^2 \theta}{(r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{r'} \frac{4 \sin^2 \theta}{(\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} dr d\theta
\end{aligned}$$

for et passende valg av  $r'$ , og dette integralet eksisterer. Dermed eksisterer også krummingsintegralet for  $R$  siden dette området kan deles opp i fire områder som (opp til symmetri) er like  $R_K$ .

Vi skal snart se på flere eksempler på flater med whitneysingulariteter. Selv om krummingsintegralet eksisterer for whitneypaplyen, trenger ikke

---

<sup>51</sup>[Jahren 2011, s. 156]

krummingsintegralet å eksistere for enhver flate med en whitneysingularitet. Vi skal imidlertid ikke sjekke dette integralet for hver av disse flatene (uttrykket for gausskrummingen kan bli ganske stygt på enkelte flater), så i disse tilfellene nøyer vi oss med å anta at integralet eksisterer.

**Betingelse 3.** La  $S_r$  være en sfære med radius  $r$  og sentrum i  $q$ , og la  $a = S_r \cap R_K$ . Vi må sjekke om  $a$  er en kurve slik at denne kan brukes til å angi vinkelen om  $q$ .

Sfæren  $S_r$  er gitt ved  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

Whitneyparaplyen er gitt ved  $x^2 = y^2z$ .

Vi eliminerer  $x$  og får

$$\begin{aligned} y^2z + y^2 + z^2 &= r^2 \\ y^2(z+1) &= r^2 - z^2 \\ y^2 &= \frac{r^2 - z^2}{z+1}. \end{aligned}$$

Vi setter  $z = t$  og får

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{tr^2 - t^3}{t+1}} \\ y &= \sqrt{\frac{r^2 - t^2}{t+1}} \\ z &= t. \end{aligned}$$

Dermed kan vi parametrisere  $a$  ved  $a(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Velger vi  $t \in [0, r]$ , får vi en kurve som starter i  $(0, r, 0)$  og ender i  $(0, 0, r)$  og som er slik at  $a(t) \in R_T$  for alle  $t \in [0, r]$ . Tilsvarende kurver ligger i de tre andre områdene som (opp til symmetri) er like  $R_K$ . Dermed er  $\alpha$  om  $q$  (og tilhørende  $\Delta$ ) veldefinert og formelen vår kan brukes på denne flaten.

$R$  har en snittkurve av type  $B$  langs den positive delen av  $z$ -aksen (slike snittkurver inngår ikke i formelen).  $R$  er kontraktibel og har eulerkarakteristikk 1. Dessuten har  $R$  fire ytre vinkler langs randa. Det gir følgende formel for  $R$ :

$$\iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds + \sum_k \epsilon_k + \Delta = 2\pi.$$

**Eksempel 4.1.2.** La  $S$  være flaten gitt ved  $xyz = 0$ , og la  $R$  være området der  $x, y, z \in [-1, 1]$ .  $S$  er unionen av  $xy$ -  $xz$ - og  $yz$ -planet, og disse snitter langs  $x$ -,  $y$ - og  $z$ -aksen. Dermed har  $R$  seks snittkurver av type  $B$  og et trippelpunkt i origo. La  $q$  være dette punktet. Siden  $R$  er en union av tre plan og begrenset av rette linjer, er

$$\iint_R K dA = \int_{\partial R} k_g ds = 0.$$

Randa  $\partial R$  har tolv ytre vinkler på  $\pi/2$ , og vinkelsummen om trippelpunktet er  $\alpha = 6\pi$  (man får et bidrag på  $2\pi$  fra hvert av de tre planene). Dermed har trippelpunktet singularitetsdefekt  $\Delta = 2\pi - 6\pi = -4\pi$ . Som en test på formelen vår vil vi nå kontrollere at den gir et riktig uttrykk for eulerkarakteristikken til  $R$ . Siden  $R$  er kontraktibel vet vi at  $\chi(R) = 1$ . Snittkurver av type  $B$  inngår ikke i formelen.

Setter vi inn i venstresiden i uttrykket, får vi

$$\sum_k \epsilon_k + \Delta = 12 \cdot \pi/2 - 4\pi = 6\pi - 4\pi = 2\pi.$$

Dette gir

$$2\pi = 2\pi\chi(R)$$

$$\chi(R) = 1$$

hvilket var svaret vi forventet.

Vi skal snart se flere eksempler på flater med trippelpunkt.

Det projektive planet  $\mathbb{P}^2$  kan ikke embeddes i  $\mathbb{R}^3$ . Den kan imidlertid immerseres i  $\mathbb{R}^3$ .<sup>52</sup> Vi skal nå se på flere flater som er representasjoner av  $\mathbb{P}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ .

**Definisjon 4.1.3.** La  $S$  være en flate. En *immersjon*  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  er en lokalt injektiv avbildning, det vil si at hver  $x \in S$  har en åpen omegn  $U$  slik at  $f$  er injektiv på  $U$ . Dessuten skal rangen til  $f$  være lik dimensjonen til domenet (i dette tilfellet 2) i hvert punkt i  $S$ .<sup>53</sup>

---

<sup>52</sup>[Spivak 2005, s. 14]

<sup>53</sup>[Spivak 2005, s.14, 46]

Spivak omtaler flere flater som er representasjoner av  $\mathbb{P}^2$  i  $\mathbb{R}^3$  (Steiner's Roman Surface og unionen av en cross-cap og en disk)<sup>54</sup>. Vi skal snart se nærmere på disse flatene. Spivak omtaler disse som immersjoner, men man bør legge merke til at de strengt tatt ikke er det siden de ikke er lokalt injektive i whitneysingularitetene. Disse kjennetegnes jo av at ethvert åpent omegn om disse snitter seg selv.

**Eksempel 4.1.4.** Det opprinnelige Gauss-Bonnet teoremet gjelder for abstrakte flater som ikke er embeddet i  $\mathbb{R}^3$ . Dermed kan vi bruke det på  $R = \mathbb{P}^2$ .  $\mathbb{P}^2$  har ingen rand, og den har eulerkarakteristikk 1 (bruk f eks en triangulering med 2 trekanter, 3 kanter og 2 hjørner).<sup>55</sup> Dermed får vi følgende uttrykk for krummingsintegralet:

$$\iint_R K dA = 2\pi.$$

Vi bør forvente at krummingsintegralet blir det samme for en immersjon av  $\mathbb{P}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ . La oss se om det stemmer.

**Eksempel 4.1.5.** En immersjon  $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow R$  er Boy's overflate<sup>56</sup> (se figur 2 og 3). Den kan parametriseres på flere ulike måter<sup>57</sup>; vi har brukt følgende:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2} \cos^2 v \cos(2u) + \cos(u) \sin(2v)}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \\ y &= \frac{\sqrt{2} \cos^2 v \sin(2u) - \sin(u) \sin(2v)}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \\ z &= \frac{3 \cos^2 v}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)} \\ u &\in [-\pi/2, \pi/2], v \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

La  $R$  være denne flaten. Den har et trippelpunkt  $q$  og tre snittkurver av type  $I$  som alle har endepunktene i  $q$ . Dermed har ikke  $R$  noen singulariteter der noen av betingelsene for triangulering ikke er oppfylt, og teoremet kan brukes på denne flaten.

Vi ønsker først å finne eulerkarakteristikken til  $R$ . Det kan vi enklest gjøre ved å utnytte at flaten er en immersjon av  $\mathbb{P}^2$  som vi allerede vet har

---

<sup>54</sup>[Spivak 2005, s.13-17]

<sup>55</sup>[Hatcher 2001, s. 102]

<sup>56</sup>[Weisstein 2011a]

<sup>57</sup>[Weisstein 2011a]



eulerkarakteristikk 1. Dermed kan vi beregne  $\chi(R)$  ved

$$\chi(R) = \chi(\mathbb{P}^2) + K$$

der  $K$  er et korreksjonsledd vi nå ønsker å finne.

Trianguler  $R$  slik vi gjør for alle singulære flater: la  $q$  være hjørnet til alle omkringliggende trekanter, og la det kun være hjørner og kanter langs selvsnittskurvene. La  $\mathbb{P}^2$  være triangulert slik at hver trekant  $T_{\mathbb{P}^i}$  i denne trianguleringen avbildes av  $f$  på en trekant  $T_{R_j}$  i trianguleringen av  $R$  og slik at hver kant i  $T_{\mathbb{P}^i}$  avbildes på en kant i  $T_{R_j}$  og hvert hjørne på  $T_{\mathbb{P}^i}$  avbildes på et hjørne i  $T_{R_j}$ . Eulerkarakteristikken til  $\mathbb{P}^2$  er gitt ved  $\chi(\mathbb{P}^2) = T - E + V = 1$ . Vi ønsker derfor å se på hvor mange av hjørnene og kantene i trianguleringen av  $\mathbb{P}^2$  som identifiseres under  $f$ . I trippelpunktet identifiseres tre hjørner til ett. Dette har et negativt bidrag til eulerkarakteristikken, noe som foreløpig gir

$$\chi(R) = \chi(\mathbb{P}^2) - 2 + L.$$

Langs hver av snittkurvene identifiseres en del hjørner og kanter. La  $\gamma_I$  være en av snittkurvene. La  $k_I$  være antall kanter langs  $\gamma_I$  og  $n_I$  være antall hjørner av type 2 på  $\gamma_I$ . Som vi har sett tidligere er  $k_I = n_I + 1$ . Siden antall kanter som identifiseres langs  $\gamma_I$  er lik antall hjørner av type 2 som identifiseres, vil hver av snittkurvene gi et bidrag på 1 til eulerkarakteristikken. Det gir oss

$$\chi(R) = \chi(\mathbb{P}^2) - 2 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$$

Nå er det meste gjort. Vi observerer at hver av snittkurvene  $\gamma_I$  har defekt 2. Det gir  $D_I = 2 \cdot 3 = 6$ . Trippelpunktet har defekt  $\Delta_T = -4\pi$ .  $R$  har ingen rand. Det gir

$$\iint_R K dA + D_I \pi + \Delta_T = 2\pi \chi(R)$$

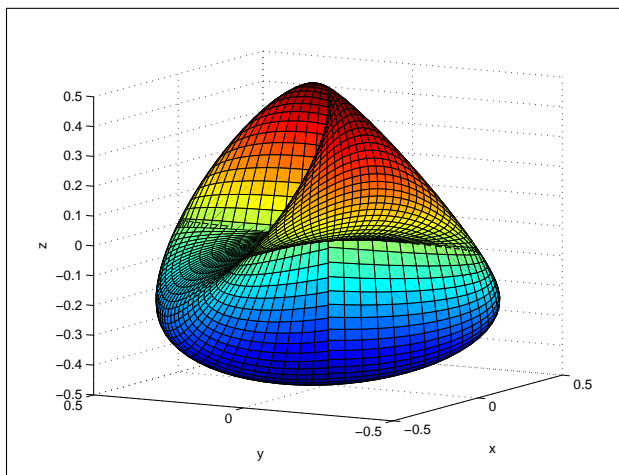
$$\iint_R K dA + 6\pi - 4\pi = 2\pi \cdot 2$$

$$\iint_R K dA = 2\pi$$

hvilket er svaret vi forventet.

**Eksempel 4.1.6.** Steiner's Roman surface (se figur 5) er et annet eksempel på en representasjon av  $\mathbb{P}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ .<sup>58</sup> La  $R$  være denne flaten som er gitt ved følgende parametrisering:<sup>59</sup>

$$\begin{aligned}x &= \cos(u) \cos(v) \sin(v) \\y &= \sin(u) \cos(v) \sin(v) \\z &= \cos(u) \sin(u) \cos^2(v) \\u &\in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2].\end{aligned}$$



Figur 5: Steiner's Roman Surface

Den har et trippelpunkt (med singularitetsdefekt  $\Delta_T = -4\pi$ ), 6 whitneysingulariteter (med singularitetsdefekt  $\Delta_i$ ) og 6 snittkurver av type  $I$ . Hver av disse kurvene har defekt 2, og dermed er  $D_I = 6 \cdot 2 = 12$ . Flaten er homotopiekvivalent med en wedge av 4 sfærer og har dermed eulerkarakteristikk 5.

Vi har tidligere sjekket at krummingsintegralet for en flate med en whitneysingularitet eksisterer. I dette tilfellet nøyer vi oss med å anta at integralet eksisterer. At de resterende betingelsene for triangulering holder, er lett å kontrollere.

Vi får følgende:

---

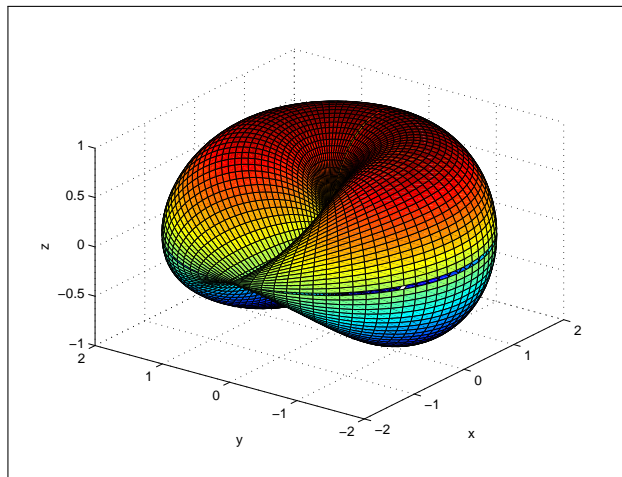
<sup>58</sup>[Spivak 2005, s. 17]

<sup>59</sup>[Weisstein 2011c]

$$\begin{aligned} \iint_R K dA + D_I \pi + \Delta_T + \sum_i \Delta_i &= 2\pi \chi(R) \\ \iint_R K dA + 12\pi - 4\pi + \sum_i \Delta_i &= 2\pi \cdot 5 \\ \iint_R K dA + \sum_i \Delta_i &= 2\pi. \end{aligned}$$

**Eksempel 4.1.7.** Den siste representasjonen av  $\mathbb{P}^2$  i  $\mathbb{R}^3$  er en cross-cap limt på en disk<sup>60</sup> (se figur 6). Den kan parametriseres ved<sup>61</sup>:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cos u \sin 2v \\ y &= \frac{1}{2} \sin u \sin 2v \\ z &= \frac{1}{2} (\cos^2 v - \cos^2 u \sin^2 v) \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2]. \end{aligned}$$



Figur 6: Unionen av en cross-cap og en disk.

Igjen er uttrykkene såpass store at vi nøyer oss med å anta at krummingsintegralet eksisterer. De resterende betingelsene er greie å kontrollere.

<sup>60</sup>[Spivak 2005, s. 14]

<sup>61</sup>[Weisstein 2011b]

Flaten har to whitneysingulariteter  $q_1$  og  $q_2$  (med singularitetsdefekt  $\Delta_i$ ) forbundet av en snittkurve av type  $I$  med defekt 2. Siden den er homotopiekvivalent med sfæren, har den eulerkarakteristikk 2. Dermed har vi

$$\begin{aligned}\iint_R K dA + D_I \pi + \sum_i \Delta_i &= 2\pi\chi(R) \\ \iint_R K dA + 2\pi + \sum_i \Delta_i &= 2\pi \cdot 2 \\ \iint_R K dA + \sum_i \Delta_i &= 2\pi.\end{aligned}$$

Tidligere i oppgaven kommenterte vi fordelene ved å la vinkelen  $\alpha$  om en singularitet av type 1 være definert ved et integral som inngikk i Gauss-Bonnet-formelen. De to siste eksemplene viser den største ulempen: Vinkelen kan vise seg å være svært vanskelig å beregne, særlig der parametriseringene av flatene blir litt kompliserte.

**Eksempel 4.1.8.** En annen flate som ikke kan embeddes i  $\mathbb{R}^3$  er kleinflasken  $K$ . Den kan immerseres i  $\mathbb{R}^3$ , og vi får da en flate der vi kan bruke formelen vår. La  $R$  være en immersjon av  $K$  i  $\mathbb{R}^3$  med en snittkurve av typen  $\gamma_L$  (se figur 7).  $R$  kan trianguleres slik at teoremet vårt gjelder for  $R$ .

Vi betrakter først kleinflasken som abstrakt (ikke-immersert) flate. Da kan vi bruke det opprinnelige Gauss-Bonnet-teoremet.  $K$  har eulerkarakteristikk 0 (bruk f eks en triangulering med 2 trekanter, 3 kanter og 1 hjørne<sup>62</sup>). Vi får

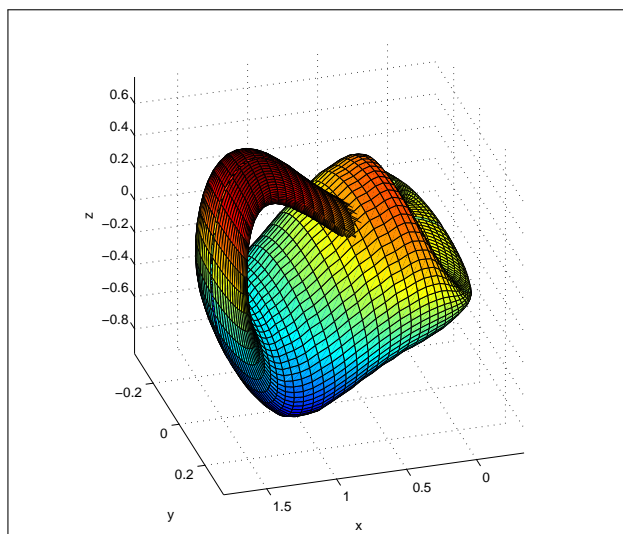
$$\iint_K K dA = 2\pi\chi(K) = 0.$$

Også  $R$  har eulerkarakteristikk 0. Det kommer av at det er like mange kanter som hjørner langs  $\gamma_L$ . Bidragene herfra kansellerer i beregningen av eulerkarakteristikken. Lukkede snittkurver av type  $L$  har ikke noe endepunkt  $q$  med singularitetsdefekt. Dermed gir også vår formel

$$\iint_R K dA = 2\pi\chi(R) = 0.$$

---

<sup>62</sup>[Hatcher 2001, s. 102]



Figur 7: En immersjon av kleinflasken i  $\mathbb{R}^3$ .

**Eksempel 4.1.9.** En kjegle kan parametriseres ved følgende:

$$\begin{aligned}x &= u \cos(v) \\y &= u \sin(v) \\z &= u.\end{aligned}$$

Velger man  $u \in [0, c], v \in [0, 2\pi]$  for en konstant  $c$ , får man en enkel kjegle, og dersom  $u \in [-c, c], v \in [0, 2\pi]$ , får man en dobbel kjegle.

La nå  $R_1$  være en enkel kjegle der  $u \in [0, c], v \in [0, 2\pi]$ , og la  $q$  være singulariteten i origo. La  $\alpha_K$  være vinkelen om  $q$ , og la  $q$  ha singularitetsdefekt  $\Delta = 2\pi - \alpha_K$ .  $R_1$  har en rand bestående av en glatt kurve, og kjeglen har krumming  $K = 0$ .  $\chi(R_1) = 1$ . Det gir

$$\begin{aligned}\int_{\partial R_1} k_g ds + \Delta &= 2\pi\chi(R) \\ \int_{\partial R_1} k_g ds + (2\pi - \alpha_K) &= 2\pi\chi(R) \\ \int_{\partial R_1} k_g ds &= \alpha_K.\end{aligned}$$

La nå  $R_2$  være en dobbelt kjegle gitt ved  $u \in [-c, c], v \in [0, 2\pi]$ . La fortsatt  $q$  være singulariteten i origo. La  $\alpha$  være vinkelen om  $q$ , og la  $\Delta = 2\pi - \alpha$  være singularitetsdefekten til  $q$ . Siden kjeglen er dobbel, blir  $\alpha = 2\alpha_K$ .  $R_2$  har en rand bestående av to glatte kurver, og  $\chi(R) = 1$ . Det gir

$$\begin{aligned} \int_{\partial R_2} k_g ds + \Delta &= 2\pi\chi(R) \\ \int_{\partial R_2} k_g ds + (2\pi - 2\alpha_K) &= 2\pi\chi(R) \\ \int_{\partial R_2} k_g ds &= 2\alpha_K \end{aligned}$$

hvilket vi skulle forvente siden randa gir et dobbelt så stort bidrag til formelen når den består av to kurver og ikke en.

**Eksempel 4.1.10.** Det er på tide med et eksempel på en flate med snitt av type  $E$ . La  $D$  være en disk med en glatt rand  $\partial D$ , la  $R$  være en immersjon av  $D$  med kun en snittkurve og la denne være av type  $E$ . La  $\gamma_E$  være denne kurven og la  $d(\gamma_E) = 2$ . En slik kurve har begge endepunktene på  $\partial R$ . La  $\partial R$  være glatt. For  $D$  gjelder

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds = 2\pi\chi(D) = 2\pi.$$

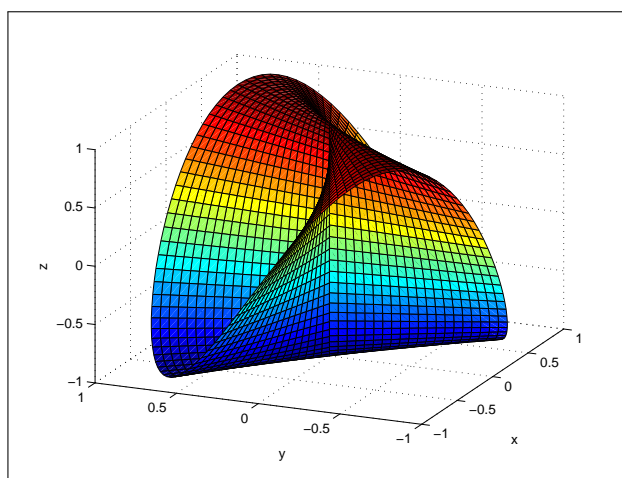
Snittet til  $R$  gjør at  $R$  har annen eulerkarakteristikk enn  $D$ .  $R$  er homotopiekvivalent med en sirkel og har dermed eulerkarakteristikk 0. Vi burde forvente at defekten  $D_E$  kompenserer for dette. Vi får

$$\begin{aligned} \iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds - D_E \pi &= 2\pi\chi(R) \\ \iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds - 2\pi &= 0 \\ \iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds &= 2\pi. \end{aligned}$$

**Eksempel 4.1.11.** La  $R$  være flaten gitt ved  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$  (se figur 8). Dette er en cross cap (uten noen pålimt disk som i eksempel 4.1.7), og den

kan parametriseres ved følgende:

$$\begin{aligned}x &= u \cos v \\y &= u \sin v \\z &= \sin 2v \\u &\in [0, 1], v \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$



Figur 8: Cross-cap

$R$  har to whitneysingulariteter, så la  $q_1, q_2$  betegne disse. Dessuten har  $R$  en snittkurve av type  $I$  med defekt  $d(\gamma_I) = 2$ . Vi antar at krummingsintegralet eksisterer. De resterende betingelsene for triangulering er enkle å kontrollere.

Flaten har en glatt rand  $\partial R$ , og den er kontraktibel og har eulerkarakteristikk 1. Dermed har vi

$$\begin{aligned}\iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds + D_I \pi + \sum_i \Delta_i &= 2\pi \chi(R) \\ \iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds + 2\pi + \sum_i \Delta_i &= 2\pi \\ \iint_R K dA + \int_{\partial R} k_g ds + \sum_i \Delta_i &= 0.\end{aligned}$$

En cross-cap er en representasjon av et möbiusbånd med en selvskjæring. Det kan derfor være interessant å sammenligne dette uttrykket med det tilsvarende uttrykket for et möbiusbånd. Möbiusbåndet  $M$  har eulerkarakteristikk 0, så den opprinnelige Gauss-Bonnet-formelen (som også gjelder for ikke-orienterbare flater) gir (for et Möbiusbånd med en glatt rand  $\partial M$ )

$$\iint_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M) = 0.$$



## Referanser

- [Davis 2008a] Davis, Mike, “Orbifolds 1”, CMS, Zhejiang University, 2008.  
<http://www.math.osu.edu/mdavis/talks/Hangzhou/orbifolds1.pdf>
- [Davis 2008b] Davis, Mike, “Orbifolds 2”, CMS, Zhejiang University, 2008.  
<http://www.math.osu.edu/mdavis/talks/Hangzhou/orbifolds2.pdf>
- [Fraleigh 2003] Fraleigh, John B., “Abstract Algebra”, 7. utg., Pearson Education, Inc., 2003.
- [Hatcher 2001] Hatcher, Allen, “Algebraic Topology”, Cambridge University Press, 2001.
- [Jahren 2011] Jahren, Bjørn, “Geometric Structures in Dimension two”, Universitetet i Oslo, 2011.
- [Kaye 2007] Kaye, Adam, “Two-Dimensional Orbifolds”, 2007.  
<http://www.math.uchicago.edu/may/VIGRE/VIGRE2007/REUPapers/FINALFULL/Kaye.pdf>
- [Milnor 1965] Milnor, John W., “Topology from the Differentiable Viewpoint”, Pinceton University Press, 1965.
- [Mond 1985] Mond, David, “On the classification of germs to maps from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$ ”, Proc. London Math. Soc. (3), 50 (1985), 333-369.
- [Munkres 2000] Munkres, James R., “Topology”, 2. utg., Prentice Hall Inc., 2000.
- [Spivak 2005] Spivak, Michael, “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume 1”, 3. utg., 2005.
- [Thurston 2002] Thurston, Bill, “The Geometry and Topology of Three-Manifolds”, 2002.  
<http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>

### *Webressurser*

Følgende websider inneholder en del eksempler på singulære flater som har kommet til nytte under arbeidet med denne oppgaven:

<http://mathworld.wolfram.com>

<http://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/bildergalerie/gallery.html>

Denne visualiseringen av Boys flate fortjener også å nevnes:

<http://www.youtube.com/watch?v=9gRx66xKXek>

På enkelte steder i teksten har jeg vist til noen eksempler hentet fra disse sidene:

[Barile og Weisstein 2011] Barile, Margherita and Weisstein, Eric W. “Whitney Umbrella.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/WhitneyUmbrella.html>

[Weisstein 2011a] Weisstein, Eric W. “Boy Surface.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/BoySurface.html>

[Weisstein 2011b] Weisstein, Eric W. “Cross-Cap.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Cross-Cap.html>

[Weisstein 2011c] Weisstein, Eric W. “Roman Surface.” From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/RomanSurface.html>